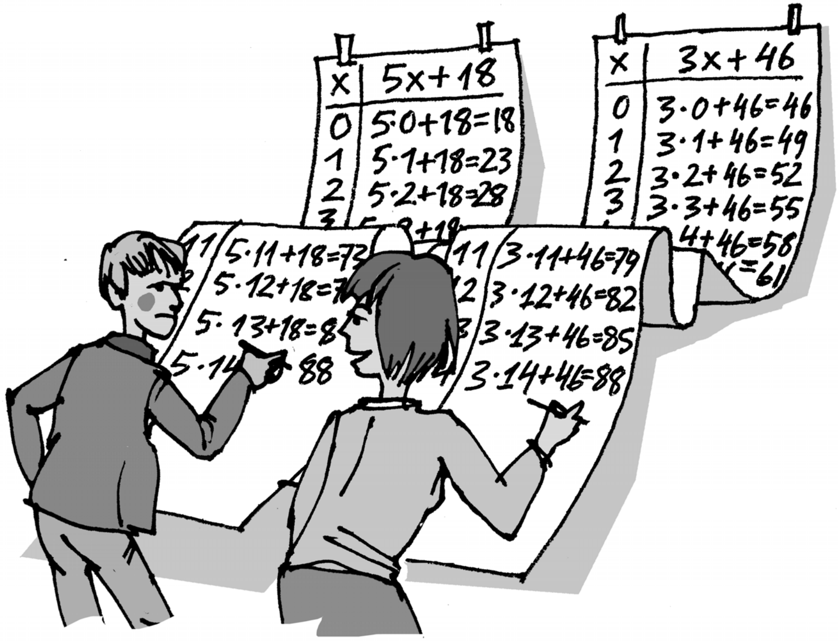
Näide 1. Jüri ja Mari proovisid leida, millise x-i väärtuse puhul on avaldised $5x + 18$ ja $3x + 46$ omavahel võrdsed?



Jüri ja Mari andsid x-ile erinevaid väärtusi ning võrdlesid avaldiste $5x + 18$ ja $3x + 46$ väärtusi omavahel. Nad panid tähele, et avaldised $5x + 18$ ja $3x + 46$ on võrdsed siis, kui $x = 14$.

Selline avaldiste väärtuste võrdlemine on töömahukas ja ei ole sugugi kindel, kas me leiame x-i otsitava väärtuse üles. Lihtsam on lahendada seda ülesannet *võrrandi* abil:

$5x + 18 = 3x + 46 \quad |-18$ võrduse mõlemalt poolelt lahutame 18;

$5x = 3x + 28 \quad |-3x$ võrduse mõlemalt poolelt lahutame $3x$;

$2x = 28 \quad |:2$ võrduse mõlemad pooled jagame kahega;

$x = 14$.

Vastus: $x = 14$.

Kui me ühendame kaks avaldist võrdusmärgiga, siis me saame **võrduse**.
Võrdused on näiteks: $8 = 5 + 3$; $2x + 3 = 55$; $3a - 5 = 7 + 2a$.

Võrdus, milles ei ole tähti, võib olla **tõene** (näiteks $8 = 5 + 3$) või **väär** (näiteks $4 - 5 = 45$).

Tähti (tundmatuid ehk otsitavaid) sisaldav võrdus võib olla tundmatu mõnede väärtuste korral tõene, mõnede korral väär. Näiteks võrdus $2a - 5 = 3$ on tõene siis, kui $a = 4$, sest $2 \cdot 4 - 5 = 3$ ja on väär tundmatu a kõigi ülejäänud väärtuste puhul.

Võrdust, mis on tõene tundmatu kõigi võimalike väärtuste puhul, nimetatakse **samasuseks**.

Nii näiteks osutuvad samasusteks

$0 \cdot x = 0$, $\quad 6 - 2x = 2(3 - x)$ ja $4(6 - 3x) = -3(4x - 8)$.

Ükskõik millise arvu me nendes võrdustes x-i asemele paneme, ikka saame tõese võrduse.

Võrrand on võrdus, mis sisaldab tundmatut suurust ehk tundmatut.

Võrrandid on: $2x - 7 = 3$; $2x = 10$; $x^2 = 9$; $x^2 = -9$; $x + 3y = 11$.

Neist esimesed neli võrrandit on ühe tundmatuga, viies võrrand on aga kahe tundmatuga. Hetkel õpime lahendama vaid ühe tundmatuga võrrandeid.

Tundmatu kõiki neid väärtusi, mille korral võrrand muutub tõeseks võrduseks, nimetatakse **võrrandi lahenditeks**. Võrrandil võib olla kas üks lahend või mitu lahendit, aga lahendid võivad ka puududa. Kui lahendid ei puudu, siis öeldakse, et võrrand on lahenduv.

Nii näiteks on võrranditel $2x - 7 = 3$ ja $2x = 10$ üksainus lahend ja selleks on arv 5. Tõepoolest, $2 \cdot 5 - 7 = 3$ ja $2 \cdot 5 = 10$ on mõlemad tõesed võrdused. Ükski muu arv ei rahulda neid võrrandeid.

Võrrandil $x^2 = 9$ on kaks lahendit, nimelt arvud 3 ja –3, sest võrdused $3^2 = 9$ ja $(-3)^2 = 9$ on tõesed võrdused.

Võrrandil $x^2 = -9$ pole aga ühtegi lahendit, sest mitte ühegi ratsionaalarvu ruut ei ole negatiivne.

Võrrandi kõik lahendid kokku moodustavad võrrandi **lahendihulga**. Selle lahendihulga leidmist nimetatakse **võrrandi lahendamiseks**.

Võrrandi põhiomadused on:

1. võrrandi pooli võib vahetada;
2. võrrandi mõlemat poolt võib korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga;
3. võrrandi mõlemale poolele võib liita (või mõlemast poolest lahutada) ühe ja sama arvu või avaldise.
viimasest omaduse järeldus: **võrrandi iga liikme võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele poolele, muutes selle liikme märgi vastupidiseks.**

VÕRRATUS

Kui meil on kaks erinevat ratsionaalarvu a ja b, siis võime me öelda, kas a on suurem b-st või hoopis a on väiksem b-st. Sümbolkujul pannakse need seosed kirja nii:

$$a > b \quad \text{või} \quad a < b.$$

Kirjutust, milles esineb märk $>$ või märk $<$, nimetatakse **rangeks võrratuseks**.

Kui võrratuse märk $>$ või $<$ esineb koos võrdusmärgiga =, see tähendab kujul $\geqslant$ või $\leqslant$, siis võrratust nimetatakse **mitterangeks võrratuseks**.

Kui kahe avaldise vahel on võrratusemärk, (kas >, <, ⩾ või ⩽) **siis sellist kirjutist nimetatakse võrratuseks.**

Avaldisi, mille vahel võrratusemärgid esinevad, nimetatakse võrratuse *poolteks*.

Võrratused on näiteks

$$5 > 2; \qquad 6 < 5\cdot 2 + 4; \qquad \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{5}; \qquad 3{,}45 \leqslant 8 - 5; \quad \text{ja} \quad 5 - 2x > x + 1.$$

Neljas esimeses näites seisavad võrratuse mõlemal poolel arvud. Kui võrratuse poolteks on antud arvud, siis nimetatakse võrratust **arvvõrratuseks.**

Iga arvvõrratuse puhul saab öelda, kas see võrratus on *tõene* või *väär*.

Arvvõrratused $5 > 2$, $6 < 5\cdot 2 + 4$ ja $\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{5}$ on tõesed,

aga arvvõrratus $3{,}45 \leqslant 8 - 5$ on väär.

Võrratus võib sisaldada ka *tundmatuid*. Selline võrratus on näiteks

$$5 - 2x > x + 1.$$

Tundmatuid sisaldava võrratuse kohta ei saa tundmatute väärtusi teadmata öelda, kas tegu on tõese või hoopis väära võrratusega.

Kui me anname ühe tundmatuga võrratuses

$$5 - 2x > x + 1$$

tähele x väärtuse 1, siis me saame tõese võrratuse

$$5 - 2\cdot 1 > 1 + 1 \quad \text{ehk} \quad 3 > 2.$$

Kui aga võtta $x = 2$, siis saame väära võrratuse

$$5 - 2\cdot 2 > 2 + 1 \quad \text{ehk} \quad 1 > 3.$$

Seega võime öelda, et arv 1 on antud võrratuse üks lahend, aga arv 2 ei ole.

Üldiselt: tundmatu neid väärtusi, mille puhul saame antud võrratusest tõese võrratuse, nimetatakse **võrratuse lahenditeks**. Võrratuse kõik lahendid kokku moodustavad **võrratuse lahendihulga**. Selle lahendihulga leidmine on **võrratuse lahendamine.**

Võrratuste lahendamisel kasutatakse võrratuse järgmisi omadusi.

1. Kui võrratuse mõlema poolega liita üks ja sama arv, siis jääb võrratuse märk samaks.

Näide 1. Liidame võrratuse $3 > 2$ mõlema poolega arvu 10:

$$3 > 2 \quad |+10;$$
$$3 + 10 > 2 + 10;$$
$$13 > 12.$$

Paneme tähele, et nii võrratus $3 > 2$ kui ka võrratus $13 > 12$ on mõlemad tõesed.

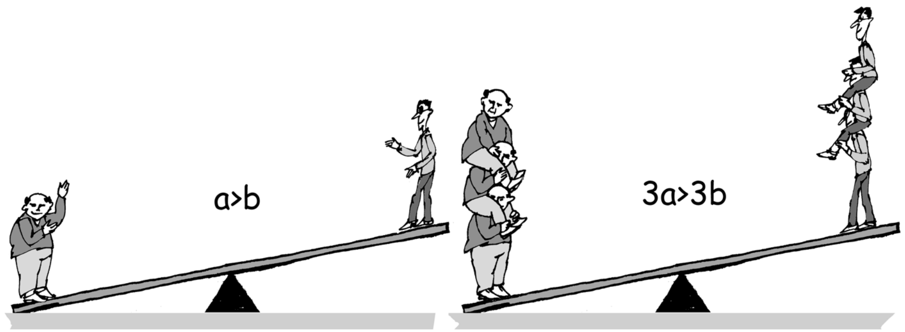
2. Kui võrratuse mõlemalt poolelt lahutada üks ja sama arv, siis jääb võrratuse märk samaks.

Näide 2. Lahutame võrratuse $6 < 9$ mõlemalt poolelt arvu 7:

$$6 < 9 \quad |-7$$
$$6 - 7 < 9 - 7$$
$$-1 < 2.$$

Paneme tähele, et nii võrratus $6 < 9$ kui ka võrratus $-1 < 2$ on mõlemad tõesed.

3. Kui võrratuse mõlemat poolt korrutada või jagada ühe ja sama positiivse arvuga, siis jääb võrratuse märk samaks.



Näide 3. Korrutame võrratuse $7 \geqslant 3$ mõlemat poolt arvuga 2:

$$7 \geqslant 3 \quad |\cdot 2$$
$$7\cdot 2 \geqslant 3\cdot 2$$
$$14 \geqslant 6.$$

Paneme tähele, et nii võrratus $7 \geqslant 3$ kui ka võrratus $14 \geqslant 6$ on mõlemad tõesed.

Näide 4. Jagame võrratuse $12 \leqslant 18$ mõlemat poolt arvuga 6:

$$12 \leqslant 18 \quad |:6$$
$$12:6 \leqslant 18:6$$
$$2 \leqslant 3.$$

Paneme tähele, et nii võrratus $12 \leqslant 18$ kui ka võrratus $2 \leqslant 3$ on mõlemad tõesed.

4. Kui võrratuse mõlemat poolt korrutada või jagada ühe ja sama negatiivse arvuga, siis muutub võrratuse märk vastupidiseks.

Näide 5. Korrutame võrratuse $-2 < 5$ mõlemat poolt arvuga -4:

$$-2 < 5 \quad |\cdot(-4)$$
$$-2\cdot(-4) > 5\cdot(-4)$$
$$8 > -20.$$

Võrratuse märk muutub vastupidiseks!

Paneme tähele, et nii võrratus $-2 < 5$ kui ka võrratus $8 > -20$ on mõlemad tõesed.

Kui me oleksime jätnud võrratuse märgi muutmata, siis oleksime saanud tõesest võrratusest $-2 < 5$ väära võrratuse $8 < -20$.

Näide 6. Jagame võrratuse $-9 < -6$ mõlemat poolt arvuga -3:

$$-9 < -6 \quad |:(-3)$$
$$-9:(-3) > -6:(-3)$$
$$3 > 2.$$

Võrratuse märk muutub vastupidiseks!

Paneme tähele, et nii võrratus $-9 < -6$ kui ka võrratus $3 > 2$ on mõlemad tõesed.

Kui me oleksime jätnud võrratuse märgi muutmata, siis oleksime saanud tõesest võrratusest $-9 < -6$ väära võrratuse $3 < 2$.

5. Võrratuse poolte vahetamisel muutub võrratuse märk vastupidiseks.

Näide 7. Vahetame võrratuse $5 < 8$ pooled ja muudame võrratuse märgi vastupidiseks. Saame

$$8 > 5.$$

Kui me oleksime jätnud võrratuse märgi muutmata, siis oleksime saanud tõesest võrratusest väära võrratuse.

LINEAARVÕRRATUSED

Vaatleme lihtsamaid ühe tundmatuga võrratusi, millele saab anda kuju $ax + b * 0$, kus märk $*$ tähistab ühte võrratusemärkidest $>$, $<$, $\geqslant$ või $\leqslant$. Selliseid võrratusi nimetatakse **ühe tundmatuga lineaarvõrratusteks**.

Näiteks võrratused

$$-2x + 8 \geqslant 0; \qquad -\frac{1}{2}x - 3{,}5 \geqslant 0; \qquad 6x + 4 < 2 - 3x \quad \text{ja} \quad x + \frac{12-x}{4} > \frac{26-x}{2}$$

on ühe tundmatuga lineaarvõrratused.

Lineaarvõrratuse lahendamiseks tuleb leida tundmatu kõik need väärtused, mille puhul saame antud võrratusest tõese võrratuse. Need tundmatu väärtused moodustavad võrratuse *lahendihulga*.

Kaht võrratust nimetatakse **samaväärseteks**, kui neil on üks ja sama lahendihulk. Võrratuse lahendamiseks teisendatakse ta järjest lihtsamaks, temaga samaväärseks võrratuseks, kuni jõutakse võrratuseni, mis määrab tundmatu kõigi nende väärtuste hulga, mille korral antud võrratus on tõene.

Võrratuse lihtsustamisel kasutatakse võrratuse omadusi.

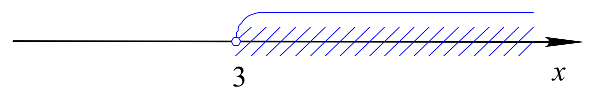
Näide 1. Lahendame võrratuse $2x > 6$.

Jagame võrratuse mõlemad pooled 2-ga, saame

$$2x > 6 \mid :2;$$
$$x > 3.$$

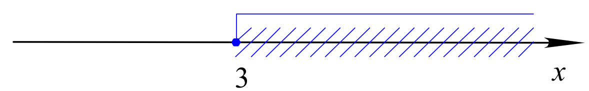
Seega sobivad võrratuse $2x > 6$ lahendiks kõik arvud, mis on kolmest suuremad.

Esitame saadud lahendihulga graafiliselt arvtelje piirkonnana:



Selle tähistamiseks, et arv 3 ei kuulu lahendihulka, märgime piirkonna otspunkti juurde ümara kaarekese. Nii eristame ranget võrratust mitterangest võrratusest.

Kui me oleksime lahendanud võrratuse $2x \geqslant 6$, siis oleks võrratuse lahendiks olnud $x \geqslant 3$. Esitame ka selle lahendihulga graafiliselt arvtelje piirkonnana:



1) *Ühe tundmatuga lineaarvõrrandi lahendiks on üldjuhul üks arv, lineaarvõrratuse lahendiks on aga üldjuhul arvtelje mingi piirkond.*

2) *Kui võrratuse mõlemat poolt korrutada või jagada ühe ja sama negatiivse arvuga, siis muutub võrratuse märk vastupidiseks.*