Splainid

Splainiks nimetatakse siledaid, ühesuguse struktuuriga tükati polünomiaalseid funktsioone. Splainidega lähendamine on tükiti interpoleerimine ühe ja sama astme polünoomiga.
Näiteks on meil sõlmed *a*, *b*, *c*, *d*,… . Võtame sõlmed *a* ja *b* ning paneme neist läbi *n*-astme polünoomi, võtame nüüd sõlmed *b* ja *c* ning paneme neist läbi samuti *n*-astme polünoomi. Järgmisena võtame sõlmed *c* ja *d* ning paneme neist samuti läbi *n*-astme polünoomi jne. Nii saamegi *n*-astme splaini.
Splainide korral peavad olema täidetud järgmised tingimused:

1) koosneb *n*-astme polünoomidest (ühesuguse struktuuriga polünoomid);
2) on pidevalt diferentseeruv oma määramispiirkonnas;
3) esimesed tuletised peavad olema pidevad määramispiirkonnas (sile);
4) teised tuletised peavad olema pidevad määramispiirkonnas (sõlmedes funktsioon kumer või nõgus, puuduvad teravikpunktid);
5) tuletised otspunktides peavad olema võrdsed.

Enim kasutatakse kuupsplaine, vanim tuntud splain on lineaarsplain ehk murdjoon.

Lineaarsplainid

Olgu meil antud punktid (a_0; b_0), (a_1; b_1), …, (a_n; b_n). Leiame läbi nende punktide pandud lineaarsplaini, see tähendab, et läbi iga kahe kõrvuti asuva sõlme paneme sirge (lineaarinterpolatsiooni polünoom). Nimetame kõigepealt lineaarsplaini tingimused:

1) ta koosneb sirgetest (hetkel *n* sirgest);
2) on pidevalt diferentseeruv lõigul [a_0 ; a_n];
3) esimesed ja teised tuletised on pidevad lõigul [a_0 ; a_n];
4) tuletised otspunktides on võrdsed ehk $f'(a_0) = f'(a_n)$.

Läbi punktide (a_0 ; b_0) ja (a_1 ; b_1) pandud sirge võrrand on

$$P_{01}(a) = f(a_0) + \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}(a - a_0), \quad a_0 \le a \le a_1 .$$

Läbi punktide (a_1 ; b_1) ja (a_2 ; b_2) pandud sirge võrrand on

$$P_{12}(a) = f(a_1) + \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}(a - a_1), \quad a_1 \le a \le a_2 .$$

Läbi punktide (a_{n-1} ; b_{n-1}) ja (a_n ; b_n) pandud sirge võrrand on

$$P_{(n-1)n}(a) = f(a_{n-1}) + \frac{f(a_n) - f(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}}(a - a_{n-1}), \quad a_{n-1} \le a \le a_n .$$

Seega kahe suvalise järjestikuse punkti (a_i ; b_i) ja (a_{i+1} ; b_{i+1}) korral on võrrandiks

$$P_{i(i+1)}(a) = f(a_i) + \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i}(a - a_i), \quad a_i \le a \le a_{i+1} .$$

Ruutsplain

Olgu meil antud punktid (x_0 ; y_0) , (x_1 ; y_1) , …, (x_n ; y_n). Leiame läbi nende punktide pandud ruutsplaini, see tähendab, et läbi iga kahe kõrvuti asuva sõlme paneme ruutpolünoomi ehk parabooli.
Leiame läbi punktide (x_0 ; y_0) ja (x_1 ; y_1) pandud parabooli võrrandi

$$P_{01}(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, \quad x_0 \le x \le x_1 .$$

Läbi punktide (x_1 ; y_1) ja (x_2 ; y_2) pandud parabooli võrrand on

$$P_{12}(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2, \quad x_1 \le x \le x_2 .$$

Läbi punktide (x_{n-1} ; y_{n-1}) ja (x_n ; y_n) pandud parabooli võrrand on

$$P_{(n-1)n}(x) = a_nx^2 + b_nx + c_n, \quad x_{n-1} \le x \le x_n .$$

Seega saime *n* võrrandit 3*n* tundmatuga. Leiame need tundmatud. Selleks, et neid tundmatuid leida, peame saama 3*n* võrrandit.

1) Kuna iga eelnev võrrand ($P_{(i-1)i}$) läheb läbi kahe punkti, saame

$$a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = y_0$$
$$a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = y_1$$
$$a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2 = y_1$$
$$a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2 = y_2$$
$$\vdots$$
$$a_nx_{n-1}^2 + b_nx_{n-1} + c_{n-1} = y_{n-1}$$
$$a_nx_n^2 + b_nx_n + c_n = y_n .$$

Siit saime 2*n* võrrandit. Puudu on veel *n* (sest 3*n* - 2*n* = *n*) võrrandit.

2) Leiame kõigi funktsioonide esimese tuletise

$$2a_1x + b_1$$
$$2a_2x + b_2$$
$$\vdots$$
$$2a_{n-1}x + b_{n-1}$$
$$2a_nx + b_n .$$

Esimese ja teise funktsiooni esimesed tuletised on võrdsed, kui $x = x_1$. Kahe suvalise järjestikuse võrrandi $P_{(i-1)i}$ ja $P_{i(i+1)}$ esimesed tuletised on võrdsed, kui $x = x_i$. Seega saame

$$2a_1x_1 + b_1 - 2a_2x_1 - b_2 = 0$$
$$2a_2x_2 + b_2 - 2a_3x_2 - b_3 = 0$$
$$\vdots$$
$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} - 2a_nx_{n-1} - b_n = 0.$$

Siit saime n-1 võrrandit. Vaja on veel üht (sest n-(n-1)=1) võrrandit. Viimase puuduoleva võrrandi saame täiendavast eeldusest, et a_1=0, s.t. et esimene ruutsplain on lineaarne. Nüüd, kui meil on olemas 3n võrrandit saame lahendada süsteemi ja leida kõik kordajad.

Kuupsplain

Olgu meil antud punktid (a_0; b_0), (a_1; b_1), …, (a_n; b_n). Leiame läbi nende punktide pandud kuupsplaini, see tähendab, et läbi iga kahe kõrvuti asuva sõlme pannakse kolmanda astme polünoom. Nimetame kõige pealt kuupsplaini tingimused:

1) ta koosneb 3-astme polünoomidest (hetkel n-2 polünoomist);
2) on pidevalt diferentseeruv lõigul [a_0;a_n];
3) esimesed tuletised on pidevad lõigul [a_0;a_n];
4) teised tuletised on pidevad lõigul [a_0;a_n];
5) tuletised lõigu [a_0;a_n] otspunktides on võrdsed - $f\,'(a_0)=f\,'(a_n)$;
6) graafiku kõverus otspunktides on võrdne nulliga ehk otspunktide teised tuletised on võrdsed nulliga.

Läbi punktide (x_0; y_0) ja (x_1; y_1) pandud kuuppolünoom on

$$P_{01}(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, \quad x_0 \le x \le x_1. \ (1)$$

Läbi punktide (x_1; y_1) ja (x_2; y_2) pandud kuuppolünoom on

$$P_{12}(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, \quad x_1 \le x \le x_2. \ (2)$$

Läbi punktide (x_{n-1}; y_{n-1}) ja (x_n; y_n) pandud kuuppolünoom on

$$P_{(n-1)n}(x) = a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n, \quad x_{n-1} \le x \le x_n. \ (\mathrm{N})$$

Seega saime n võrrandit 4n tundmatuga ning meil on vaja saada ka 4n võrrandit.

1) Teame, et võrrand (1) läbib punkte (x_0; y_0) ja (x_1; y_1), seega

$$a_1x_0^3 + b_1x_0^2 + c_1x_0 + d_1 = y_0, \quad \langle 1 \rangle$$
$$a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + d_1 = y_1. \quad \langle 2 \rangle$$

Teame, et võrrand (2) läbib punkte (x_1; y_1) ja (x_2; y_2), seega

$$a_2x_1^3 + b_2x_1^2 + c_2x_1 + d_2 = y_1, \quad \langle 3 \rangle$$
$$a_2x_2^3 + b_2x_2^2 + c_2x_2 + d_2 = y_2. \quad \langle 4 \rangle$$

Teame, et võrrand (N) läbib punkte (x_{n-1}; y_{n-1}) ja (x_n; y_n), seega

$$a_nx_{n-1}^3 + b_nx_{n-1}^2 + c_nx_{n-1} + d_n = y_{n-1}, \quad \langle 2n-1 \rangle$$
$$a_nx_n^3 + b_nx_n^2 + c_nx_n + d_n = y_n. \quad \langle 2n \rangle$$

Saime 2n võrrandit 4n tundmatuga, seega on meil vaja veel 2n (sest 4n - 2n = 2n) võrrandit.

2) Leiame kõigi funktsioonide esimesed tuletised

$$3a_1x^2 + 2b_1x + c_1$$
$$3a_2x^2 + 2b_2x + c_2$$
$$\vdots$$
$$3a_nx^2 + 2b_nx + c_n.$$

Esimese ja teise funktsiooni esimesed tuletised on võrdsed, kui $x = x_1$. Teise ja kolmanda funktsiooni esimesed tuletised on võrdsed, kui $x = x_2$ jne. Seega

$$3a_1x_1^2 - 3a_2x_1^2 + 2b_1x_1 - 2b_2x_1 + c_1 - c_2 = 0,$$
$$3a_2x_2^2 - 3a_3x_2^2 + 2b_2x_2 - 2b_3x_2 + c_2 - c_3 = 0,$$
$$\vdots$$
$$3a_{n-1}x_{n-1}^2 - 3a_nx_{n-1}^2 + 2b_{n-1}x_{n-1} - 2b_nx_{n-1} + c_{n-1} - c_n = 0.$$

Saime juurde n-1 võrrandit. Seega vaja on veel n+1 (sest 2n-n+1=n+1) võrrandit.

3) Leiame kõigi funktsioonide teised tuletised

$$6a_1x + 2b_1$$
$$6a_2x + 2b_2$$
$$\vdots$$
$$6a_nx + 2b_n.$$

Teame, et esimese ja teise funktsiooni teised tuletised on võrdsed, kui $x = x_1$. Teise ja kolmanda funktsiooni teised tuletised on võrdsed, kui $x = x_2$ jne. Seega

$$6a_1x_1 - 6a_2x_1 + 2b_1 - 2b_2 = 0,$$
$$6a_2x_2 - 6a_3x_2 + 2b_2 - 2b_3 = 0,$$
$$\vdots$$
$$6a_{n-1}x_{n-1} - 6a_nx_{n-1} + 2b_{n-1} - 2b_n = 0.$$

Siit saime n-1 võrrandit, seega on meil vaja veel n+1-(n-1) = 2 võrrandit

4) Kaks puudu olevat võrrandit saame tingimusest 6 – teised tuletised otspunktides on võrdsed nulliga:

$$6a_1x_0 + 2b_1 = 0,$$
$$6a_nx_n + 2b_n = 0.$$

Seega saime kokku 4n võrrandit 4n tundmatu jaoks.