

MLM6022 Kõrgem matemaatika: diferentsiaal- ja integraalarvutus

Praktikum 1

Võrratused

Definitsioon 1. Ühe muutujaga ruutvõrratuseks nimetatakse avaldist $ax^2 + bx + c > 0$, kus $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$.

Definitsioon 2. Võrratust $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n > 0$ nimetatakse n -ndat (kõrgemat) järku võrratuseks.

Definitsioon 3. Ratsionaalvõrratuseks nimetatakse avaldist $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, kus $P(x)$ ja $Q(x)$ on polünoomid.

Ülaltoodud definitsioonides märgi $>$ asemel võib kasutada ka $<$, $\leq$ või $\geq$.

Funktsiooni määramis- ja muutumispiirkonnad

Definitsioon 4. Funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkond on argumenti x selliste väärtuste hulk X ehk $D(f)$, mille korral on võimalik leida funktsiooni väärtusi.

Definitsioon 5. Funktsiooni $y = f(x)$ muutumispiirkond Y on funktsiooni kõikvõimalike väärtuste hulk.

Funktsioonide võrdsus

Definitsioon 6. Kaht funktsiooni $f(x)$ ja $g(x)$ loetakse võrdseteks ja märgitakse $f(x) = g(x)$, kui nende määramispiirkonnad ühtivad, s.t. $D(f) = D(g)$ ja $f(x) = g(x)$ iga argumenti väärtuse $x \in D(f)$ korral.

Paaris- ja paaritud funktsioonid

Definitsioon 7. Kui $f(-x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral, siis nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ paarisfunktsiooniks.

Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y -telje suhtes.

Definitsioon 8. Kui $f(-x) = -f(x)$ iga $x \in X$ korral, siis nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ paarituks funktsiooniks.

Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Funktsiooni periood

Definitsioon 9. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse perioodiliseks, kui leidub selline nullist erinev reaalarv T , et $f(x \pm T) = f(x)$ iga $x \in X$ korral.

Vähimat T positiivset väärtust, mille korral definitsioonis toodud võrdus kehtib, nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ perioodiks.

Liitfunktsioon

Definitsioon 10. Kui $y = f(u)$ ja $u = g(x)$, siis öeldakse, et y on muutuja x suhtes liitfunktsioon, ja kirjutatakse $y = f(g(x))$.

Pöördfunktsioon

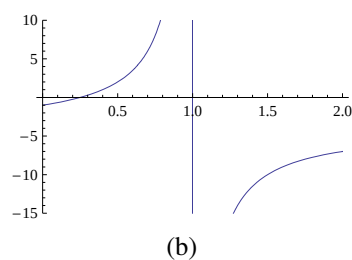
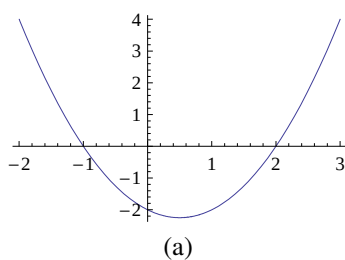
Olgu antud funktsioon $y = f(x)$ määramispiirkonnaga X ja muutumispiirkonnaga Y .

Definitsioon 11. Kui igale elemendile y hulgast Y on kindla eeskirjaga $f^{-1}(\cdot)$ järgi vastavusse seatud täpselt üks element x hulgast X , siis ühese funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsiooniks on funktsioon $x = f^{-1}(y)$.

Näide 1: Lahendame järgmised võrratused a) $x^2 - x - 2 > 0$ ja b) $\frac{x+2}{1-x} \geq 3$.

Lahendus:

- a) Lahendame ruutvõrrandi $x^2 - x - 2 = 0$, mille juured on $x_1 = -1$ ja $x_2 = 2$. Seega $(x+1)(x-2) > 0$, ning $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.
- b) Teisendame võrratuse kujule $\frac{x+2}{1-x} - 3 \geq 0$ ehk $\frac{x+2-3+3x}{1-x} \geq 0$, kust saame $\frac{4x-1}{1-x} \geq 0$. Viimase võrratuse saame viia kujule $(4x-1)(1-x) \geq 0$, arvestades, et $x \neq 1$. Saame lahendiks $x \in [\frac{1}{4}, 1)$.



Näide 2: Leiame funktsioonide a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$, b) $f(x) = \ln(x^2+6x+9) + \sqrt{x^2-2x} - \frac{x}{4}$ ja c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-1-x}} + \ln x$ määramispiirkonnad.

Lahendus:

- a) Funktsioon $f(x)$ on määratud, kui selle murru nimetaja ei võrdu nulliga. Sellepärast leiame antud funktsiooni määramispiirkonna tingimusest $x^2 - 1 \neq 0$ ehk $x^2 \neq 1$, kust saame, et $x \neq \pm 1$. Seega, määramispiirkonnaks on järgmine funktsiooni $f(x)$ väärtuste hulk

$$X = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

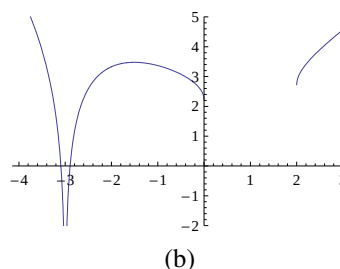
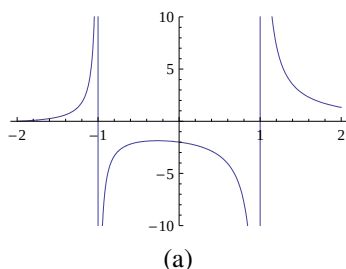
- b) Paneme tähele, et funktsioon $\frac{x}{4}$ on määratud kõigi x reaalarvuliste väärtuste korral, aga funktsioonid $\ln(x^2 + 6x + 9)$ ja $\sqrt{x^2 - 2x}$ nende x väärtuste korral, mille puhul $x^2 + 6x + 9 > 0$ ja $x^2 - 2x \geq 0$. Saame tingimused

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 > 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > -3 \\ x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Seega määramispiirkond on

$$X = (-\infty, -3) \cup (-3, 0] \cup [2, +\infty).$$

- c) Selle funktsiooni määramispiirkonna leiame kahe liidetava funktsiooni $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, kus $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{-1-x}}$ ja $f_2(x) = \ln x$, määramispiirkondade ühisosana ehk $X = X_1 \cap X_2$. Esimene funktsioon $f_1(x)$ on murd, murru nimetajas oleva ruutjuure alune avaldis peab olema rangelt positiivne (ei saa olla nulliga võrdne): $-1 - x > 0$ ehk $x < -1$, kust $X_1 = (-\infty, -1)$. Teine liidetav f_2 on määratud kui $x > 0$, kust $X_2 = (0, +\infty)$. Nüüd, arvutades $X = X_1 \cap X_2 = (-\infty, -1) \cap (0, +\infty)$, saame $X = \emptyset$. Seega ülesandes antud avaldis ei määra funktsiooni.



Näide 3: Leiame funktsioonide a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ja b) $f(x) = 2 + 3 \sin x$ muutumispiirkonnad.

Lahendus:

- a) Antud funktsiooni korral teame, et graafikuks on üles avanev parabool. Muutumispiirkonna leidmiseks arvutame parabooli haripunkti koordinaadid, $x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$ ja $y_0 = -4$, kust saame $Y = [-4, +\infty)$.
- b) Siinusfunktsiooni muutumispiirkonnaks on kõik väärtused, mis ei ole mooduli järgi suurem kui üks $|\sin x| \leq 1$ ehk $-1 \leq \sin x \leq 1$. Korrutades viimase võrratuse mõlemad pooli 3-ga ja liites nendele 2, saame $-1 \leq 2 + 3 \sin x \leq 5$. Seega muutumispiirkond on $Y = [-1, 5]$.

Näide 4:

- a) Olgu $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x(x + 1) - x$. Siis $f = g$.
- b) Olgu $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = [-1, 1]$, $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x^2$. Siis $f \neq g$.

Näide 5: Uurime, kas funktsioonid: a) $f(x) = |x| - e^{x^2}$, b) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ ja c) $f(x) = x^2 + 2x$ on paaris või paaritud.

Lahendus:

a) Asendades $x \mapsto -x$, saame

$$f(-x) = |-x| - e^{(-x)^2} = |x| - e^{x^2} = f(x).$$

Seega $f(x)$ on paarisfunktsioon.

b) Asendades $x \mapsto -x$, saame

$$f(-x) = \ln \frac{-x-1}{-x+1} = \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-1} = -\ln \frac{x-1}{x+1} = -f(x).$$

Järelikult funktsioon $f(x)$ on paaritu.

c) Asendades $x \mapsto -x$, saame

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x.$$

Seega $f(-x) \neq f(x)$ ja $f(-x) \neq -f(x)$, s.t. et antud funktsioon ei ole paaris ega ka paaritu.

Näide 6: Leiame funktsiooni $f(x) = 1 + \sin\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ perioodi.

Lahendus: Definiitsiooni järgi saame

$$1 + \sin\left(\frac{x+T}{3} + 1\right) = 1 + \sin\left(\frac{x}{3} + 1\right)$$

ehk

$$1 + \sin\left(\frac{x}{3} + 1 + \frac{T}{3}\right) = 1 + \sin\left(\frac{x}{3} + 1\right).$$

Lihtsustades ja tähistades $u := \frac{x}{3} + 1$, saame $\sin\left(u + \frac{T}{3}\right) = \sin u$. Kuna siinusfunktsiooni periood on 2π , siis $\frac{T}{3} = 2\pi$ ja $T = 6\pi$.

Näide 7: Olgu antud funktsioonid $f(x) = x^3 + x - 1$ ja $g(x) = x + 1$. Leiame funktsioonide kompositsiooni $f \circ g$ ja $g \circ f$.

Lahendus: Saame, et $f \circ g = f(g(x)) = (x+1)^3 + (x+1) - 1 = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ ja $g \circ f = g(f(x)) = x^3 + x$.

Näide 8: Leiame funktsiooni $y = \ln x$, $X = (0, +\infty)$ ja $Y = \mathbb{R}$ pöördfunktsiooni.

Lahendus: Antud funktsiooni pöördfunktsiooniks on $x = e^y$. Mugavuse pärast vahetame muutujaid ümber. Seega pöördfunktsioon on $y = e^x$, kusjuures määramis- ja muutumispiirkondadeks on nüüd vastavalt $\bar{X} = \mathbb{R}$ ja $\bar{Y} = (0, +\infty)$.

Ülesannetes 1.1-9 lahendada võrratus.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{1.1:} & x(x-2)(x-5) > 0 & \mathbf{1.2:} & 3x^2 - 5x - 2 < 0 & \mathbf{1.3:} & (x^2 - 16)(x-4)(2x-5)^3 < 0 \\
 \mathbf{1.4:} & \frac{(1-x)(x+5)}{x-10} \leq 0 & \mathbf{1.5:} & \frac{(x-5)(4-x)}{x^2-x-6} \leq 0 & \mathbf{1.6:} & \frac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(1-2x)(x^2+6x+9)(x-7)} \leq 0 \\
 \mathbf{1.7:} & \frac{x^3(x+3)^4(x^2+81)}{(x-3)(x+7)^5} \leq 0 & \mathbf{1.8:} & \frac{x^2(x^2+4x+4)(x^2+9)}{x-1} \geq 0 & \mathbf{1.9:} & |x+4| - |x+1| > 1
 \end{array}$$

Ülesannetes 1.10-21 leida funktsiooni määramispiirkond.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{1.10:} & y = \sqrt{x^2 + x - 2} & \mathbf{1.11:} & y = \ln(2x-1) + 2\ln(x+1) & \mathbf{1.12:} & y = \sqrt{x+4} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-9}} \\
 \mathbf{1.13:} & y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x} & \mathbf{1.14:} & y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2x^3}} - \sin x & \mathbf{1.15:} & y = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) \\
 \mathbf{1.16:} & y = \frac{x-1}{\cos 2x} & \mathbf{1.17:} & y = \arccos\left(\frac{2-x}{3}\right) + \sqrt{4-x} & \mathbf{1.18:} & y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2} \\
 \mathbf{1.19:} & y = \frac{e^{x-2}}{x-1} & \mathbf{1.20:} & y = \frac{\sin x}{\ln(2x+1)} + \sqrt{3-x} + \frac{5}{x+2} & \mathbf{1.21:} & y = \sqrt{\ln\left|\frac{2x-1}{1-x}\right|}
 \end{array}$$

Ülesannetes 1.22-25 leida funktsiooni muutumispiirkond.

$$\mathbf{1.22:} & y = x^2 - 8x + 13 & \mathbf{1.23:} & y = \sqrt{x+1} & \mathbf{1.24:} & y = |x| + 1 & \mathbf{1.25:} & y = e^{-x^2}$$

Ülesannetes 1.26-30 määrata, missugustes järgmistes paarides on funktsioonid f ja g samad ja missugustes on nad erinevad. Leida piirkonnad, milles antud funktsioonid ühtivad.

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{1.26:} & f(x) = x, g(x) = \frac{x^2}{x} \\
 \mathbf{1.27:} & f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2 \\
 \mathbf{1.28:} & f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2} \\
 \mathbf{1.29:} & f(x) = 3x^2, g(x) = 6\left(\frac{x^2+x}{2} - x\right) + 3x \\
 \mathbf{1.30:} & f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}, g(x) = \sqrt{x(x-1)}
 \end{array}$$

Ülesannetes 1.31-39 teha kindlaks, kas funktsioon on paaris või paaritu.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{1.31:} & y = 3x - x^3 & \mathbf{1.32:} & y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} & \mathbf{1.33:} & y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\
 \mathbf{1.34:} & y = |x+1| & \mathbf{1.35:} & y = x\sqrt{1-x^2} + \sin x & \mathbf{1.36:} & y = 2x^2 - \cos x + |x| \\
 \mathbf{1.37:} & y = \frac{16^x-1}{4^x} & \mathbf{1.38:} & y = x^4 \cos x + e^{x^2} & \mathbf{1.39:} & y = 2x + \sqrt[3]{x^2}
 \end{array}$$

Ülesannetes 1.40-45 leida funktsiooni periood.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{1.40:} & y = \cos \alpha x & \mathbf{1.41:} & y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x & \mathbf{1.42:} & y = \tan 3x + \cos 4x \\
 \mathbf{1.43:} & y = x - [x] & \mathbf{1.44:} & y = \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{3} - 2 \sin x & \mathbf{1.45:} & y = 2 \tan \frac{x}{2} - 3 \tan \frac{x}{3}
 \end{array}$$

1.46: Tõestada, et kui funktsiooni $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) korral on täidetud võrdus $f(x+T) = kf(x)$, kus k ja T on positiivsed konstandid, siis $f(x) = a^x \phi(x)$, kus a on konstant ja $\phi(x)$ on perioodiline funktsioon perioodiga T .

Ülesannetes 1.47-50 leida liitfunktsioonid.

1.47: $f \circ g$ ja $g \circ f$, kui $f(x) = 2^{x+1}$ ja $g(x) = \log_2 x^2$,

1.48: $f \circ g$ ja $g \circ f$, kui $f(x) = 1 + \log_3 x$ ja $g(x) = 3^{x+2}$,

1.49: $f \circ g$ ja $g \circ f$, kui $f(x) = \sqrt{\cos(x+1)}$ ja $g(x) = x^2 - 1$,

1.50: $f \circ g$ ja $g \circ f$, kui $f(x) = \ln(3x-1)$ ja $g(x) = e^x + \frac{1}{3}$.

1.51: Esitada liitfunktsioon $y = \sqrt[3]{\ln \cos^2 3x}$ lihtsamate funktsioonide kompositsiooni kaudu.

Ülesannetes 1.52-59 leida pöördfunktsiooni avaldis.

1.52: $y = 2x + 3$ **1.53:** $y = x^2 - 2x + 1$ **1.54:** $y = x^3 + 1$ **1.55:** $y = \frac{1-x}{1+x}$
1.56: $y = \sqrt[3]{2-x} + 1$ **1.57:** $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$ **1.58:** $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **1.59:** $y = a^{\sqrt{x}+1}$

1.60: Leida funktsiooni

$$y = \begin{cases} x, & \text{kui } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{kui } 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x, & \text{kui } 4 < x < +\infty \end{cases}$$

pöördfunktsioon $x = f^{-1}(y)$ ja tema määramispiirkond.