RUUTVÕRRANDI GRAAFILINE LAHENDAMINE

Skitseerime ruutfunktsiooni $y = 2x^2 - 4x - 6$ graafiku. Graafikult näeme, et ruutfunktsiooni nullkohad on –1 ja 3.

Seega on ka ruutvõrrandi $2x^2 - 4x - 6 = 0$ lahenditeks $x_1 = -1$ ja $x_2 = 3$.

Et ruutfunktsiooni graafikuks olev parabool saab lõikuda x-teljega kahes punktis, puutuda x-telge ühes punktis või mitte lõikuda x-teljega, siis vastaval ruutvõrrandil on kas kaks lahendit, üks lahend või lahendid puuduvad.

Et ruutvõrrandile vastava ruutfunktsiooni skitseerimine on küllaltki aeganõudev ja ebatäpne, siis seda meetodit kasutatakse võrrandi lahendite leidmisel harva.

Ruutvõrrandi graafiliseks lahendamiseks kasutatakse tihti järgmist meetodit. Lahendame näiteks võrrandi $2x^2 - 4x - 6 = 0$.

Taandame võrrandit ruutliikme kordajaga, s.o. jagame kõik liikmed 2-ga, saame

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Viime liikmed, mis ei sisalda tundmatu ruutu, paremale poolele, saame

$$x^2 = 2x + 3.$$

Nüüd on antud võrrandi lahendamine taandunud niisuguste x-i väärtuste leidmisele, millede korral funktsioonide $y = x^2$ ja $y = 2x + 3$ väärtused on võrdsed.

Esimese funktsiooni graafikuks on põhiparabool, mille joonestamine on kerge (eriti veel siis, kui selleks on valmistatud šabloon); teine on lineaarfunktsioon, selle graafikuks on sirge. Joonestades mõlemad graafikud ühes teljestikus, leiame, missugustel x-i väärtustel funktsioonide väärtused on võrdsed, s.t. leiame nende graafikute lõikepunktide x- koordinaadid.

Lõikepunktide x-koordinaadid on $x_1 = -1$ ja $x_2 = 3$.

Need ongi antud võrrandi lahendid.

Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendamisel:

1) taandame ruutvõrrandit ruutliikme kordajaga a, saades n.n. taandatud ruutvõrrandi:

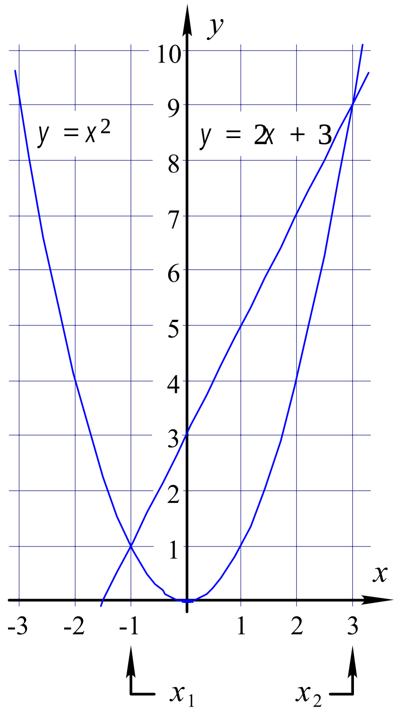
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

2) viime lineaarliikme ja vabaliikme paremale poolele:

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a},$$

3) leiame funktsioonide $y = x^2$ ja $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ graafikute lõikepunktide x-koordinaadid, mis ongi antud võrrandi lahendid.

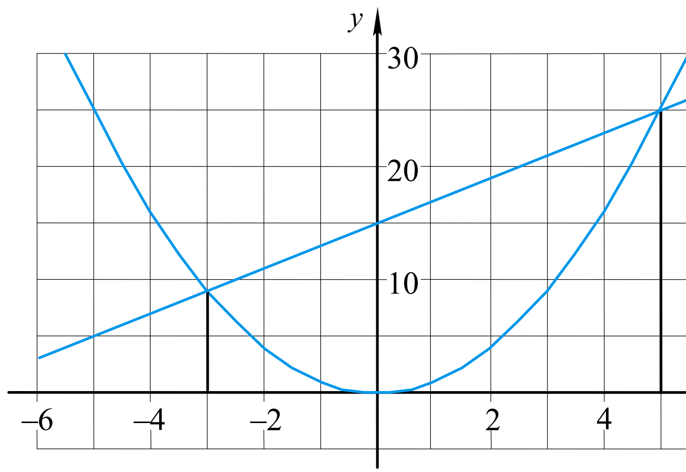
Kui sirge puudutab parabooli, siis on tegemist kokkulangenud lõikepunktidega. Sel korral $x_1 = x_2$, s.t. antud ruutvõrrandi lahendid on võrdsed.



Kui sirge ja parabool ei lõiku, siis antud ruutvõrrandil lahendid puuduvad.

1247. „Korrutamismasin”: joonesta millimeetripaberile parabool $y = x^2$.

Olgu antud positiivsed arvud a ja b. Märgime paraboolil ära need punktid, mille x-koordinaadid võrduvad arvudega $(-a)$ ja b. Ühendame need punktid sirgjoonega. See sirgjoon lõikab y-telge punktis $(0; ab)$. Seega, selle sirge algordinaat ongi arvude a ja b korrutis. Selle tõestamiseks leia sellise sirge võrrand, mis läbib punkte $(-a; a^2)$ ja $(b; b^2)$.



TAANDATUD RUUTVÕRRANDI LAHENDAMINE

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi võib sõnastada nii:

taandatud ruutvõrrandi lahendeiks on pool lineaarliikme kordaja vastandarvust ± ruutjuur selle poole kordaja ruudu ja vabaliikme vahest.

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub lineaarliikme kordaja vastandarvuga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega.

Kehtib ka Viète'i'i teoreemi pöördteoreem:

Kui kahe arvu x_1 ja x_2 summa on $-p$ ja korrutis q, siis need arvud x_1 ja x_2 on taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid.

Viète'i teoreemi pöördteoreemi abil saab koostada ruutvõrrandit antud lahendite järgi.

Näide 1. Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on –5 ja 8. Lahendite summa on $-5 + 8 = 3$. Lahendite korrutis on $(-5)\cdot 8 = -40$. Otsitav ruutvõrrand on seega $x^2 - 3x - 40 = 0$.

Viète'i valemite abil saab ruutvõrrandeid lahendada peast.

Näide 2. Lahendame peast ruutvõrrandi $x^2 + 10x + 21 = 0$.

Näide 3. Lahendame võrrandisüsteemi $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -45. \end{cases}$

$\boxed{236.}$ Missuguse p väärtuse puhul on ruutvõrrandi $x^2 + px + 25 = 0$ lahendid võrdsed?

$\boxed{237.}$ Olgu x_1 ja x_2 taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid.

Tõesta, et $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$.

243. Missuguse c väärtuse puhul on ruutvõrrandi $x^2 - 7x + c = 0$ lahendiks 2?

244. Missuguste a ja b väärtuste puhul on ruutvõrrandi $ax^2 + bx - 30 = 0$ lahenditeks 3 ja –5?

245. Olgu a Sinu eesnime tähtede arv, b Sinu perekonnanime tähtede arv. Lahenda ruutvõrrand $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.

246. Olgu c Sinu sünnikuud tähistav arv, d Sinu sünnipäeva viimane number. Lahenda ruutvõrrand $(c + d)^2x^2 - 4c(c + d)x + 4c^2 - 1 = 0$.

RUUTVÕRRANDI DISKRIMINANT

Selleks et otsustada, kui mitu lahendit on ruutvõrrandil, ei ole vaja ruutvõrrandit lahendada. Piisab sellest, kui määrata ruutvõrrandi lahendivalemis juuremärgi alla jääva avaldise märk.

Seda ruutvõrrandi juuremärgi alust avaldist nimetatakse diskriminandiks[1].
Nii nimetatakse avaldist

$$D = b^2 - 4ac$$

taandamata ruutvõrrandi diskriminandiks, avaldist

$$d = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

nimetatakse aga **taandatud ruutvõrrandi diskriminandiks**.

Kui diskriminant on negatiivne, siis ruutjuurt leida ei saa ja ruutvõrrandil ei ole lahendeid[2].

Kui diskriminant on null, siis ruutjuur võrdub nulliga ja ruutvõrrandil on üks lahend (öeldakse ka, et ruutvõrrandil on kaks võrdset lahendit).

Kui diskriminant on positiivne, siis me saame ruutvõrrandile kaks erinevat lahendit.

250. Võrrandis $ax^2 + bx + c = 0$ on a ja c erimärgilised. Tõesta, et ruutvõrrandil on kaks erinevat lahendit.

251. Näita, et võrrandil $x^2 + (a + 1)x + a = 0$ on a iga väärtuse puhul lahendid olemas.

$\boxed{252.}$ Näita, et võrrandil $x^2 + (t + 5)x + (t + 2) = 0$ on t iga väärtuse puhul kaks reaalarvulist lahendit.

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Taandatud ruutkolmliige lahutub tegureiks kujul $(x - x_1)(x - x_2)$, kus x_1 ja x_2 on selle ruutkolmliikme nullkohad.

Kui võrrandil $x^2 + px + q = 0$ lahendid puuduvad, siis see tähendab, et ei leidu kaht niisugust arvu x_1 ja x_2, mille korrutis oleks q ja summa $-p$. Järelikult pole antud ruutkolmliige esitatav kahe lineaarse kaksliikme korrutisena.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ruutkolmliige $ax^2 + bx + c$ lahutub tegureiks kujul $a(x - x_1)(x - x_2)$, kus x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid.

[1] *diskriminare* - lad. k. eraldama, eristama, lahutama.
[2] See tähendab, et ruutvõrrandil ei ole reaalarvulisi lahendeid. On nimelt olemas teatav *kompleksarvude* hulk, milles ka sellel võrrandil on 2 lahendit.

Kui võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid puuduvad, siis ruutkolmliiget $ax^2 + bx + c$ ei saa lahutada lineaarsete tegurite korrutiseks.

258. Missuguse p väärtuse puhul on ruutkolmliikme $x^2 + px - 15$ teguriks $x - 3$?

Leia ka teine tegur.

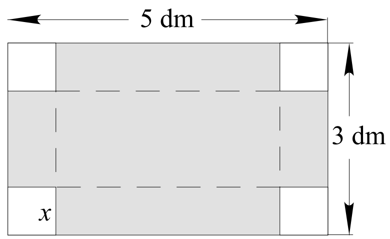
259. Missuguse q väärtuse puhul on ruutkolmliikme $x^2 - 5x + q$ teguriks $x + 3$?

Leia ka teine tegur.

Näide 3. Ristkülikukujulisest papitükist, mille mõõtmed on 3 dm ja 5 dm, tuleb valmistada ilma kaaneta karp. Selleks lõigatakse papitüki nurkadest ära võrdsed ruudud ja murtakse servad üles. Saadava karbi põhja pindala on 8 dm^2. Kui pikad on äralõigatavate ruutude küljed?

Tähistame äralõigatava ruudu külje pikkust x-ga.

Põhja lühema serva pikkus on $(3 - 2x)$ dm, põhja pikema serva pikkus aga $(5 - 2x)$ dm.



Seega on karbi põhja pindala

$S = (3 - 2x)\,(5 - 2x)$ dm^2.

Et ülesande tingimuste põhjal on karbi põhja pindala on 8 dm^2, siis saame võrrandi

$$(3 - 2x)\,(5 - 2x) = 8.$$

295. Ruudukujulise metallplaadi nurkadest lõigatakse ära ruudukujulised tükid, mille külje pikkus on 4 cm. Seejärel painutatakse servad üles ja saadakse karp, mille ruumala on 324 cm^3. Millised olid metallplaadi mõõtmed?

296. Ruudukujulise metallplaadi nurkadest lõigatakse ära ruudukujulised tükid, mille külje pikkus on 3 cm. Seejärel painutatakse servad üles ja saadakse karp, mille täispindala on 288 cm^2. Millised olid metallplaadi mõõtmed?

300. Presidendi vastuvõtutoa mõõtmed on 10 m × 12 m. Toa põrandal on ristkülikukujuline vaip, mis on igast toa seinast ühel kaugusel. Vaiba pindala on kaks kolmandikku toa pindalast. Kui kaugel on vaiba servad toa seintest?

301. Sealauda aknal on klaas mõõtmetega 20 cm × 30 cm. Klaasi ümber on aknaraam, mis on tehtud nii, et klaas on igast küljest aknalengist ühel kaugusel. Kui paks on aknaraam, kui teada on, et klaasi pindala on aknaava pindalast pool?

302. Keisrihärra pilt, mille mõõtmed on 80 cm ja 120 cm tahetakse ümbritseda kullatud raamiga. Kulda raami kuldamiseks jätkub 0,70 m^2 jaoks. Kui lai võib olla raam?

ARITMEETILINE JA ALGEBRALINE RUUTJUUR

Ruutjuureks arvust *a* nimetatakse niisugust arvu, mille ruut võrdub arvuga *a*.

Nii on ruutjuur 49-st arv 7 ja samuti ka arv –7, sest $7^2 = 49$ ja $(-7)^2 = 49$.

Selliseid olukordi, kus kahest ruutjuure väärtusest läheb vaja ainult ühte (positiivset) tuleb aritmeetikas ja planimeetrias ette küllalt tihti. Seetõttu on sellele ruutjuure väärtusele, mis ei ole negatiivne, antud ka *aritmeetilise juure* nimetus.

Aritmeetiliseks ruutjuureks nimetatakse niisugust mittenegatiivset arvu, mille ruut võrdub antud arvuga.

Nii on aritmeetiline ruutjuur 49-st 7, aga ei ole – 7, aritmeetiline ruutjuur 225-st on 15, aga ei ole – 15.

Seevastu algebras, *võrrandite lahendamisel* läheb enamasti vaja ruutjuure mõlemat (nii positiivset kui ka negatiivset) väärtust.

Seetõttu nimetatakse meie poolt eelmisel leheküljel defineeritud ruutjuurt ka **algebraliseks ruutjuureks**.

Kahjuks tähistatakse nii aritmeetilist ruutjuurt kui ka algebralist ruutjuurt sageli ühe ja sama sümboliga (kuigi algebralise ruutjuure jaoks kasutatakse ka kirjutusviisi $\pm\sqrt{\ }$). Meelde tuleks jätta järgmine põhimõte: arvutamisel, s.o. aritmeetikas kasutatakse ennekõike aritmeetilist ruutjuurt; võrrandite lahendamisel s.o. algebras kasutatakse peamiselt algebralist ruutjuurt.

Märkus. Paraku ei erista mitmed kooliõpikud ja teatmikud aritmeetilist ja algebralist ruutjuurt, vaid nimetavad ruutjuureks ainult aritmeetilist ruutjuurt. Seetõttu tuleb definitsioonide meeldejätmisel olla tähelepanelik.

Algebralisel ruutjuurel on kaks väärtust, mis on vastandmärkidega ja ühesuguste absoluutväärtustega.

Nii on algebraline ruutjuur 25-st võrdne nii 5 -ga kui ka –5 -ga, sest $5^2 = 25$ ja $(-5)^2 = 25$. Algebralise juure kaht väärtust märgitakse harilikult kahe märgi paigutamisega aritmeetilise juure ette; nii jääb juure tähis siis ainult ühe väärtuse, nimelt aritmeetilise juure sümboliks.

Seega tingimust $x^2 = 25$ täidab algebraline juur $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$.

Taskuarvutil oleva klahvi $\boxed{\sqrt{\ }}$ abil leitakse ainult aritmeetilisi juuri.