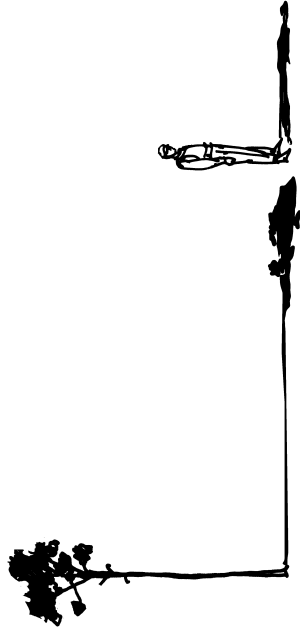


PIKKUSTE KAUDNE MÕÕTMINE

Selleks, et määrata kasvava puu kõrgust, ei ole vaja seda puud maha saagida, ega puu otsa ronida. Selleks, et määrata jõe laiust ei lähe vaja mitmekümne meetri pikkust mõõdulinti. Ka pole tarvis ujuda üle jõe, sest jõe laiust saab küllalt täpselt mõõta ka ilma jõe teisele kaldale minemata.

Näide 1. Koolimaja ees lagendikul kasvab üksik mänd. Matemaatika õpetaja andis õpilastele koolivaheajaks ülesande - mõõta ära selle männi kõrgus.

Jaak valis puu kõrguse mõõtmiseks ilusa päikesepaistelise päeva. Ta mõõtis ära iseenda varju pikkuse ja männi varju pikkuse. Puu jättis 40 m pikkuse varju, Jaagu vari oli aga 4,5 m pikkune. Oma täpset pikkust Jaak teadis - 180 cm.



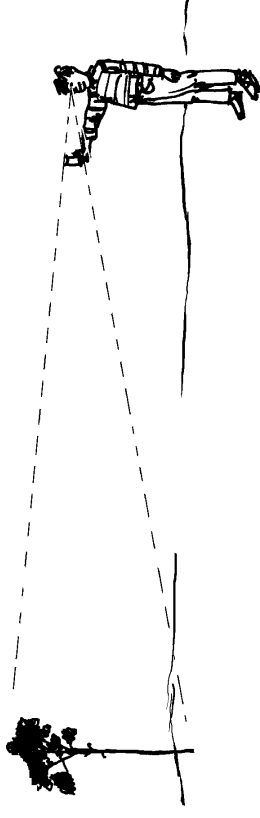
Edasiste arvutuste aluseks võttis poiss oletuse, et puu kõrgus on nii mitu korda suurem Jaagu pikkusest, kui mitu korda on puu varju pikkus suurem Jaagu varju pikkusest. Tähistanud puu kõrguse x -ga, sai Jaak võrde

$$\frac{x}{1,8} = \frac{40}{4,5}.$$

Siit sai Jaak, et $x = \frac{1,8 \cdot 40}{4,5} = 16$ m.

Põhjenda kiirteteoreemi abil, et Jaagu oletus ja arvutused on tõesed.

Kui Joonas mõõtis puu kõrgust, siis juhtus päev olema sombune ja varjude pikkusi mõõta ei saanud. Joonas teadis, et kui nurga haarasid lõigata paralleelsete sirgetega, siis on paralleelsetel sirgetel tekkinud lõigud võrdelised nurga haaradel tekkinud lõikudega. Nurga tipuks valis Joonas oma silma, pikemaks paralleelseks lõikajaks otsustas võtta männi. Aga mis võtta lühemaks lõikajaks? Taskus olid ainult taskupeegel ja telefonikaart. Joonas läks puust nii kaugemale, et mänd ja väljasirutatud käes olev telefonikaart paistaksid ta silmast ühesuurse nurga all (telefonikaardi pikem külj kataks männi pikkuse). Joonas mõõtis oma kauguse puust. Sai 150 sammu.



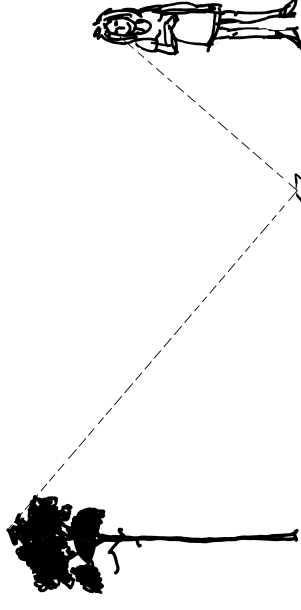
Kodus mõõtis Joonas oma keskmise sammu pikkuse - sai 90 cm. Seega oli Joonas mõõtmishetkel puust umbes $0,9 \cdot 150 = 135$ m kaugusel. Telefonikaardi pikkuse mõõtmine oli millimeeterjoonlaua abil lihtne. Tulemus oli 85 mm. Selleks et hinnata, kui kaugel silmast on väljasirutatud käes olev telefonikaart, tuli appi vanem õde mõõdulindiga. Ilmnes, et see kaugus on umbes 70 cm.

Kiirteteoreemi abil koostas Joonas võrde

$$\frac{x}{0,085} = \frac{135}{0,7}. \text{ Siit sai Joonas, et } x = \frac{0,085 \cdot 135}{0,7} \approx 16 \text{ m.}$$

Kui õpilased tunnis erinevaid lahendusi arutasid, siis küsis Miina Joonaselt: "Miks Sa telefonikaardi asemel peeglit ei kasutanud?" - "Et telefonikaart on peeglist pikem, siis oleksin ma mõõtmiseks pidanud puust veel kaugemale minema", vastas Joonas. "Sugugi mitte, peegli abil on mõõtmine hoopis lihtsam ja täpsem", vastas Miina.

Miina asetask peegli puust 20 meetri kaugusel maha ja läks niisugusesse punkti, millest ta nägi peeglist puu latva. Ilmnes, et siis olid Miina jalad peeglist 180 cm kaugusel.



Et valguse langemisnurk võrdub peegeldumisenurgaga, siis tekkis kaks samast täisnurket kolmnurka. Et Miina on 154 cm pikkune ja ta silmad on pealaest umbes 10 cm madalamal, siis sai Miina võrde

$$\frac{x}{1,44} = \frac{20}{1,8}. \text{ Siit } x = \frac{1,44 \cdot 20}{1,8} = 16 \text{ m.}$$

Näide 2. Järgmiseks matemaatikatunniks andis õpetaja lastele ülesande määrata jõe laius paadisilla kohal. Õpilased pakkusid järgmisi lahendusi.

Joonas: "Kui mina tulin jõe kaldale, siis teisel kaldal seisis Jaak ja mõtles, kuidas mõõta jõe laiust. Eile saime teada, et Jaak on 1 m ja 80 cm pikk. Seekord oli mul taskus tikutops ja harilik pliiaats. Tean, et tikutoosi pikem külg on 5 cm pikk. Tahtsin võrrelda Jaagu pikkust tikutoosiga, aga toos jäi lühikeseks. Seepärast võtsin pliiaatsi ja märkisin küünega pliiaatsi serval Jaagu pikkusega võrdelise lõigu.

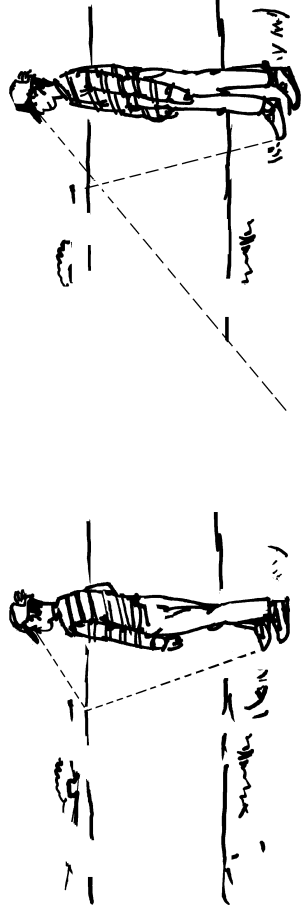


Kodus mõõtsin selle pikkuse ära. Oli 6,3 cm. Sain võrde

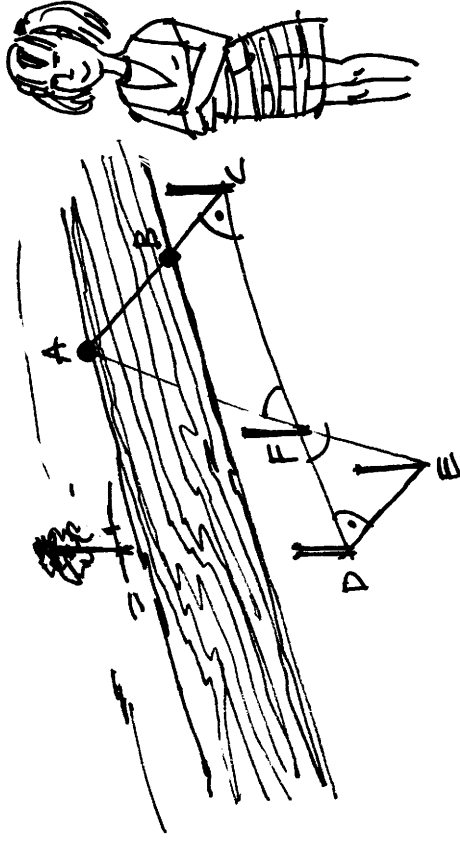
$$\frac{180}{0,063} = \frac{x}{0,7} \quad . \text{ Siit sain jõe laiuseks 20 meetrit.}$$

Jaak: "Et mul taskus pliiaatsi ei olnud ja minupoolsel kaldal ei olnud võtta vitsa-raagugi, siis mina Joonase kombel jõe laiust mõõta ei saanud. Ka läks pikkuse etalon s.t. Joonas minema. Tõmbasin mütsinoka silmle ja mõtlesin juba koju tagasi kõmpida, kui tuli idee.

Läksin jõe kaldale, keerasin end näoga vastaskalda poole. Seejärel tõmbasin mütsi silmle nii, et mütsinoka alumine äär langeks kokku vastaskalda joonega. Pärast seda pöörasin end pea asendit muutmata vasakule ja märkisin silmadega kõige kaugema punkti, mis paistab mütsinoka alt. Kaugus selle punktini ongi ligikaudu võrdne jõe laiusega. Mõõtsin kauguse ära. Tulemuseks sain 21 meetrit. Vasakule pöörasin selle pärast, et selles suunas oli maa tasasem ja seetõttu mõõtmise täpsem. Muidugi jah, ilmselt on minu mõõtmisviis ebatäpsem kui Joonase oma."



Tiiu ja Merike: Ka meie saime tulemuseks 20 meetrit. Et meie lahendus on veidi keerulisem kui Joonase ja Jaagu lahendused, siis alustame joonisest.



Jõe laius on lõik AB . Märgime sirge AB pikendusel punkti C ja joonistame sellest punktist lõiguga AC ristuva lõigu CD . Lõigu CD pikkuse valime vabalt, aga nii, et seda lõiku oleks meil lihtne mõõta. Punktist D joonistame lõiguga CD ristuva lõigu DE . Punkti E valime nii, et sellest punktist oleks nähtav punkt A . Lõigud DE ja AC on paralleelsed. Ühendame punktid E ja A mõttelise sirgega. Lõikude CD ja AE lõikepunkt on F . Saame kaks sarnast täisnurkset kolmnurka $\triangle ACF$ ja $\triangle EDF$. Nende kolmnurkade sarnasusest järeldub võrre

$$\frac{AC}{ED} = \frac{CF}{DF}$$

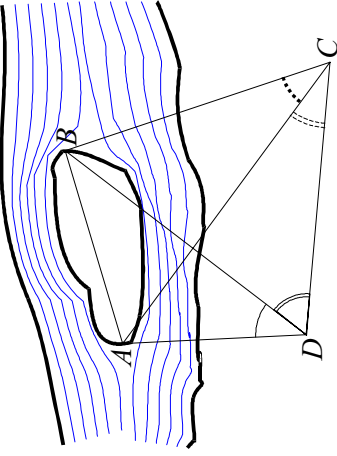
Me mõõtsime ära lõigud $CF = 15,0$ m, $ED = 1,6$ m ja $DF = 1,0$ m.

$$\text{Siit saime } AC = \frac{15,0 \cdot 1,6}{1,0} = 24,0 \text{ m}$$

Seejärel mõõtsime lõigu BC pikkuse $BC = 4,0$ m ja lahutasime selle lõigu AC pikkusest, saime $AB = 24,0 \text{ m} - 4,0 \text{ m} = 20 \text{ m}$.

Näide 3. Kahe punkti vahelist kaugust saab sarnaste kolmnurkade abil määrata ka siis, kui mõlemad punktid on ligipääsmatud. Olgu meil näiteks vaja kaldal määrata jõe keskel asuva saare pikkust AB . Selleks märgime jõe kaldal kaks punkti C ja D . Lõiku CD nimetatakse *baasiks* ja selle lõigu pikkus tuleb mõõta võimalikult täpselt. Baasi otspunktidest on näha punktid A ja B . Mõõdame baasi otspunktide juures olevad nurgad ADC , ADB , BCD ja BCA .

Nüüd joonestame paberile nelinurga $ABCD$ vähendatud koopia. Jooniselt mõõdame lõigu AB pikkuse. Kui joonist on vähendatud n korda, siis punktide A ja B vahelise tõelise kauguse saamiseks tuleb mõõdetud pikkus korrutada n -ga.



648. Jüri ja Mari seisis õhtul kõnniteel laternaposti lähedal ja mõõtsid ära oma varjude pikkused. Jüri vari oli 120 cm pikk ja Mari vari oli 140 cm pikk. Samas me teame, et Jüri oli Marist pikem. Kuidas on see võimalik?

649. Miks kasutatakse varju abil kauguse või kõrguse määramisel päikese- või kuuvalguses tekkivaid varje, aga ei kasutata laternaposti otsas põleva lambi kiirtes tekkivaid varje?

650. Vabrikukorstna vari on 54 m pikkune, Jütsi vari on 270 cm pikkune. Jüts ise on 150 cm pikk. Kui kõrge on vabrikukorsten?

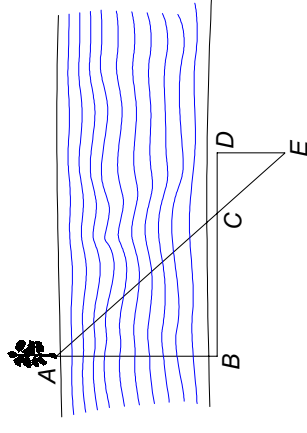
651. Elektriliini post on 8 m pikk. Tikutopsi pikem külg on 5 cm pikkune. Kui kaugel on Jürgen sellest postist, kui väljasirutatud käes olev tikutops ja liinipost paistavad talle ühesuurse nurga all? Tikutopsi ja silma vaheliseks kauguseks võta 65 cm.

652. Jürgo näeb enda ette 3 m kaugusele tasasele maale asetatud peeglist vaatetorni tipu peegeldust. Jürgo on torni jalamist 39 meetri kaugusel. Kui kõrge on vaatetorn?

653. 5-sendise metallraha läbimõõt on 1,6 cm. Kuu läbimõõt on 3476 km. Kui see münt on 177 cm kaugusel silmast, siis ta katab vaateväljal täpselt Kuu ära. Kui kaugel on Kuu Maast?

654. Joonisel on näidatud, kuidas jõge ületamata mõõta jõe laiust. Punktid A ja B on valitud vahetult jõe kaldal teineteise vastas, kusjuures

$\angle B = \angle D = 90^\circ$. Leia jõe laius, kui $BC = 18$ m, $CD = 4$ m ja $DE = 2,5$ m.



655. Thales Mileetosest määras Cheopsi püramiidi kõrguse. Mitmel viisil oskaksid seda teha Sina?

656. Boeing 747 on umbes 60 m pikk. Kuidas määrata maapinnalt, kui kõrgel on Sinu pea kohalt ülendav Boeing 747?

657. Sa tead, et elektriliini postid on 8 m kõrgused, postide vahekauguseks on 30 m. Maja aknad on keskmiselt 140 cm kõrgused. Umbes poole kilomeetri kaugusel on maja, mille juurde läheb elektriliin. Kas on võimalik täpsemalt määrata maja kaugust ilma maja juurde minemata?

658. Kõrguste ja kauguste kaudsest mõõtmisest on juttu Jules Verne romaanis “Saladuslik saar”. Kuidas insener määras Kauge Vaate platoo kõrguse?

659. Määra koolimaja kõrgus ilma kõrgust mõõtmata.

660. Kuidas saab mõõta puu kõrgust ilma puu juurde minemata?