ARVAVALDISED JA TÄHTAVALDISED

Tähtavaldisi moodustatakse sarnaselt arvavaldistega, meeles tuleb pidada ainult seda, et **tähelise teguri ees võib korrutusmärgi kirjutamata jätta**.

Seega tähendab $5x$ sama mis $5 \cdot x$ ja ab tähendab sama mis $a \cdot b$.

Kui korrutises on nii tähed kui arvud, siis korrutatakse arvulised tegurid omavahel ja kirjutatakse nad esikohale.

Nii näiteks korrutis $3 \cdot x \cdot 4 \cdot y$ esitatakse tavaliselt kujul $12xy$.

Korrutis $5 \cdot a^2 \cdot (-6) \cdot b$ esitatakse aga kujul $-30a^2b$.

Esikohale kirjutatud arvulist tegurit nimetatakse kordajaks.

Avaldises $12xy$ nimetatakse tegurit 12 kordajaks. Avaldises $-30a^2b$ nimetatakse kordajaks tegurit –30.

Kordaja 1 jäetakse kirjutamata.

Nii kirjutatakse avaldise $1ab$ asemel ab ja $-1cd$ asemel $-cd$.

Võrdsete liidetavate summa võib kirjutada korrutisena:

$ab + ab + ab = 3ab$;
$a + a + a + a + a = 5a$;
Tähtavaldiste puhul kasutatakse tehete järjekorra määramisel sama reeglit, mis arvavaldiste puhul:

kui avaldises ei esine sulgusid, siis tuleb esmalt sooritada astendamised, seejärel korrutamised ja jagamised ning viimaks liitmised ja lahutamised.

Niisugust tehete järjekorda nimetatakse tehete *põhijärjekorraks*.

Kui avaldises, milles ei ole sulgusid, esinevad ainult samalaadsed tehted, kas ainult liitmised ja lahutamised või ainult korrutamised ja jagamised, siis arvutatakse selles järjekorras, nagu avaldises on kirjutatud.

Erandiks sellest reeglist on korrutiste jagatised, milles on tähelisi tegureid ilma tehtemärkideta nende ees. Selliste korrutiste jagamisel toimitakse nii, nagu oleksid need korrutised sulgudes.

Näited: $2 : 3ab = \frac{2}{3ab}$; $5 : 7b = \frac{5}{7b}$; $ab : cd = \frac{ab}{cd}$.

Murrujoont kasutades võib lugejast ja nimetajast mõnikord sulud ära jätta.

Näited: $(a + b) : (c + d) = \frac{a+b}{c+d}$; $a(b + c) : (e + f) = \frac{a(b+c)}{e+f}$.

Kui avaldises on liikmeid, mis on ühesugused või erinevad ainult arvulise kordaja poolest, siis nimetatakse selliseid liikmeid **sarnasteks liikmeteks.**

Sarnaseid liikmeid saab avaldises asendada ühe liikmega, mille kordajaks on sarnaste liikmete kordajate summa. Sellist asendamist nimetatakse sarnaste liikmete **koondamiseks**.

Varasemates klassides oled Sa õppinud *korrutamise jaotuvuse*[1] seadust:

$a(b + c) = ab + ac$.

See seadus kehtib siis, kui a, b ja c asemel on mistahes arvud või avaldised.

Korrutamise jaotuvuse seadust on mõistlik kasutada siis, kui sulgudes on lisaks arvudele ka tähti sisaldavaid liikmeid. Et me vabaneme avaldises olevatest sulgudest, siis nimetatakse seda teguviisi **sulgude avamiseks**.

Näide 1. Avame sulud avaldises $3(2x - 5)$.

Korrutamise jaotuvuse seaduse kohaselt:

$3(2x - 5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-5) = 6x - 15$.

Näide 2. Avame sulud avaldises $-2(4a + 3b - 6)$:

$-2(4a + 3b - 6) = -2 \cdot 4a - 2 \cdot 3b - 2 \cdot (-6) = -8a - 6b + 12$.

Näide 3. Avame sulud avaldises $-1(2x - 5y + 3)$:

$-1(2x - 5y + 3) = -1 \cdot 2x - 1 \cdot (-5y) - 1 \cdot 3 = -2x + 5y - 3$.

Sulgude ees oleva teguri –1 asemel kirjutatakse tavaliselt ainult miinusmärk.

Seega on avaldis $-1(2x - 5y + 3)$ sama, mis $-(2x - 5y + 3)$.

Sulgude avamisel kasutame järgmist reeglit: **miinusmärk sulgude ees muudab märgid sulgude sees.**

ÜKSLIIKMED JA HULKLIIKMED

Üksliikmeks nimetatakse korrutist, mille teguriteks on numbritega või tähtedega väljendatud arvud ja nende astmed. Üksik arv loetakse samuti üksliikmeks. Üksliikme arvuline tegur kirjutatakse esikohale. Seda arvu nimetatakse üksliikme kordajaks.

---

[1] Seda seadust nimetatakse võõrsõnaga ka *korrutamise distributiivsuse* seaduseks.

Näiteks üksliikme xyz kordaja on arv 1, üksliikme $4xyz$ kordaja on 4, aga üksliikme $-3su^2$ kordaja on (-3) ja üksliikme $-xyz$ kordaja on (-1).

Kui üksliige on antud näiteks kujul $4xxxyyyyyabb$, siis see **korrastatakse,** st kordaja kirjutatakse esikohale ja seejärel muutujad asendatakse nende astmetega (tavaliselt *ladina* tähestiku järjekorras). Seetõttu kirjutatakse üksliige $4xxxyyyyyabb$ tavaliselt ümber kujule $4ab^2x^3y^5$.

Üksliikmeid nimetatakse sarnasteks, kui nad erinevad ainult kordajate poolest või ei erinegi.

Sarnaste üksliikmete summa on liidetavatega sarnane üksliige, mille kordajaks on liidetavate üksliikmete kordajate summa.

Üksliikmete korrutamisel kordajad korrutatakse ja ühesuguste täheliste tegurite astendajad liidetakse.

Üksliikme astendamisel astendatakse iga tema tegur.

Vaatleme kahte näidet üksliikmete liitmise kohta:

$3a + 7a + 1990a$ ja
$3xy + 4x - 5y$.

Esimesel juhul me saame summas liidetavaid koondada, sest liidetavateks on sarnased üksliikmed. Teisel juhul liidetavad üksliikmed aga pole sarnased ja seega tulemust lihtsustada ei saa. Sellist summat nimetame edaspidi ka **hulkliikmeks**. Seega

hulkliige on üksliikmete summa.

Üksliikmeid, mille liitmisel hulkliige saadakse, nimetatakse **hulkliikme liikmeteks**. Esimese hulkliikme liikmed on seega $3x^4$; $2x^3y$; $17x^2$ ja 98. Teise hulkliikme liikmed on $-5xy^2$; $3uv$; $12u$ ja $7v$.

Kui hulkliige sisaldab sarnaseid liikmeid (st sarnaseid üksliikmeid), siis need **koondatakse**. Pärast sarnaste liikmete koondamist tuleb hulkliige **korrastada**. Selleks järjestatakse hulkliikme liikmed muutujate astendajate summade kahanemise järjekorras. Võrdsete astendajate puhul kirjutatakse ettepoole see muutuja, mis asub ladina tähestikus eespool.

Kui hulkliikmes on ainult kaks liiget, siis seda nimetatakse tavaliselt **kaksliikmeks**. Kaksliikmed on näiteks $x + y$, $x^2 - 4x$, $-x^4 + 3x^2y$ jne.

Hulkliiget, mis sisaldab täpselt kolm liiget, nimetatakse **kolmliikmeks**. Kolmliikmed on näiteks $x^2 + 2xy + y^2$, $x^4 + 3x + 4y$, $-3x - 4y + 5z$ jne.

Näide 1. Liidame hulkliikmed $3x^2 + 4x - 5$ ja $2x^3 - 3x + 4$.

Näide 2. Liidame hulkliikmed $3x + 4y - 5$ ja $-2x + 3y - 2$

Hulkliikmete lahutamisel kasutame sulgude avamise eeskirja: **miinusmärk sulgude ees muudab sulgudes olevate liikmete märgid vastupidisteks**.

Näide 3. Lahutame hulkliikmest $3x + 4y - 4$ hulkliikme $4x - 5y - 2z - 3$.

hulkliikme korrutamisel üksliikmega korrutatakse selle hulkliikme iga liige üksliikmega ja tulemused liidetakse.

Näide 1. Leiame korrutise $3xy(5x + 4y - 1)$

Näide 2. Leiame korrutise $(5x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \cdot 2x^3y^2$.

Hulkliikme jagamisel üksliikmega jagatakse hulkliikme iga liige selle üksliikmega ja tulemused liidetakse.

Näide 1. Jagame $(12xy + 6x - 3y) : 3$ ja $(4x^2y^2 + 8x^2y + xy) : xy$.

Sageli on jagatise leidmiseks kasulik see ümber kirjutada murrujoone abil. See on kasulik eeskätt siis, kui hulkliikme mõni liige ei jagu selle üksliikmega.

Näide 2. Leiame jagatise $(25x^2y^3 + 35x^2y + 45xy) : 15x^2y^2$.

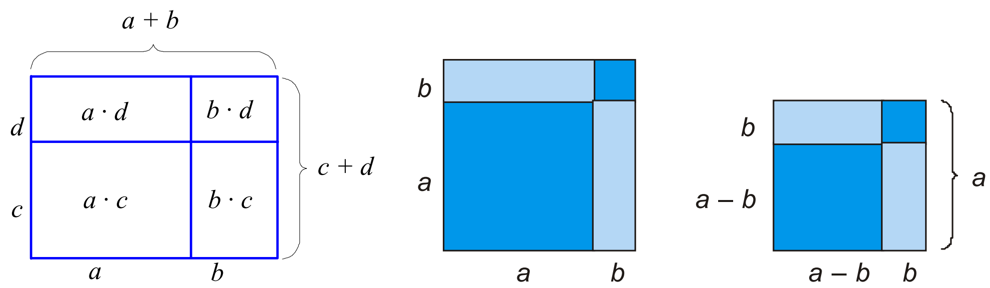
Hulkliikmete korrutamise eeskiri on järgmine:

kahe hulkliikme korrutamiseks tuleb esimese hulkliikme iga liiget korrutada teise hulkliikme iga liikmega ja saadud korrutised liita.

Näiteks kahe kaksliikme $a + b$ ja $c + d$ korrutist saab leida järgmise skeemi abil:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

Saadud tulemust esitab ka järgnev joonis:



414. Selgita jooniste abil summa ja vahe ruudu valemite kehtivust.

376. Korruta hulkliikmed ja lihtsusta avaldis.

a) $(x - 1)(x + 1)$
b) $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$
c) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$
d) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

$\boxed{\textbf{377.}}$ Millega võrdub $(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1)$?

Avaldiste kiiremaks teisendamiseks on vaja teada peast järgmisi valemeid:

Summa ruudu valem: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Kahe arvu summa ruut võrdub esimese arvu ruuduga, pluss kahekordne esimese arvu ja teise arvu korrutis, pluss teise arvu ruut.

Vahe ruudu valem: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Kahe arvu vahe ruut võrdub esimese arvu ruuduga, miinus kahekordne esimese arvu ja teise arvu korrutis, pluss teise arvu ruut.

Ruutude vahe valem: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Kahe arvu summa ja samade arvude vahe korrutis võrdub nende arvude ruutude vahega.

Summa kuubi valem: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Kahe arvu summa kuup võrdub esimese arvu kuubiga, pluss kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis, pluss kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis, pluss teise arvu kuup.

Vahe kuubi valem: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Kahe arvu vahe kuup võrdub esimese arvu kuubiga, miinus kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis, pluss kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis, miinus teise arvu kuup.

Kuupide summa valem: $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Kahe arvu summa ja samade arvude vahe mittetäieliku ruudu[2] korrutis võrdub nende arvude kuupide summaga.

Kuupide vahe valem: $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Kahe arvu vahe ja samade arvude summa mittetäieliku ruudu korrutis võrdub nende arvude kuupide vahega.

Kõigi ülaltoodud valemite sõnastamisel võib kasutada sõna “arv” asemel ka sõna “üksliige”, sest need valemid kehtivad nii arvude kui ka üksliikmete puhul.

I) $(a+b)^2$	V) $(-0{,}5c - 2de)^2$	IX)
II) $(x+2y)^2$	VI) $(-5x + 0{,}6xy^2)^2$	X) 51^2
III) $(2u - 3v)^2$	VII) $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2$	XI) $(c+d+e)(e+c+d)$
IV) $(-3p + 5pq)^2$	VIII) $(m + x + b)^2$	

[2] Kolmliiget $a^2 - ab + b^2$ nimetame kahe arvu *vahe mittetäielikuks ruuduks*, kolmliiget $a^2 + ab + b^2$ nimetame kahe arvu *summa mittetäielikuks ruuduks*.

380. Tegurda hulkliige.

e) $x^3 - 125$	f) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$	g) $4y^2 - 49$	h) $4 + a^2 + 4a$
i) $27 + x^3$	j) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$	k) $27 - 8x^3$	l) $a^2 - 6a + 9$
m) $64x^3 - 1$	n) $27 - 27x + 9x^2 - x^3$	o) $27a^3 + 8x^3$	p) $9 - 6a + a^2$
q) $v^3 - 8u^3$	r) $a^3 + 3a^2bc + 3ab^2c^2 + b^3c^3$	s) $8 + 27x^3y^3$	t) $1 - 0{,}04x^2$

381. Arvuta peast, kasutades hulkliikmete korrutamise valemeid.

a) 99^2 b) 101^2 c) 49^2 d) $99 \cdot 101$ e) $1999 \cdot 2001$ f) $38^2 - 12^2$

g) $501^2 - 500^2$ h) $501^2 - 499^2$ i) $\left(\frac{50}{99}\right)^2 - \left(\frac{49}{99}\right)^2$ j) (10+1)(100–10+1)

382. Tegurda hulkliige. Selleks too ühine tegur sulgude ette ning kasuta valemit.

a) $3x^2 + 6x + 3$	b) $5a^2 - 10a + 5$	c) $2a^2 - 16a + 32$
d) $-x^2 - 10x - 25$	e) $10a - 5a^2 - 5$	f) $2x^2 + 2 - 4x$
g) $3u^2 - 12u$	h) $6 - 24x^2y^2$	i) $5a^2bc - 20bc$
j) $5x^5 - 20x^3y^2$	k) $a^2x^2 - 2a^2xb + a^2b^2$	l) $-at^2 - 2at - a$

383. Lihtsusta avaldis.

a) $(a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$ b) $(a^n + b^n)(a^n - b^n)$

c) $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$ d) $(x^n + y^n)^2 - (x^n - y^n)^2$

e) $(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$

384. Näita et

a) $(a-b)^2 = (b-a)^2$ b) $(a+b)^2 = (-a-b)^2$

c) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ d) $(a-b)(b-a) = -(a-b)^2$

e) $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$

385. Lihtsusta avaldis.

a) $2(a+b)^2 - 4(a+b)(a-b) + 2(a-b)^2$ b) $(5a-b)^2 + (5b+a)^2$

c) $(3x+4)(9x^2 - 12x + 16) - 27x^3$ d) $(4-x)(x-2) + (x-3)^2$

e) $(4u-1)(4u+1) - (2u+1)(8u-1)$ f) $t^2(-5-t) - (2-t^2)(t+5)$

g) $(7c^2 + 2)(-49c^4 + 14c^2 - 4) - 16$ h) $(a^2 + b^2)(a+b) - (a^3 + b^3)$

386. Tegurda hulkliige, kasutades rühmitamisvõtet.

a) $ax + ay + bx + by$	b) $kl + km + nl + nm$	c) $xy - xz + 2y - 2z$
d) $ac + d - c - ad$	e) $x^3 + x^2 + x + 1$	f) $t^2 + tu + 5t + 5u$
j) $a^2 - b^2 + a - b$	k) $x^4 - y^4 + x^2 + y^2$	l) $ab - 2 - 2a + b$

387. Millega võrdub $(a+b+c)^2$. Tuleta vastav valem. Meenuta summa ruudu graafilist esitust. Kas oskad tuletatud valemit analoogiliselt esitada? Millega võrdub $(a+b+c+d)^2$? Millega võrdub summa ruut, kui liidetavaid on 5; 6; 7; ... ; n?

419. Tõesta, et kehtivad järgmised valemid:

1) $(a-b)^2=(b-a)^2$; 2) $(-a-b)^2=(a+b)^2$

3) $(a-b)^3=-(b-a)^3$ ja 4) $(-a+b)^3=-(a-b)^3$.

$\boxed{429.}$ Tõesta, et kolme järjestikuse täisarvu korral on äärmiste arvude korrutis väiksem keskmise arvu ruudust.

$\boxed{437.}$ Lihtsusta avaldis $(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)$.

$\boxed{402.}$ Leia konstandi c selline väärtus, et murd $\dfrac{3x^2-x+c}{x+3}$ oleks taanduv. Millise avaldise saame pärast taandamist?

408. Kas murru $\dfrac{m^2+2m-mx-2x}{m^2+3m-mx-3x}$ väärtus sõltub muutuja x väärtusest?

418. Järgmistes lihtsustamisteisendustes on tehtud vead. Leia vead.

a) $\dfrac{a+b}{b}=a+1$ b) $\dfrac{c}{c+d}=\dfrac{1}{1+d}$ c) $\dfrac{4-x}{4}=1-x$

d) $\dfrac{3+4x}{5-3x}=\dfrac{7}{2}$ e) $\dfrac{a(b+c)}{d+c}=\dfrac{a+b}{d}$ f) $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$

g) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{a}{a}+\dfrac{b}{b}=2$.

Mitmekordsete murdude lihtsustamiseks on vahel mõistlik korrutada murru lugejat ja nimetajat ühe ja sama sobivalt valitud teguriga (kui see tegur ei ole null, siis murru väärtus teatavasti ei muutu).

Näide 3. Lihtsustame mitmekordse murru $\dfrac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x^2y}+\dfrac{1}{xy^2}}{\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{y}}$.

Ülesande lahendamisel tasub vaadata ka seda, kas antud avaldist saab kergemini lihtsustada mõnel ebatraditsioonilisel viisil.

423. Lihtsusta avaldis. Kuidas on kõige lihtsam seda teha?

a) $(a-1)\cdot\left(1+\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}\right)$ b) $(a^2-b^2)\cdot\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a^2-b^2}\right)$

c) $\left(\dfrac{4}{x^4}-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot x^4$ d) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2+1}$

e) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x^3}{x^4+1}$ f) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x^3}{x^4+1}+\dfrac{8x^7}{x^8+1}$

424. Lihtsusta avaldis. Kuidas on kõige lihtsam seda teha?

a) $\left(\dfrac{a+2}{a^2-a-6}+\dfrac{a}{2(a-3)}\right)\cdot(a-3)$

b) $\left(\dfrac{a+2}{a^2-a-6}+\dfrac{a}{2a-6}\right)\cdot\left(a-\dfrac{3b-6}{b-2}\right)$

c) $\left(\dfrac{a+2}{a^2-a-6}+\dfrac{a}{2a-6}\right)\cdot\left(\dfrac{ab-3a}{b-3}-\dfrac{9-3b}{3-b}\right)$

d) $\left(\dfrac{c+2}{ac+2a-3c-6}+\dfrac{a}{2a-6}\right)\cdot\left(\dfrac{ab^2-3b^2}{b^2-9}+\dfrac{27-9a}{b^2-9}\right)$

e) $\left(\dfrac{c+2}{ac+2a-3c-6}-\dfrac{ad}{6d-2ad}\right)\cdot\left(\dfrac{ab^2-3b^2}{b^2-9}+\dfrac{27-9a}{b^2-9}\right)$

Näide 5. Leiame arvud A ja B, mille korral kehtib võrdus $\dfrac{x+4}{x^2-x-2}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+1}$.

427. Leia A, B ja C, mille korral kehtib võrdus.

a) $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}$ b) $\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+3}$

c) $\dfrac{4x-3}{x^2-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}$ d) $\dfrac{1}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$

$\boxed{431.}$ Lihtsusta avaldis.

a) $\dfrac{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}}{\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}}$ b) $\dfrac{\frac{a^3}{b^2}+b}{1-\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}}$ c) $\dfrac{\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}}{\frac{2y}{x^2-y^2}}$

d) $\dfrac{\frac{6}{p^2+3p-10}-\frac{1}{p-2}}{\frac{1}{p-2}+1}$ e) $\dfrac{\frac{x-y}{x+y}-\frac{y}{y-x}}{1-y\left(\frac{3}{x-y}-\frac{2}{x+y}\right)}$ f) $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}}$

$\boxed{432.}$ Lihtsusta avaldis $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{a+c}{(b-c)(a-b)}$.

$\boxed{433.}$ Tõesta, et $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\dfrac{a+b}{a+(a-b)}$.

$\boxed{434.}$ Tõesta, et $\left(\dfrac{b}{a+b}+a\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-b\right)-\left(\dfrac{a}{a+b}+b\right)\left(\dfrac{b}{a-b}-a\right)=2a$.

1033. Lihtsusta avaldis.

a) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$ b) $(2^{100}+1)(2^{50}+1)(2^{50}-1)+1$

$\boxed{\text{d)}}$ $(x+y+z+2)^2-(x+y+z+1)^2$