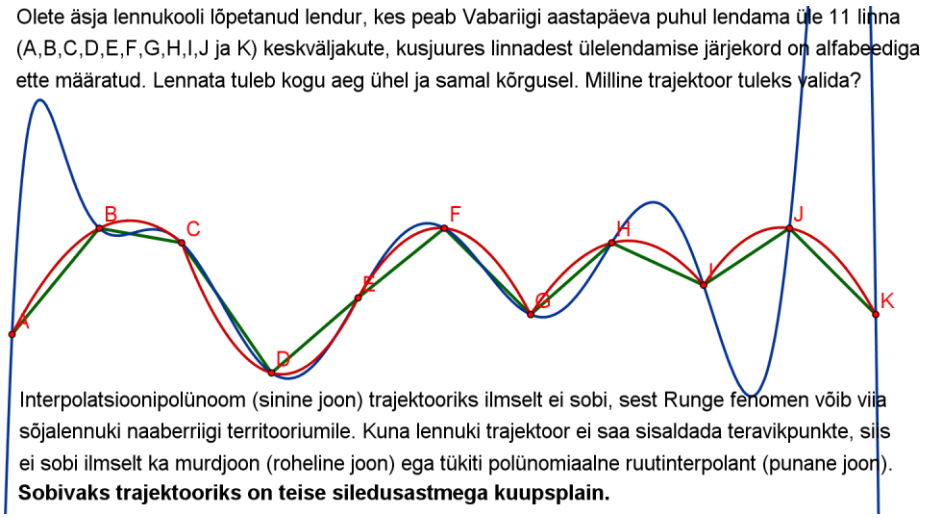
Splainid

Olete äsja lennukooli lõpetanud lendur, kes peab Vabariigi aastapäeva puhul lendama üle 11 linna (A,B,C,D,E,F,G,H,I,J ja K) keskväljakute, kusjuures linnadest ülelendamise järjekord on alfabeediga ette määratud. Lennata tuleb kogu aeg ühel ja samal kõrgusel. Milline trajektoor tuleks valida?



Interpolatsioonipolünoom (sinine joon) trajektooriks ilmselt ei sobi, sest Runge fenomen võib viia sõjalennuki naaberriigi territooriumile. Kuna lennuki trajektoor ei saa sisaldada teravikpunkte, siis ei sobi ilmselt ka murdjoon (roheline joon) ega tükiti polünomiaalne ruutinterpolant (punane joon). **Sobivaks trajektooriks on teise siledusastmega kuupsplain.**

Olgu antud punktid koordinaatidega $(x_i; f(x_i))$ kus $i = 0,1, \dots n$. Eeldame, et argumendi x_i väärtused on järjestatud rangelt kasvavalt:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Polünomiaalseks splainiks astmega *m* ja siledusjärguga *p* nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{m,p}$:

1) $S^{m,p}$ on ülimalt *m*- astme polünoom igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$.

2) $S^{m,p}$ ja selle tuletised kuni järguni *p* (kaasa arvatud) on pidevad vahepealsetes sõlmedes $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Kui nii võtta, siis on murdjoon splain astmega 1 ja siledusjärguga 0 ehk $S^{1,0}$. Murdjoon koosneb esimese astme polünoomidest, aga ei ole sile.

Kui interpoleerida tabelit tükiti ruutpolünoomide abil, siis splaini aste on 2. Ühelt ruutpolünoomilt teisele ülemineku punktides on küll interpoleeriv funktsioon Φ pidev, aga Φ' ei ole pidev – üleminekupunktidest saavad üldjuhul teravikpunktid. Seega on tükiti ruutinterpolant splain $S^{2,0}$.

Kui splaini siledusjärk on 1, (ehk mõlemapoolsed tuletised üleminekupunktides on võrdsed) siis on selle graafik juba sile joon. Siledusjärk 2 garanteerib juba ka graafiku kõveruse sujuva muutumise. Sellisel juhul ei ole splaini liitekohad enam visuaalselt eraldatavad.

Praktikas kasutatakse kõige rohkem splaine $S^{3,2}$, s.o. kuupsplaine, mille siledusjärk on 2.

Kui lõik $[a, b]$ on jaotatud n osaks ja igal osal kasutame me m-astme polünoomi, siis on iga polünoomi puhul tarvis kindlaks määrata $m+1$ kordajat. Seega on meil sel juhul tarvis määrata $n(m+1)$ kordajat.

Kui jaotame lõigu n osaks ja igal osal leiame kuupolünoomi, siis tuleb meil määrata $n(3+1) = 4n$ kordajat. Selleks on meil vaja $4n$ lineaarvõrrandit. Kuidas need saadakse?

Olgu meil antud punktid $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, …, $(x_n; y_n)$. Leiame läbi nende punktide pandud kuuppolünoomid, see tähendab, et läbi iga kahe kõrvuti asuva sõlme paneme kolmanda astme polünoomi.

Läbi punktide $(x_0; y_0)$ ja $(x_1; y_1)$ pandud kuuppolünoom on

$$P_{01}(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, \quad x_0 \le x \le x_1. \qquad (1)$$

Läbi punktide $(x_1; y_1)$ ja $(x_2; y_2)$ pandud kuuppolünoom on

$$P_{12}(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, \quad x_1 \le x \le x_2. \qquad (2)$$

. . . . . .

Kuuppolünoom läbi punktide $(x_{n-1}; y_{n-1})$ ja $(x_n; y_n)$ on:

$$P_{(n-1)n}(x) = a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n, \quad x_{n-1} \le x \le x_n. \qquad (n)$$

Määrama peame $4n$ polünoomi kordajat; paraku on selleks tarvis moodustada $4n$ lineaarvõrrandist koosnev võrrandisüsteem.

1⁰ Teame, et võrrand (1) läbib punkte $(x_0; y_0)$ ja $(x_1; y_1)$, seega

$a_1{x_0}^3 + b_1{x_0}^2 + c_1x_0 + d_1 = y_0$, ⟨1⟩ $\quad a_1{x_1}^3 + b_1{x_1}^2 + c_1x_1 + d_1 = y_1$ ⟨2⟩

Teame, et võrrand (2) läbib punkte $(x_1; y_1)$ ja $(x_2; y_2)$, seega

$a_2{x_1}^3 + b_2{x_1}^2 + c_2x_1 + d_2 = y_1$, ⟨3⟩ $\quad a_2{x_2}^3 + b_2{x_2}^2 + c_2x_2 + d_2 = y_2$ ⟨4⟩

. . . . . .

Teame, et võrrand (n) läbib punkte $(x_{n-1}; y_{n-1})$ ja $(x_n; y_n)$, seega

$a_nx_{n-1}^3 + b_nx_{n-1}^2 + c_nx_{n-1} + d_n = y_{n-1}$, $\quad \langle 2n-1\rangle$ $\quad a_nx_n^3 + b_nx_n^2 + c_nx_n + d_n = y_n$ $\langle 2n\rangle$

Saime $2n$ võrrandit $4n$ tundmatuga, seega on veel vaja $2n$ võrrandit.

2⁰ Leiame kõigi funktsioonide (1), (2), ..., (n) esimesed tuletised. Need on

$P'_{01}(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1;$
$P'_{12}(x) = 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2;$
. . . . . .
$P'_{(n-1)n}(x) = 3a_nx^2 + 2b_nx + c_n.$

Kasutame seda, et nende polünoomide esimesed tuletised on pidevad vahepealsetes sõlmedes $x_1, \dots, x_{n-1}$. Seetõttu on esimese ja teise polünoomi esimesed tuletised on võrdsed, kui $x = x_1$. Teise ja kolmanda polünoomi esimesed tuletised on võrdsed, kui $x = x_2$ jne. Seega saame juurde n-1võrrandit:

$$3a_1x_1^2 - 3a_2x_1^2 + 2b_1x_1 - 2b_2x_1 + c_1 - c_2 = 0, \qquad \langle 2\mathrm{n}+1\rangle$$

$$3a_2x_2^2 - 3a_3x_2^2 + 2b_2x_2 - 2b_3x_2 + c_2 - c_3 = 0, \qquad \langle 2\mathrm{n}+2\rangle$$

. . . . . .

$$3a_{n-1}x_{n-1}^2 - 3a_nx_{n-1}^2 + 2b_{n-1}x_{n-1} - 2b_nx_{n-1} + c_{n-1} - c_n = 0. \ \langle 3\mathrm{n}-1\rangle$$

3⁰ Leiame kõigi funktsioonide (1), (2), ..., (n) teised tuletised. Need on

$P''_{01}(x) = 6a_1x + 2b_1; \quad P''_{12}(x) = 6a_2x + 2b_2; \dots; P''_{(n-1)n}(x) = 6a_nx + 2b_n.$

Kasutame seda, et nende polünoomide teised tuletised on pidevad vahepealsetes sõlmedes $x_1, \dots, x_{n-1}$. Seetõttu on esimese ja teise polünoomi teised tuletised on võrdsed, kui $x = x_1$. Teise ja kolmanda polünoomi teised tuletised on võrdsed, kui $x = x_2$ jne. Siit saame juurde veel n - 1võrrandit:

$$6a_1x_1 - 6a_2x_1 + 2b_1 - 2b_2 = 0, \qquad \langle 3\mathrm{n}\rangle$$

$$6a_2x_2 - 6a_3x_2 + 2b_2 - 2b_3 = 0, \quad \langle 3\mathrm{n}+1\rangle$$

. . . . . .

$$6a_{n-1}x_{n-1} - 6a_nx_{n-1} + 2b_{n-1} - 2b_n = 0. \quad \langle 4\mathrm{n}-2\rangle$$

Et $(3n-1) + (n-1) = 4n-2$, siis $4n$ kordaja määramiseks on vaja veel lisaks kaks võrrandit.

4⁰ Kaks veel puudu olevat võrrandit saadakse nn loomulikust eeldusest, et splainfunktsiooni graafiku kõverus peab võrduma nulliga tema otspunktides x_0 ja x_n, teisisõnu – me võtame teised tuletised neis punktides võrdseteks nulliga:

$$6a_1x_0 + 2b_1 = 0, \qquad \langle 4\mathrm{n}-1\rangle$$

$$6a_nx_n + 2b_n = 0. \qquad \langle 4\mathrm{n}\rangle$$

Niiviisi defineeritud kuupsplaine kutsutakse ka *naturaalsplainideks.*

Lisaks naturaalsplainidele on olemas ka palju teisi liike splaine, tuntuimad neist on vast B-splainid ja Bezier splainid. Splaine kasutatakse väga paljudel elualadel, näiteks disainis, arvutigraafikas, auto- ja lennukitöötuses.

Lugege ka https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics)

https://ibiblio.org/e-notes/Splines/Intro.htm