Eeskirja, mis seab sõltumatu muutuja igale väärtusele vastavusse sõltuva muutuja mingi ühe kindla väärtuse, nimetatakse **funktsiooniks.**

VÕRDELINE SÕLTUVUS

Kaht suurust, mille vastavate väärtuste suhe on jääv, nimetatakse **võrdelisteks suurusteks**. Seda jäävat suhet nimetatakse nende suuruste võrdeteguriks.

Võrdeliste suuruste vahelist sõltuvust nimetatakse **võrdeliseks sõltuvuseks**. Võrdelise sõltuvuse valem on $\boldsymbol{y = ax}$, kus a on antud arv.

Näide 1. Kujutame graafiliselt sõltuvuse $y = 1{,}5x$.
Näide 2. Kujutame graafiliselt sõltuvuse $y = -\,0{,}5x$.

Võrdelise sõltuvuse graafik on sirge ehk sirgjoon. Võrdelist sõltuvust $y = ax$ kujutav sirge läbib koordinaatide alguspunkti ja punkti $(1; a)$.

Kui võrdetegur on positiivne arv, siis võrdelist sõltuvust kujutav sirge asetseb koordinaatteljestiku esimeses ja kolmandas veerandis. kui võrdetegur on negatiivne arv, siis võrdelist sõltuvust kujutav sirge asetseb koordinaatteljestiku teises ja neljandas veerandis.

LINEAARFUNKTSIOON

Näide 1. Riigisisese postipaki saatmisel tuleb maksta 27 krooni tasu paki eest ja täiendavalt iga kilogrammi eest 3 krooni. Olgu x postipaki kaal kilogrammides ja y postipaki saatmise eest maksta tulev rahasumma. Suuruse y saab avaldada suuruse x kaudu järgmiselt:

$$y = 3x + 27.$$

Näide 2. Telefoni kõnealustustasu 2001. aasta suvel oli 48 senti. Eesti Telefoni võrgus oli riigisisese kõne minuti hind normaalajal 34 senti. Olgu u telefonikõne pikkus minutites ja v telefonikõne maksumus kroonides. Suuruse v saab avaldada suuruse u kaudu järgmiselt:

$$v = 0{,}34u + 0{,}48.$$

942. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on β ja alusnurk α. Kuidas avaldub tipunurk β alusnurga α kaudu?

943. Poest ostetud küünal on 25 cm pikkune. Igas tunnis põleb ära 4 cm pikkune osa küünlast. Missugune on küünla pikkus p pärast t tunnist põlemist?

Kõigil viimastes ülesannetes ja näidetes saadud valemitel on üks ja sama kuju

$$y = ax + b,$$

kus x ja y on kaks teineteisest sõltuvat suurust ning a ja b on kaks antud arvu.

Funktsiooni, mida saab esitada kujul $y = ax + b$ nimetatakse **lineaarfunktsiooniks ehk lineaarseks sõltuvuseks.**

Arv b on funktsiooni **algväärtus** (ehk **vabaliige**), s.t. see väärtus, mis vastab argumendi väärtusele 0. Arv a näitab, mille võrra muutub funktsioon, kui argument suureneb ühe võrra.

võrdeline sõltuvus on lineaarse sõltuvuse erijuhtum.

Näide 1. Joonestame funktsiooni $y = 0{,}5x + 2$ graafiku.

Näide 2. Joonestame funktsiooni $y = -1{,}5x - 3$ graafiku. Selleks joonestame võrdelise seose $y = -1{,}5x$ graafiku ja nihutame seda kolme ühiku võrra allapoole.

Lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ graafikuks on sirge, mis on paralleelne võrdelist sõltuvust $y = ax$ kujutava sirgega ja lõikub y-teljega punktis, mille ordinaat (algordinaat) on b.

Lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ graafikuks on sirge, mis lõikub y-teljega punktis $(0; b)$ ja läbib punkti $(1; a + b)$.

Arv b on funktsiooni algväärtus (ehk tema graafiku algordinaat), s.t. see väärtus, mis vastab argumendi väärtusele 0.

Algordinaat *b* näitab, millises punktis funktsiooni graafik lõikub *y*-teljega.

Arv a näitab, mille võrra muutub funktsiooni väärtus siis, kui argument kasvab ühe ühiku võrra. Seepärast nimetakse arvu a ka sirge $y = ax + b$ **tõusuks**.

Sirge tõus näitab, kui palju muutub sirgel oleva punkti ordinaat siis, kui abstsiss kasvab ühe ühiku võrra.

PÖÖRDVÕRDELINE SÕLTUVUS

Suurusi, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv, nimetatakse **pöördvõrdelisteks suurusteks.**

Pöördvõrdeliste suuruste vahelist sõltuvust nimetatakse **pöördvõrdeliseks sõltuvuseks**. Sellise sõltuvusega määratud funktsiooni võib esitada valemiga

$\boldsymbol{y = \frac{a}{x}}$, kus a on antud arv.

Näide 1. Kujutame graafiliselt pöördvõrdelist sõltuvust $y = \frac{4}{x}$, andes x-le täisarvulisi väärtusi –8-st kuni +8-ni. Et x-le ei saa anda väärtust 0 (sest nulliga jagada ei saa), siis anname x-le väärtused selle koha ümbruses (–0,5; –0,25; 0,25 ja 0,5).

Näide 2. Kujutame eelmise näite eeskujul graafiliselt sõltuvust $y = -\frac{6}{x}$, andes x-le täisarvulised väärtused –6-st kuni +6-ni.

Pöörvõrdelise sõltuvuse $y = \frac{a}{x}$ graafikut nimetatakse hüperbooliks.

Kui $a > 0$, siis asetsevad hüperbooli harud I ja III veerandis.
Kui $a < 0$, siis asetsevad hüperbooli harud II ja IV veerandis.

FUNKTSIOON $y = x^2$

85. Koosta x ja x^2 vastavate väärtuste tabel:

x	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
x^2													

Selgita tabeli andmete põhjal, mitu korda suureneb x^2, kui arvu x suurendada 2 korda, 3 korda, 4 korda, 5 korda, 10 korda, 100 korda.

Mitu korda väheneb x^2, kui arvu x vähendada 2 korda, 3 korda, 4 korda, 5 korda, 10 korda?

Üldiselt võib väita: **kui positiivset arvu suurendada k korda, siis arvu ruut suureneb k^2 korda.**

86. Skitseeri funktsiooni $y = x^2$ graafik, täites eelnevalt alljärgneva tabeli.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,8	-0,4	0	0,4	0,8	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$															

Funktsiooni $y = x^2$ graafikut nimetatakse **parabooliks**. Jooniselt näeme, et joon, mis on funktsiooni $y = x^2$ graafikuks, on sümmeetriline y-telje suhtes.

Sümmeetrilisus järeldub ka sellest, et abstsissidele $-x$ ja x vastavad ordinaadid on võrdsed, sest $(-x)^2 = x^2$.

Parabooli sümmeetriatelge nimetatakse lühidalt **parabooli teljeks**. Parabooli ja tema telje ühist punkti nimetatakse **parabooli haripunktiks.**

Parabooli $y = x^2$ haripunkti koordinaadid on (0; 0).

FUNKTSIOON $y = ax^2$

111. Teame, et kui kuubi serva pikkus on a cm, siis kuubi täispindala on kuubi kuue tahu pindalade summa, seega $S = 6a^2$. Täida tabel.

kuubi serva pikkus x (cm)	1	2	3	4	5	6
kuubi pindala S (cm^2)						

112. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatet on b cm. Avalda kolmnurga pindala S kaateti kaudu. Täida tabel.

kaatet b (cm)	0,5	1	2	3	4	5	8	10
pindala S (cm^2)								

113. Kui ringi raadius on r, siis ringi pindala esitub kujul $S = \pi r^2$. Täida tabel.

ringi raadius r (cm)	0	1	2	3	4	5	6
ringi pindala S (cm^2)		π					

Valemi $y = ax^2$ põhjal vastab igale muutuja x väärtusele üks kindel muutuja y väärtus. Seost kujul $y = ax^2$ nimetatakse **ruutfunktsiooniks $y = ax^2$**.

See, missugune on funktsiooni $y = ax^2$ graafik, sõltub arvu a valikust. Skitseerime kõigepealt ühte teljestikku funktsioonide $y = x^2$ ja $y = 2x^2$ graafikud.

Teeme vastava tabeli

x	–2	–1,5	–1	–0,8	–0,5	–0,3	0	0,3	0,5	0,8	1	1,5	2
$y = x^2$	4	2,25	1	0,64	0,25	0,09	0	0,09	0,25	0,64	1	2,25	4
$y = 2x^2$	8	5	2	1,28	0,5	0,18	0	0,18	0,5	1,28	2	4,5	8

Paneme tähele, et funktsiooni $y = 2x^2$ väärtused on kaks korda suuremad funktsiooni $y = x^2$ vastavatest väärtustest.

Kandes need väärtused joonisele, saame kaks graafikut, funktsioonide $y = x^2$ ja $y = 2x^2$ graafikud. Mõlema parabooli teljeks on y-telg ja haripunktiks on koordinaatide alguspunkt. Parabool $y = 2x^2$ on kitsam kui parabool $y = x^2$.

Selleks, et paremini mõista, kuidas kordaja a väärtus mõjutab parabooli asendit ja kuju, skitseerime samale joonisele ka funktsiooni $y = 0{,}5x^2$ graafiku.

Funktsiooni $y = ax^2$ graafik on parabool, mis on sümmeetriline y-telje suhtes ja mille haripunkt on punktis (0; 0). Kui $a > 0$, siis parabool avaneb ülespoole, kui $a < 0$, siis allapoole.

Funktsioonide $y = ax^2$ ja $y = -ax^2$ graafikud on sümmeetrilised teineteisega x-telje suhtes. Mida suurem on a absoluutväärtus, seda kitsam on parabool.

Vaadeldes funktsioone $y = x^2$ ja $y = ax^2$, näeme, et teise funktsiooni graafiku y–koordinaadid saadakse esimese funktsiooni graafiku y–koordinaatidest, korrutades neid ühe ja sama teguriga a. Sellepärast nimetame funktsiooni $y = x^2$ graafikut **põhiparabooliks**. Põhiparabooli ning paraboolide $y = 2x^2$ ja $y = 0{,}5x^2$ sageda esinemise tõttu tasub nende joonestamiseks valmistada papist või õhukesest plastmassist šabloonid.

FUNKTSIOON $y = ax^2 + c$

Joonestame ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y = 0{,}5x^2$, $y = 0{,}5x^2 + 2$ ja $y = 0{,}5x^2 - 2$ graafikud.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y=0{,}5x^2$	4,5	3,125	2	1,125	0,5	0,125	0	0,125	0,5	1,125	2	3,125	4,5
$y=0{,}5x^2+2$	6,5	5,125	4	3,125	2,5	2,125	2	2,125	2,5	3,125	4	5,125	6,5
$y=0{,}5x^2-2$	2,5	1,125	0	–0,875	–1,5	–1,875	–2	–1,875	–1,5	–0,875	0	1,125	2,5

Funktsiooni $y = ax^2 + c$ graafikuks on parabool, mis on sümmeetriline y-telje suhtes. Selle parabooli haripunkt on punktis $(0; c)$.

Kui $a > 0$, siis parabool avaneb ülespoole, kui $a < 0$, siis allapoole.

Funktsiooni $y = ax^2 + c$ graafik saadakse funktsiooni $y = ax^2$ graafikust lükkel c ühikut ülespoole, kui $c > 0$ ja $|c|$ ühikut allapoole, kui $c < 0$.

Muutuja x-i neid väärtusi, mille korral funktsiooni väärtus y on null, nimetatakse **funktsiooni nullkohtadeks.** Nullkohas funktsiooni graafik lõikab x-telge või puutub sellega.

FUNKTSIOON $y = ax^2 + bx$

150. Hulknurgal on x külge. Mitu diagonaali tal on?

151. Tasapinnal on x sirget, millest ükski paar ei ole paralleelsed ja ükski kolmik ei lõiku ühes punktis. Kui suur on nende sirgete lõikepunktide arv y?

152. Presidendi vastuvõtul on x diplomaati. Nad peavad kõik üksteist kättpidi tervitama. Leia kätlemiste arv y.

153. Maleturniirist võttis osa x maletajat. Iga maletaja mängis iga osavõtjaga ühe partii. Kui suur oli mängitud partiide arv y? Mille poolest on see ülesanne sarnane kahele eelmisele ülesandele, mille poolest erineb?

Nelja viimase ülesande vastus avaldub valemina, millel on kuju $y = ax^2 + bx$, kus a ja b on antud arvud ning $a \neq 0$.

See valem esitab ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx$. Selgitamaks, kuidas paikneb teljestikus funktsiooni $y = ax^2 + bx$ graafik, joonistame ühes teljestikus funktsioonide $y = 0{,}5x^2$ ja $y = 0{,}5x^2 - x$ graafikud.

x	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$y=0{,}5x^2$	3,125	2	1,125	0,5	0,125	0	0,125	0,5	1,125	2	3,125	4,5	6,125	8
$y=0{,}5x^2-x$	5,625	4	2,625	1,5	0,625	0	–0,375	–0,5	–0,375	0	0,625	1,5	2,625	4

Paneme tähele, et kui $x = 0$, siis ka $y = 0{,}5x^2 - x = 0$.

Osutub, et ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx$ üheks nullkohaks on alati $x = 0$, sest kui $x = 0$, siis võrdub nulliga ka avaldis $ax^2 + bx$ ehk y.

Joonestame funktsioonide $y = 0{,}5x^2$ ja $y = 0{,}5x^2 - x$ graafikud.

Paraboolid $y = -x^2 - 4x$ ja $y = -x^2$ on ühesuguse kujuga ja neid saab nihutada teineteise peale nii, et nad kattuvad. Üldiselt võib öelda, et

ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx$ graafik on parabool, millel on samasugune kuju kui paraboolil $y = ax^2$. Funktsiooni $y = ax^2 + bx$ graafik läbib koordinaatide alguspunkti.

Saab näidata, et parabooli $y = ax^2 + bx$ teljeks on sirge $x = -\dfrac{b}{2a}$.

FUNKTSIOON $y = ax^2 + bx + c$ JA SELLE GRAAFIK

Ristkülikukujulisest papitükist, mille mõõtmed on 3 dm ja 5 dm, tuleb valmistada ilma kaaneta karp. Selleks lõigatakse papitüki nurkadest ära võrdsed ruudud ja murtakse servad üles. Leiame avaldise, mille abil saab arvutada karbi põhja pindala.

Funktsioon $y = ax^2 + bx + c$ on **üldkujuline ruutfunktsioon**. Selle võrduse paremal poolel olevat summat $ax^2 + bx + c$ nimetatakse **ruutkolmliikmeks**. Siin ax^2 on **ruutliige**, bx on **lineaarliige** ja c on **vabaliige.** Arvu a nimetatakse ka **ruutliikme kordajaks** ja arvu b nimetatakse **lineaarliikme kordajaks**.

Selleks, et selgitada, milline on ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafik, joonestame ühes teljestikus funktsioonide $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ ja $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ graafikud.

Teeme tabeli. Paneme tähele, et funktsiooni $y = 0{,}5x^2 - x + 2$ väärtused saame, kui liidame funktsiooni $y = 0{,}5x^2 - x$ vastavatele väärtustele arvu 2.

x	–3	–2	–1	0	0,5	1	1,5	2	3	4
$0{,}5x^2$	4,5	2	0,5	0	0,125	0,5	1,125	2	4,5	8
$y=0{,}5x^2-x$	7,5	4	1,5	0	–0,375	–0,5	–0,375	0	1,5	4
$y=0{,}5x^2-x+2$	9,5	6	3,5	2	1,625	1,5	1,625	2	3,5	6

Võrreldes funktsioonide $y = 0{,}5x^2 - x$ ja $y = 0{,}5x^2 - x + 2$ graafikuid näeme, et neil paraboolidel on ühesugune kuju ja funktsiooni $y = 0{,}5x^2 - x + 2$ graafiku saamiseks tuleb funktsiooni $y = 0{,}5x^2 - x$ graafikut nihutada kahe ühiku võrra ülespoole.

Joonestame ühte ja samasse teljestikku funktsioonide $y = -x^2 - 2x$ ja $y = -x^2 - 2x - 3$ graafikud. Teeme tabeli.

Võrreldes funktsioonide $y = -x^2 - 2x$ ja $y = -x^2 - 2x - 3$ graafikuid näeme, et neil paraboolidel on ühesugune kuju ja funktsiooni $y = -x^2 - 2x - 3$ graafiku saamiseks tuleb funktsiooni $y = -x^2 - 2x$ graafikut nihutada kolme ühiku võrra allapoole.
Üldiselt võib öelda, et

Funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafikuks on parabool, mis saadakse funktsiooni $y = ax^2 + bx$ graafikust lükkel c ühiku võrra ülespoole, kui $c > 0$ ja $|c|$ ühiku võrra allapoole, kui $c < 0$. See parabool lõikab y –telge punktis $(0; c)$.

Parabooli $y = ax^2 + bx + c$ teljeks on sirge $x = -\frac{b}{2a}$.

Ühesuguse a väärtuse korral on ruutfunktsioonide
$y = ax^2$,
$y = ax^2 + c$,
$y = ax^2 + bx$ ja
$y = ax^2 + bx + c$
graafikud ühesuguse kujuga paraboolid, mis erinevad ainult oma asendilt koordinaatteljestikus.
Võib öelda, et:

funktsioon $y = ax^2 + bx$ *on funktsiooni* $y = ax^2 + bx + c$ *erijuhtum, kui* $c = 0$;
funktsioon $y = ax^2 + c$ *on funktsiooni* $y = ax^2 + bx + c$ *erijuhtum, kui* $b = 0$;
funktsioon $y = ax^2$ *on funktsiooni* $y = ax^2 + bx + c$ *erijuhtum, kui* $b = 0$ *ja* $c = 0$.

RUUTVÕRRANDI GRAAFILINE LAHENDAMINE

Skitseerime ruutfunktsiooni $y = 2x^2 - 4x - 6$ graafiku. Graafikult näeme, et ruutfunktsiooni nullkohad on –1 ja 3.

Seega on ka ruutvõrrandi $2x^2 - 4x - 6 = 0$ lahenditeks $x_1 = -1$ ja $x_2 = 3$.

Et ruutfunktsiooni graafikuks olev parabool saab lõikuda x-teljega kahes punktis, puutuda x-telge ühes punktis või mitte lõikuda x-teljega, siis vastaval ruutvõrrandil on kas kaks lahendit, üks lahend või lahendid puuduvad.

Et ruutvõrrandile vastava ruutfunktsiooni skitseerimine on küllaltki aeganõudev ja ebatäpne, siis seda meetodit kasutatakse võrrandi lahendite leidmisel harva.

Ruutvõrrandi graafiliseks lahendamiseks kasutatakse tihti järgmist meetodit. Lahendame näiteks võrrandi $2x^2 - 4x - 6 = 0$.

Taandame võrrandit ruutliikme kordajaga, s.o. jagame kõik liikmed 2-ga, saame

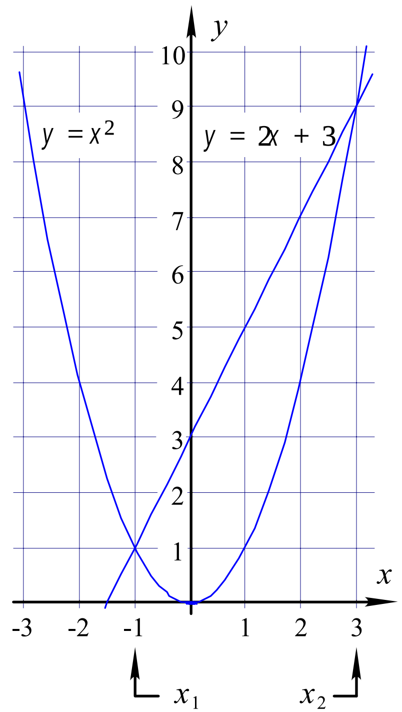
$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Viime liikmed, mis ei sisalda tundmatu ruutu, paremale poolele, saame

$$x^2 = 2x + 3.$$

Nüüd on antud võrrandi lahendamine taandunud niisuguste x-i väärtuste leidmisele, millede korral funktsioonide $y = x^2$ ja $y = 2x + 3$ väärtused on võrdsed.

Esimese funktsiooni graafikuks on põhiparabool, mille joonestamine on kerge (eriti veel siis, kui selleks on valmistatud šabloon); teine on lineaarfunktsioon, selle graafikuks on sirge. Joonestades mõlemad graafikud ühes teljestikus, leiame, missugustel x-i väärtustel funktsioonide väärtused on võrdsed, s.t. leiame nende graafikute lõikepunktide x- koordinaadid.



Lõikepunktide x-koordinaadid on
$x_1 = -1$ ja $x_2 = 3$.
Need ongi antud võrrandi lahendid.

Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendamisel:

1) taandame ruutvõrrandit ruutliikme kordajaga a, saades n.n. taandatud ruutvõrrandi:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

2) viime lineaarliikme ja vabaliikme paremale poolele:

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a},$$

3) leiame funktsioonide $y = x^2$ ja $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ graafikute lõikepunktide x-koordinaadid, mis ongi antud võrrandi lahendid.

Kui sirge puudutab parabooli, siis on tegemist kokkulangenud lõikepunktidega. Sel korral $x_1 = x_2$, s.t. antud ruutvõrrandi lahendid on võrdsed.

Kui sirge ja parabool ei lõiku, siis antud ruutvõrrandil lahendid puuduvad.