KOMPLEKSARVUD

KOMPLEKSARVU MÕISTE. TEHTED KOMPLEKSARVUDEGA

1. Kompleksarvu mõiste

Võrrandite lahendamine on sundinud matemaatikuid võtma kasutusele uusi arvuhulki. Näiteks võrrandil $8 + x = 3$ ei ole naturaalarvulisi lahendeid. Sellel võrrandil on aga olemas lahend täisarvude hulgas $\mathbb{Z}$. Täisarvude hulgas ei ole lahendeid näiteks võrrandil $2x = 3$. Ratsionaalarvude hulgas $\mathbb{Q}$ on sellel võrrandil lahend olemas. Võrrandil $x^2 = 2$ ei ole lahendeid ratsionaalarvude hulgas. Viimasel võrrandil on aga olemas lahendid reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$. Reaalarvude hulga saame lisades ratsionaalarvude hulgale $\mathbb{Q}$ irratsionaalarvude hulga $\mathbb{I}$: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
Võrrandil $x^2 + 1 = 0$ reaalarvude hulgas lahendeid ei ole, sest ei leidu sellist reaalarvu, mille ruut on võrdne (-1)-ga (võrrandist $x^2 + 1 = 0$ järeldub, et $x^2 = -1$).
Samuti ei ole reaalarvude hulgas lahendeid üldisemal võrrandil $x^2 + a = 0$, kus $a > 0$.
Selleks, et ka niisuguste võrrandite puhul saaks kasutada mõistet "võrrandi lahend", laiendati reaalarvude hulka ühe teatava arvuga, mille ruut on võrdne -1-ga. Kuna ühtegi sellise omadusega reaalarvu ei leidu, siis hakati kujutletavat arvu, mille ruut on -1, nimetama *imaginaarühikuks*[1] ja tähistama tähega i.

Arvu, mille ruut on -1, *nimetatakse* ***imaginaarühikuks*** *ja tähistatakse sümboliga* ***i***, *s.t.* $i = \sqrt{-1}$.

Imaginaarühiku abil saab esitada ruutjuuri negatiivsetest arvudest, näiteks

$\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{-1} = 4i,$

$\sqrt{-10000} = \sqrt{10000 \cdot (-1)} = 100 \cdot \sqrt{-1} = 100i.$

Üldiselt

$$\text{Kui } c > 0, \text{ siis } \sqrt{-c} = \sqrt{c \cdot (-1)} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{c} \cdot i.$$

Arve kujul $a + ib$, kus a ja b on reaalarvud ja i on imaginaarühik, nimeta- takse **kompleksarvudeks**[2]. Kõikide kompleksarvude hulka tähistatakse tavaliselt tähega $\mathbb{C}$.

[1]pr.k. *imaginaire* - kujutletav. Nimetuse imaginaire võttis tarvitusele prantsuse matemaatik Rene Descartes 1637.a.
[2]Sõna “kompleksne” tähendab eesti keeles “liitne”; selle nimetuse andis arvudele $a + bi$ esmakordselt saksa matemaatik Gauss (1777-1855).

Arvu a nimetatakse kompleksarvu $a + ib$ **reaalosaks** ja arvu bi selle **imaginaarosaks**. Kui $a = 0$, siis on tegemist imaginaararvuga bi, kui $b = 0$, siis saame arvu $a + 0 \cdot i$, mis on reaalarv a. Kui $a = b = 0$, siis siis saame tulemuseks arvu 0.
Kaks kompleksarvu on omavahel võrdsed parajasti siis, kui nende reaalosad ja imaginaarosad on vastavalt võrdsed:

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ ja } b = d.$$

Näide 1. Kontrollime, kas arvude $4 - 5i$, $-3i + 2$, $-6i + 4$ ja $2 - 3i$ seas on võrdseid. Esimese ja kolmanda arvu reaalosa 4 (seega võrdsed), kuid nende arvude imaginaarosad ($-5i$ ja $-6i$) pole võrdsed. Seega pole ka arvud omavahel võrdsed. Teisel ja neljandal kompleksarvul on võrdsed nii reaalosa kui ka imaginaarosa. Seega need arvud on omavahel võrdsed. Kas leiad veel võrdsete kompleksarvude paare ?

Kompleksarve $a + bi$ ja $a - bi$ nimetatakse **kaaskompleksarvudeks**.

Näide 2. Leiame kompleksarvudele $4 - 5i$, $3i - 5$ ja $9i$ kaaskompleksarvud.
Kuna kaaskompleksarvude reaalosad on võrdsed ja imaginaarosad vastasmärgi- lised, siis
arvu $4 - 5i$ kaaskompleksarv on $4 + 5i$,
arvu $3i - 5 = -5 + 3i$ kaaskompleksarv on $-5 - 3i$ ja
arvu $9i$ kaaskompleksarv on $-9i$.

Kompleksarvu $a + ib$ vastandarvuks nimetatakse arvu $-(a + ib) = -a - ib$.

Näide 3. Leiame arvudele $4i - 5$ ja $6 - 4i$ vastandarvud.
Vastavalt definitsioonile leiame, et esimese arvu vastandarv on
$-(4i - 5) = -4i + 5 = 5 - 4i$ ja teise arvu vastandarv on
$-(6 - 4i) = -6 + 4i$.
Nii, nagu reaalarvude korral, on ka kompleksarvu ja tema vastandarvu summa võrdne nulliga. Selles veendumiseks liida arvud $a + ib$ ja $-(a + ib)$.

Märkus: Selleks, et kirjutisi lühendada, võib tähistada kompleksarvu $a + ib$ mõne tähega. Matemaatilises kirjanduses kasutatakse sel puhul sageli tähte z. Seega $z = a + ib$. Arvu z kaaskompleksarvu märkimiseks kasutatakse sümbo-lit $\bar{z}$. Kirjutis $z + \bar{z} = 2a$ tähendab seda, et kompleksarvu ja selle kaaskompleksarvu summa on võrdne kompleksarvu kahekordse reaalosaga.

Kui kaks reaalarvu pole võrdsed, siis saab alati neid arve võrrelda ja järjestada suuruse järgi. Kompleksarve aga ei saa järjestada suuruse järgi. Näiteks ei saa määrata, kumb kompleksarv on suurem kas $2 + 3i$ või $3 + 2i$.

Teema alguses selgitasime, et mitte igal ruutvõrrandil pole reaalarvulisi lahendeid. Nad on olemas vaid siis, kui võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminant on kas positiivne või null (s.t. $D = b^2 - 4ac \geq 0$). Esimesel juhul on võrrandil kaks erinevat reaalarvulist lahendit, teisel juhul on lahendid võrdsed.

Missugused on aga ruutvõrrandi lahendid siis, kui võrrandi diskriminant on negatiivne ? Vaatleme mõnda näidet.

Näide 4. Lahendame võrrandid $x^2 + 16 = 0$, $x^2 - 2x + 10 = 0$ ja $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

1) Kui $x^2 + 16 = 0$, siis $x = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16 \cdot i^2} = \pm 4i$. Seega $x_1 = -4i$ ja $x_2 = 4i$.
Kontrollime lahendeid, pidades silmas et $i \cdot i = i^2 = -1$.
$(-4i)^2 + 16 = (-4)^2 \cdot i^2 + 16 = 16 \cdot (-1) + 16 = 0$ ja
$(4i)^2 + 16 = 4^2 \cdot i^2 + 16 = 16 \cdot (-1) + 16 = 0$.
Nagu näha, mõlemad lahendid sobivad. Seega on esialgse võrrandi lahenditeks kaaskompleksarvud $-4i$ ja $4i$.

2) Võrrandi $x^2 - 2x + 10 = 0$ lahendame taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit kasutades:
$x_{1;2} = 1 \pm \sqrt{1 - 10} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i$. Siit $x_1 = 1 + 3i$ ja $x_2 = 1 - 3i$.
Nii nagu esimese võrrandi puhul, on ka nüüd võrrandi lahenditeks kaaskompleksarvud.

3) Võrrand $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ pole küll ruutvõrrand (see on biruutvõrrand), kuid ta lahendatakse analoogiliselt. Teeme muutuja vahetuse $x^2 = t$, saame ruutvõrrandi $t^2 - 3t - 4 = 0$.
Selle võrrandi lahenditeks saame $t_1 = 4$ ja $t_2 = -1$.
Nüüd tuleb meil lahendada võrrandid $x^2 = 4$ ja $x^2 = -1$. Esimese võrrandi lahenditeks on 2 ja -2. Teise võrrandi lahendid on i ja $-i$ (kontrolli seda). Seega saime kokkuvõttes neli lahendit, neist kaks on reaalarvulised ja ülejäänud kaks kompleksarvulised (mis on jällegi kaaskompleksarvud).

2. Tehted kompleksarvudega

Kompleksarve liidame, lahutame, korrutame ja jagame nii nagu kaksliikmeid. Täiendavalt peame arvestama et $i^2 = -1$.

Kompleksarvude liitmine ja lahutamine

Olgu meil antud kaks kompleksarvu $a + bi$ ja $c + di$. Siis

$$\boxed{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.}$$

Näide 5. Leiame summa $(5 + 3i) + (6 + 4i)$.
Siis $(5 + 3i) + (6 + 4i) = (5 + 6) + (3 + 4)i = 11 + 7i$.

Kompleksarvude lahutamine on sarnane liitmisele. Kahe kompleksarvu $a + bi$ ja $c + di$ korral

$$\boxed{(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.}$$

Näide 6. Lahutame arvust $5 + 3i$ arvu $6 + 4i$.
Lahutamise reegli kohaselt $(5 + 3i) - (6 + 4i) = (5 - 6) + (3 - 4)i = -1 - i$.

Kompleksarvude korrutamine ja jagamine

Korrutame arvud $a + bi$ ja $c + di$. Kaksliikmete korrutamise reegli järgi
$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$. Seega

$$\boxed{(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.}$$

Näide 7. Leiame korrutise $(4 - 3i)(5 + 2i)$.
Seega $(4 - 3i)(5 + 2i) = 20 + 8i - 15i - 6i^2 = 26 - 7i$.

Analoogiliselt toimub korrutamine ka kolme või enama teguri korral.

Kahe kompleksarvu summa, vahe või korrutis võivad olla reaalarvud. Näiteks teineteise kaaskompleksarvude $(a+bi)$ ja $(a-bi)$ korrutis on reaalarv $a^2 + b^2$. Kontrolli seda!

Kahe kompleksarvu jagamisel aitab meid lihtne reegel: *laiendame murdu selle nimetajas oleva kompleksarvu kaaskompleksarvuga*. Nii vabaneme imaginaar-susest murru nimetajas.
Seega

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + cbi + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i, \text{ kus } c^2 + d^2 \neq 0.$$

Nagu ratsionaal- ja reaalarvude puhulgi, on kahe kompleksarvu jagatis määratud ainult siis, kui jagaja ei ole kompleksarv 0 $(0 + i \cdot 0)$.

Näide 8. Leiame arvude $4 + 3i$ ja $5 + 2i$ jagatise.

$$\frac{4 + 3i}{5 + 2i} = \frac{(4 + 3i)(5 - 2i)}{(5 + 2i)(5 - 2i)} = \frac{20 - 8i + 15i + 6}{25 + 4} = \frac{26 + 7i}{29} = \frac{26}{29} + \frac{7}{29}\,i.$$

Kompleksarvude astendamine

Kõigepealt leiame arvu i mõned astmed, teades et $i^2 = -1$.
$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^5 \cdot i = -1$, ...
Tekkinud võrduste ahelast paneme tähele, et arvu i astmetel on neli vahelduvat väärtust:
i, -1, $-i$ ja 1.
Nende astmete teadmine on meile abiks astmete $(a + bi)^2$ ja $(a + bi)^3$ leidmisel:
$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$,
$(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b)i - (b^3)i$.

Näide 9. Leiame $(3 + 4i)^2$ ja $(3 + 4i)^3$.
Summa ruudu ja kuubi valemite järgi saame:
$(3 + 4i)^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$ ja
$(3 + 4i)^3 = 27 + 108i - 144 - 64i = -117 + 44i$.

825. Lahenda võrrandid.

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$	b) $x^2 + 15x = 0$	c) $x^2 + 3x + 4 = 0$
d) $2x^2 + 3x + 4 = 0$	e) $x^3 + 2x^2 + 4x = 0$	f) $x^4 + 2x^2 + 9 = 0$

826. On antud arvud:

$20;\ 18\frac{1}{3};\ \sqrt[3]{27};\ \tan 45°;\ e;\ 0{,}(8);\ \log 100;\ \sqrt{0.03};\ 2+3i;\ 5\sqrt{2}i;\ -\sqrt{3}i+4.$

Leia nende arvude seast naturaalarvud, täisarvud, ratsionaalarvud, irratsionaalarvud, kompleksarvud, positiivsed arvud ja negatiivsed arvud.

827. Leia antud kompleksarvu kaaskompleksarv ja vastandkompleksarv.

a) $2 + i$ b) $1 - 5i$ c) $7i - 4{,}4$ d) $-7 + 0i$
e) $0 + 0i$ f) $-(3 - 5i)$ g) $8 - (3 - 5i)$ h) $1 - i - i$

828. Kirjuta kaks kompleksarvu, mille

a) summa on reaalarv;
b) korrutis on reaalarv;
c) summa ja korrutis on mõlemad reaalarvud.

829. On teada, et $i^2 = -1$ ja $\pi \approx 3{,}14$. Kas võib järeldada, et $\sqrt{\pi} > i$? Miks ?

830. Leia kompleksarvu reaal- ja imaginaarosa:

$3 + 2i;\ 4;\ 5 - 7{,}2i;\ -3 - 2i;\ -4 + 3i;\ 5i;\ \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

831. Lihtsusta avaldised.

a) $(3 + 5i) + (4 + 6i)$ b) $(-4 + 6i) - (-7 + 5i)$
c) $(-0{,}2 - 1{,}1i) + (-0{,}8 - 1{,}9i)$ d) $(1\frac{3}{4} - 2{,}5i) - (\frac{1}{3} - 0{,}5i)$

832. Lihtsusta avaldised.

a) $(1 + i) + (2 - 3i) - (3 + 4i)$ b) $(0{,}4 - 4{,}2i) - (1{,}5 + 0{,}6i) + 3{,}3i$
c) $(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i) + (\frac{2}{3} - \frac{3}{4}i) - (\frac{3}{4} + \frac{5}{6}i)$ d) $[0{,}(3) + 1{,}1(6)i] - [0{,}1(3) - 0{,}(2)i]$

833. Korruta.

a) $(3 + 2i)(4 - 5i)$ b) $(5 - 6i)(1 - 3i)$ c) $(1 - i)(1 + i)$
d) $(1 - i)(3 + 4i)$ e) $(-5i - 4)(3 - i)$ f) $(2 - 2i)(4i + 5)$

834. Korruta.

a) $(1 + 2\sqrt{3}\,i)(2 - 3\sqrt{3}\,i)$ b) $2i(1 - \sqrt{3}\,i)(1 + \sqrt{3}\,i)$
c) $(6 - 7i)(5 + i)(3 - 5i)$ d) $2i(7 + 10i)(2 - 4i)$
e) $(2 - 3i)(-1 - i)(3 + 4i)$ f) $(5 + 4i)(-2 - i)(5 - 4i)(-2 + i)$

835. Leia jagatis.

a) $\frac{1}{1+i}$ b) $\frac{3+i}{3-i}$ c) $\frac{2i-3}{1-3i}$ d) $\frac{3-5i}{2+3i}$
e) $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$ f) $\frac{1+\sqrt{15}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$ g) $\frac{\sqrt{6}-i}{\sqrt{6}+2i}$ h) $\frac{1+2i}{1+\sqrt{2}i}$

836. Kontrolli võrduse $i^7 + i^{18} + i^{25} + i^{35} + i^{97} + i^{100} = 0$ kehtivust.

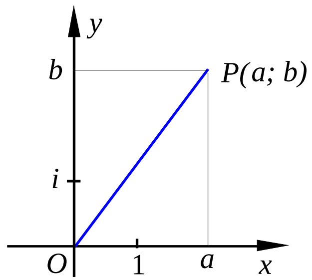
837. Leia aste.

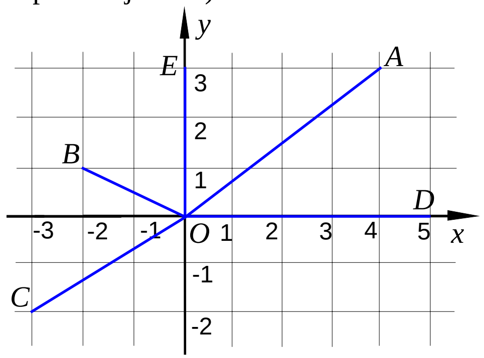
a) $(1 + 2i)^2$ b) $(3 - 5i)^2$ c) $(-3i - 4)^2$
d) $(2 - i\sqrt{3})^2$ e) $(\sqrt{2} - i\sqrt{3})^2$ f) $(1 - i)^4$
g) $(1 + 2i)^3$ h) $(4i - 5)^3$ i) $(\sqrt{2} + i\sqrt{3})^3$

KOMPLEKSARVU GEOMEETRILINE ESITUS. KOMPLEKSARVU TRIGONOMEETRILINE KUJU

1. Kompleksarvu geomeetriline esitus

Iga reaalarvu a võime kujutada arvteljel punktina. Kehtib ka vastupidine: arvtelje igale punktile vastab mingi kindel reaalarv. Kompleksarvu $a + bi$ aga arvteljel kujutada ei saa, kuna ta on määratud oma reaal- ja imaginaarosaga, s.t. reaalarvude järjestatud paariga (a; b). Selline arvupaar määrab tasandil punkti. Joonestame kaks teineteisega ristuvat koordinaattelge. Sellist koordinaat-tasandit, milles kujutatakse kompleksarve, nimetatakse **komplekstasandiks** (vt vasakpoolset joonist).

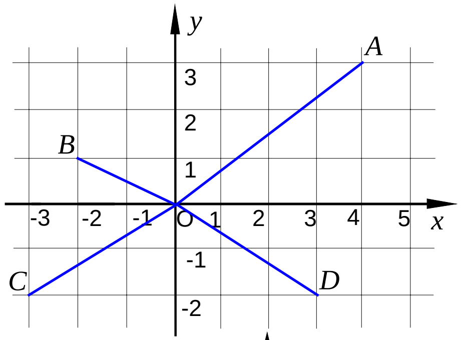




Kompleksarvu reaalosa kujutatakse x-teljel, imaginaarosa aga y-teljel. Seepärast nimetatakse siin x-telge **reaalteljeks** ja y-telge **imaginaarteljeks**.
Kui võtta komplekstasandilt punktid $A(4; 3)$, $B(-2; 1)$, $C(-3; -2)$, $D(5; 0)$ ja $E(0; 3)$, siis neile vastavad kompleksarvud on $4 + 3i$, $-2 + i$, $-3 - 2i$, 5 ja $3i$ (need kompleksarvud on kujutatud parempoolsel joonisel).
On ilmne, et antud koordinaatteljestiku ja pikkusühiku puhul vastab tasandi igale punktile üks ja ainult üks kompleksarv, ja vastupidi - igale kompleksarvule vastab üks ja ainult üks tasandi punkt.
Tutvume veel ühe olulise mõistega. Selleks on *kompleksarvu moodul*. Paneme tähele, et lõik koordinaatide alguspunktist antud kompleksarvuni $a + bi$ on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus. Selle kolmnurga kaatetite pikkused on a ja b. Seega hüpotenuusi pikkus on:
$OP = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Seda arvu nimetataksegi kompleksarvu **mooduliks** (ehk teda kujutava lõigu pikkuseks). Iga nullist erineva kompleksarvu moodul on nullist erinev. Leiame mõnede kompleksarvude moodulid.

Näide 1. Leiame kompleksarvude 1) 4+ 3i; 2) -2 + i; 3) -3 - 2i ja 4) 3 - 2i moodulid (vt. ka joonist).

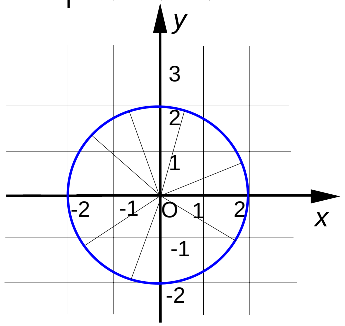
1) $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$;
2) $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$;
3) $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ ja
4) $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.



Selles näites on kahe viimase kompleksarvu moodulid võrdsed, kuid arvud on ise erinevad (mille põhjal saab seda väita ?).

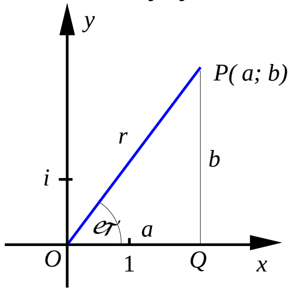
Võib küsida: *kui palju on kompleksarve, mille moodulid on võrdsed* ?
Vastus: lõpmata palju.

Kui kompleksarve kujutavate lõikude otspunktid on koordinaatide alguspunktist ühel kaugusel, siis nende arvude moodulid on võrdsed (vt joonist).



2. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Olgu antud kompleksarv z oma algebralisel kujul: $z = a + bi$. See kompleksarv määrab tasandil järjestatud arvupaari (a; b).



Kujutagu punkt P kompleksarvu $z = a + bi$ (vt joonist). Siis $OQ = a$ ja $PQ = b$.
Tähistame punkti P kauguse koordinaatide alguspunktist O tähega r ja nurga x-telje positiivse suuna ja lõigu OP vahel tähega φ. Siis täisnurksest kolmnurgast OQP saame, et

$\frac{b}{r} = \sin\varphi$, millest $b = r\sin\varphi$ ja $\frac{a}{r} = \cos\varphi$, millest $a = r\cos\varphi$.

Asendame kompleksarvus $a + bi$ tähed a ja b leitud avaldistega, saame:
$a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ ehk

$$\boxed{a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).}$$

Viimane võrdus esitabki kompleksarvu trigonomeetrilise kuju. Arvu r on siin kompleksarvu **moodul** ja nurk φ kompleksarvu **argument**. Vaatleme näiteid selle kohta, kuidas kompleksarvu esitada trigonomeetrilisel kujul.

Näide 2. Esitame trigonomeetrilisel kujul arvu 3 + 4i.
Kõigepealt leiame mooduli:
$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Nüüd arvutame nurga φ tangensi (tangensi kaudu on nurka φ kõige lihtsam leida, sest täisnurkse kolmnurga kaatetid on teada):

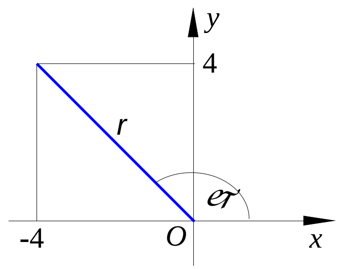
$\tan\varphi = \frac{4}{3} \approx 1{,}333$.

Vähimaks positiivseks nurgaks, mille tangens on 1,333 on ligikaudu 53°7′. *Kontrolliks leia taskuarvutil arctan 1,333!* Kuid ka nurga 180°+53°7′ = 233°7′ tangens võrdub 1,333-ga. Et kompleksarvu 3 + 4i esitav punkt (3; 4) kuulub komplekstasandil esimesse veerandisse, siis nurk 233°7′ arvesse ei tule.
Kompleksarvu 3 + 4i trigonomeetriline kuju on seega
$3 + 4i = 5(\cos 53°7' + i\sin 53°7')$.
Et siinus- ja koosinusfunktsiooni periood on 2π (ehk 360°), siis kompleksarvu 3 + 4i võib üldkujul esitada nii:

$3 + 4i = 5[\cos(53°7' + n\cdot360°) + i\sin(53°7' + n\cdot360°)]$, kus n on suvaline täisarv.

Näide 3. Esitame trigonomeetrilisel kujul arvu -4 + 4i.
Leiame mooduli r, saame
$r = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
Argumendi φ leidmiseks arvutame

$\tan\varphi = \frac{4}{-4} = -1$.



Kuna tangensi väärtus on negatiivne, siis võib φ olla kas teise või neljanda veerandi nurk (135° või 315°). Selleks, et määrata, kumba nurgaga on tegemist, leiame cos φ väärtuse:

$\cos\varphi = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} < 0$.

Seega φ on teise veerandi nurk, sest neljandas veerandis on koosinuse väärtus positiivne. Arvu -4 + 4i võime esitada järgmiselt:
$-4 + 4i = 4\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$ ehk üldkujul
$-4 + 4i = 4\sqrt{2}[\cos(135° + n\cdot360°) + i\sin(135° + n\cdot360°)]$.

Näide 4. Esitame trigonomeetrilisel kujul arvu $-1 - \sqrt{3}\, i$.

Leiame r ja φ. Saame, et $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ ja $\tan \varphi = \sqrt{3}$.

Seega nurk φ võib olla esimeses veerandis (60°) või kolmandas veerandis (240°). Et punkt $(-1;\ -\sqrt{3})$ asub III veerandis, siis võime kompleksarvu esitada kujul

$1 - \sqrt{3}\, i = 2(\cos 240° + i \sin 240°)$ ehk

$1 - \sqrt{3}\, i = 2[\cos (240° + n\cdot 360°) + i \sin (240° + n\cdot 360°)]$.

Lahendame nüüd vastupidise ülesande: *esitame trigonomeetrilisel kujul antud arvu algebralisel kujul*. Kui arv on antud kujul $r(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$, siis me teame selle arvu moodulit ja argumenti. Neist piisab, et kompleksarvu esitada algebra- lisel kujul, sest kehtivad juba varem tuletatud seosed:

$a = r \cos \varphi$ ja $b = r \sin \varphi$.

Näide 5. Esitame algebralisel kujul arvu $4(\cos 30° + i \sin 30°)$.

Leiame reaalosa a ja imaginaarosa b:

$a = r \cos \varphi = 4\cdot\cos 30° = 2\sqrt{3}$ ja $b = r \sin \varphi = 4\cdot\sin 30° = 2$.

Seega $4(\cos 30° + i \sin 30°) = 2\sqrt{3} + 2i$.

Näide 6. Esitame algebralisel kujul arvu $\cos 45° + i \sin 45°$.

Ilmselt on selle kompleksarvu moodul 1, seega

$a = \cos \varphi = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ja $b = \sin \varphi = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Seega $\cos 45° + i \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$.

838. Kujuta kompleksarv graafiliselt.

a) $3 + i$ b) $2 - 3i$ c) $-1 - i$ d) $-2 - 0{,}5i$
e) $2i + 3$ f) $5i$ g) $-3i - 3$ h) $4 + 5i$

839. Leia kompleksarvu moodul ja argument.

a) $1 + i\sqrt{3}$ b) $4 + 3i$ c) $-1 - i\sqrt{3}$ d) $4 - 4i$
e) -42 f) $2\sqrt{3} + 2i$ g) $6\sqrt{3} - 6i$ h) $1 - i\sqrt{3}$

840. Leia kõik sellised kompleksarvud, mille moodul on 3; 1995; 0; -2.

841. Teisenda kompleksarv trigonomeetrilisele kujule.

a) 1 b) $3i$ c) $-2i$ d) $-i$
e) $6i$ f) -2 g) i h) $-5i$

842. Teisenda kompleksarv trigonomeetrilisele kujule.

a) $\sqrt{3} + i$ b) $-\sqrt{3} - i$ c) $6 + 6i\sqrt{3}$ d) $6 - 6i\sqrt{3}$
e) $-6 + 8i$ f) $2{,}7 - 3{,}2i$ g) $1{,}8 + 0{,}52i$ h) $2{,}7 - 1{,}32i$

843. Esita trigonomeetrilisel kujul negatiivne arv $-p$ ($p > 0$). Leia selle arvu moodul ja argument.

844. Teisenda antud arv algebralisele kujule.

a) $2(\cos 60° + i \sin 60°)$ b) $4(\cos 120° + i \sin 120°)$
c) $6(\cos (-60°) + i \sin 60°)$ d) $8(\cos (-150°) + i \sin (-150°))$
e) $\sin 30° + i \cos 30°$ f) $\sin 45° + i \cos 225°$`

TEHTED TRIGONOMEETRILISEL KUJUL ANTUD KOMPLEKSARVUDEGA

Oskame liita, lahutada, korrutada ja jagada kompleksarve, mis on algebralisel kujul. Nüüd uurime, kuidas tehakse samu tehteid arvudega, mis on antud trigonomeetrilisel kujul.

Olgu meil antud kaks kompleksarvu

$a = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ja

$b = r(\cos \beta + i \sin \beta)$.

Igaüks võib veenduda, et kui liita arvud a ja b (või lahutada arvust a arv b), siis tulemuseks saame sellise avaldise, mida üldjuhul pole võimalik lihtsustada. Liidame näiteks arvud $4(\cos 11° + i \sin 11°)$ ja $2(\cos 31° + i \sin 31°)$. Pärast sulgude avamist saame tulemuseks

$4\cos 11° + 4\, i \sin 11° + 2\cos 31° + 2i \sin 31°$.

Saadud avaldist ei saa lihtsustada, seepärast kompleksarvude liitmisel ja lahutamisel ei kasutata trigonomeetrilis kuju.

Kompleksarvude korrutamine ja jagamine

Korrutame arvud a ja b. Tulemuseks saame:

$a\cdot b = Rr(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)$. (1)

Võrduse parema poole edasisel teisendamisel arvestame, et

$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) =$
$= \cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta =$
$= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) =$
$= \cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta)$.

Võrduse (1) võime nüüd esitada kujul

$$\boxed{a\cdot b = Rr\,[\cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta)].}$$

Kahe kompleksarvu korrutamisel nende arvude moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse.

Näide 1. Korrutame arvud $4(\cos 30° + i \sin 30°)$ ja $2(\cos 60° + i \sin 60°)$.

Korrutamise reegli järgi

$4(\cos 30° + i \sin 30°)\cdot 2(\cos 60° + i \sin 60°) = 8(\cos 90° + i \sin 90°) = 8(0 + i\cdot 1) = 8i$.

Tulemuse õigsuses veendumiseks teisendame mõlemad arvud algebralisele kujule ja korrutame.

Esimese arvu reaalosa on $a = r \cos \varphi = 4\cdot\cos 30° = 2\sqrt{3}$ ja imaginaarosa on $b = r \sin \varphi = 4\cdot\sin 30° = 2$.

Seega esimese arvu algebraline kuju on $2\sqrt{3} + 2i$.

Teise arvu reaalosa on $a = r\cos\varphi = 2\cdot\cos 60° = 1$ ja imaginaarosa on
$b = r\sin\varphi = 2\cdot\sin 60° = \sqrt{3}$.
Teise arvu algebraline kuju on seega $1 + \sqrt{3}\,i$.
Kui korrutame esimese arvu teisega, siis saame tulemuseks
$(2\sqrt{3} + 2i)(1 + \sqrt{3}\,i) = 2\sqrt{3} + 6i + 2i - 2\sqrt{3} = 8i$.
Saadud tulemuste võrdlemine näitab, et trigonomeetrilisel ja algebralisel kujul olevate arvude korrutis on võrdne.
Kui on vaja korrutada kolme või enamat kompleksarvu, siis eespool sõnastatud korrutamise reegel jääb kehtima.
Arvude $a = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = m(\cos\beta + i\sin\beta)$ ja $c = n(\cos\gamma + i\sin\gamma)$ korrutise leiame valemist

$$\boxed{abc = kmn[\cos(\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma)].}$$

Kui me jagame kahte kompleksarvu $a = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ja
$b = r(\cos\beta + i\sin\beta)$, siis

$$\frac{a}{b} = \frac{R(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r(\cos\beta + i\sin\beta)} = \frac{R(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)}{r(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\beta - i\sin\beta)}.$$

Kui korrutis $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)$ esitada kujul
$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos(-\beta) + i\sin(-\beta))$, siis

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{R}{r}[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)].}$$

Kahe kompleksarvu jagamisel nende arvude moodulid jagatakse ja argumendid lahutatakse.

Näide 2. Leiame arvude $a = 3(\cos 47° + i\sin 47°)$ ja $b = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$ jagatise. Viimase valemi põhjal

$$\frac{a}{b} = \frac{3(\cos 47° + i\sin 47°)}{2(\cos 30° + i\sin 30°)} = 1{,}5(\cos 17° + i\sin 17°).$$

Kompleksarvude astendamine

Kõigepealt leiame arvu $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mõned astmed.
$a^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2\,i\cos\varphi\sin\varphi + i^2\sin^2\varphi) = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.
$a^3 = r^3(\cos^3\varphi + 3\,i\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\,i^2\cos\varphi\sin^2\varphi + \sin^3\varphi) =$
$= r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$.

Saab tõestada, et üldiselt kehtib valem

$$\boxed{a^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$

Seda valemit nimetatakse ka **Moivre**[3] (loe: *muavr*) valemiks.

Näide 3. Kui $a = 2(\cos 5° + i\sin 5°)$, siis
$a^{10} = 2^{10}(\cos 50° + i\sin 50°)$ ehk
$a^{10} = 1024(\cos 50° + i\sin 50°)$.

Näide 4. Leiame arvu $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}5i$ kahekümnenda astme.
Kõigepealt teisendame arvu trigonomeetrilisele kujule:
$a = \cos 30° + i\sin 30°$ (kontrolli teisenduse õigsust).
Siis $a^{20} = \cos(20\cdot 30°) + i\sin(20\cdot 30°) = \cos 600° + i\sin 600° =$
$= \cos(720° - 120°) - i\sin(720° - 120°) =$
$= -\cos 60° - i\sin 60° = -0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

845. Leia kompleksarvude korrutis zw ja jagatis z/w.
a) $z = 4(\cos 70° + i\sin 70°)$ $w = 2(\cos 40° + i\sin 40°)$
b) $z = 8(\cos 80° + i\sin 20°)$ $w = 4(\cos 80° + i\sin 20°)$
c) $z = 14(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ $w = 7(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$
d) $z = 15(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ $w = 5[(\cos(-60°) + i\sin(-60°)]$

846. Leia kompleksarvude korrutis zw ja jagatis z/w. Tehted tee trigonomeetrilisel kujul.
a) $z = 6(\cos 90° + i\sin 90°)$ $w = 3(\cos 45° + i\sin 45°)$
b) $z = 8(\cos 85° + i\sin 85°)$ $w = 4(\cos 55° + i\sin 55°)$
c) $z = 1 + i$ $w = 1 + \sqrt{3}\,i$ d) $z = \sqrt{3} + i$ $w = 1 - i$

847. Kasuta Moivre valemit kompleksarvu astendamiseks.
a) $[2(\cos 9° + i\sin 9°)]^5$ b) $[\sqrt{2}(\cos 15° + i\sin 15°)]^{10}$
c) $[\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10})]^{10}$ d) $[2(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9})]^6$
e) $[2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})]^9$ f) $(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})^{15}$
g) $(\sqrt{3} - i)^5$ h) $(-1 - \sqrt{3}\,i)^8$ i) $(-1 + 2i)^{12}$

[3] Abraham de Moivre (1667 - 1754) - prantsuse matemaatik.

ALGEBRALISTE VÕRRANDITE LAHENDAMISEST

n-astme algebraliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit, mille vasakuks pooleks on n-astme polünoom ja paremaks pooleks arv 0:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,\ \ a_0 \neq 0.$

Saab näidata, et igal n-astme võrrandil on kompleksarvude hulgas n lahendit.

Näide 1. Lahendame võrrandid $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ ja $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Mõlemad võrrandid on biruutvõrrandid. Tähistades mõlemal juhul $x^2 = y$, saame ruutvõrrandid $y^2 + 5y + 4 = 0$ ja $y^2 - 5y + 4 = 0$.

Esimese ruutvõrrandi lahenditeks on $y = -1$ ja $y = -4$. Teise ruutvõrrandi lahenditeks on $y = 1$ ja $y = 4$.

Nii saame esimesel juhul ruutvõrrandid $x^2 = -1$ ja $x^2 = -4$; teisel juhul aga ruutvõrrandid $x^2 = 1$ ja $x^2 = 4$.

Siit saame et võrrandi $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ lahendid on $x_1 = -i$, $x_2 = i$, $x_3 = -2i$ ja $x_4 = 2i$.

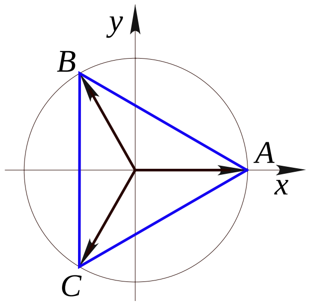
Võrrandi $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ lahendid on $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ ja $x_4 = 2$.

Näide 2. Lahendame võrrandi $z^3 - 27 = 0$.

Et $z^3 - 27 = (z - 3)(z^2 + 3z + 9)$, siis

$z^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow z - 3 = 0 \vee z^2 + 3z + 9 = 0$, kust

$z_1 = 3,\ \ z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$



On lihtne näidata, et need arvud on kõik kompleks-tasandil koordinaatide algusest 3 ühiku kaugusel $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$. Lahendid paiknevad võrdkülgse kolmnurga tippudena. Selles veendumaks esita need arvud trigonomeetrilisel kujul.

848. Leia võrrandi lahendid.

a) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
c) $(x^4 + 3x^2 + 2)(x^2 - 4x + 8) = 0$ d) $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$
e) $x^6 - 1 = 0$ f) $x^3 - 1 = 0$

849. Lahenda võrrand $x^4 = 1$ ja näita, et lahendid kujutavad endast ühiringi sisse joonistatud ruudu tippe komplekstasandil. Kuidas paiknevad võrrandi $x^6 - 1 = 0$ lahendid komplekstasandil?

KOMPLEKSARVUDE RAKENDUSI

Kompleksarve läheb vaja väga paljudel elualadel, siinkohal piirdume ainult paari näitega.

Alalisvoolu korral kehtib Ohmi seadus:

$$E = I \cdot R.$$

Siin E on elektromotoorjõud (pinge), I - voolutugevus ja R - vooluahela takistus.

Vahelduvvoolu korral on koosneb kogutakistus Z aktiivtakistusest R, induktiivtakistusest X_L ja mahtuvustakistusest X_C.

Nendevaheline seos esitub kujul

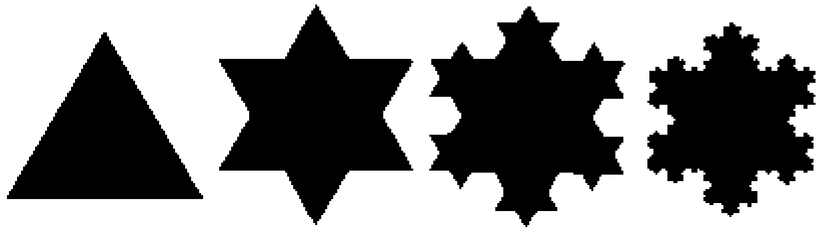
$$Z = R + (X_L - X_C)i.$$

Seega kogutakistus Z on kompleksarv kujul $a + bi$.

Kasutades kompleksarve E, I ja Z, saab näidata, et Ohmi seadus saab kuju:

$$E = I \cdot Z.$$

11. klassi matemaatikaõpiku tagakaanel on pilt ühest omapärasest kujundist, mida nimetatakse Kochi lumehelbeks. Kochi lumehelbe saame järgmisel viisil: Kujutame ette võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega 1 ühik. Selle kolmnurga iga külje jaotame kolmeks osaks. Keskmistele neist osadest kujundame võrdkülgse kolmnurga. Saame tähtkuusnurga. Selle kujundi iga serva jaotame kolmeks osaks. Keskmisele neist osadest kujundame võrdkülgse kolmnurga. Niiviisi jätkates saame lumehelbe kujulise kujundi, mida nimetatakse Kochi helbeks.



Saab näidata, et Kochi helbe pindala on lõplik, aga ümbermõõt on lõpmatu. Toome siinkohal ära ka 11. klassi õpiku tagakaanel oleva ülesande vastused:

$$S_3 = \frac{10\sqrt{3}}{27};\quad Ü_n = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1};\quad S_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + \frac{9^{n-2} - 4^{n-2}}{9^{n-2}\cdot 5}\right).$$

Selliseid "konarlikke" või "sakilisi" kujundeid, mida võib osadeks jaotada ja mille osad on sarnased tervikuga kutsutakse fraktaliteks[4]. Fraktaalse kujuga võib olla rannajoon, puulehe äär, piksenoole trajektoor, pilv, puu või põõsa võra, aga ka elusolendi veresoonte ja närvikiudude võrk.

Kõige tuntum fraktal on Mandelbroti fraktal.

Olgu c kompleksarv. Moodustame jada

$z_0 = 0$

$z_{n+1} = z_n^2 + c.$ $\qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Võttes näiteks $c = i$, saame jada esimesteks liikmeteks

$z_0 = 0$
$z_1 = 0 + i = i$
$z_2 = i^2 + i = -1 + i$
$z_3 = (-1 + i)^2 + i = -i$
$z_4 = (-i)^2 + i = -1 + i$
$z_5 = (-1 + i)^2 + i = -i$
...

Paneme tähele, et selle jada punktid ei satu koordinaatide alguspunktist kuigi kaugele (leia nende kompleksarvude moodulid!).

Kui aga võtta algväärtuseks $c = 1 + i$, siis saame jada esimesteks liikmeteks

$z_0 = 0$
$z_1 = 0 + (1 + i) = 1 + i$
$z_2 = (1 + i)^2 + (1 + i) = 1 + 3i$
$z_3 = (1 + 3i)^2 + (1 + i) = -7 + 7i$
$z_4 = (-7 + 7i)^2 + (1 + i) = 1 - 97i$
$z_5 = (1 - 97i)^2 + (1 + i) = -9407 - 193i$

Selle jada liikmed kaugenevad koordinaatide alguspunktist tõkestamatult.

Mandelbroti[5] hulgaks nimetatakse kõigi kompleksarvude c hulka, mille korral jada z_n on tõkestatud (s.t. kõik punktid z_n on komplekstasandil mingi sellise ringjoone sees, mille keskpunktiks on koordinaatide alguspunkt).

Eelneva põhjal arv i kuulub Mandelbroti hulka, aga arv $1 + i$ ei kuulu.

Selleks et teada, milliste c väärtuste puhul jada z_n koondub või hajub, tuleb lihtsalt proovida kõiki c väärtusi ja kontrollida, kas antud andmete korral jada z_n on tõkestatud. Kui jada koondub, siis tuleks antud punkt komplekstasandil värvida ühe värviga, kui hajub, siis teise värviga.

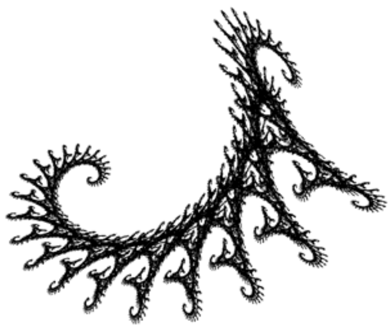
Saab näidata, et Mandelbroti hulk on punktihulk, mis mahub komplekstasandil ringi $x^2 + y^2 \leq 4$ sisse.

Seega tuleks fraktali joonistamiseks käia läbi see komplekstasandi piirkond, ning iga erineva c puhul kontrollida koonduvust. Koonduvuse kontrollimine ei ole aga lihtne, sest näiteks kui võtta $c = 0,2501$, siis jääb veel 900 järjestikuse jada liikme korral resultaat ringi $x^2 + y^2 \leq 4$ sisse. Tegelikult aga see väärtus Mandelbroti hulka ei kuulu. Seetõttu uuritakse fraktaleid arvuti abil.

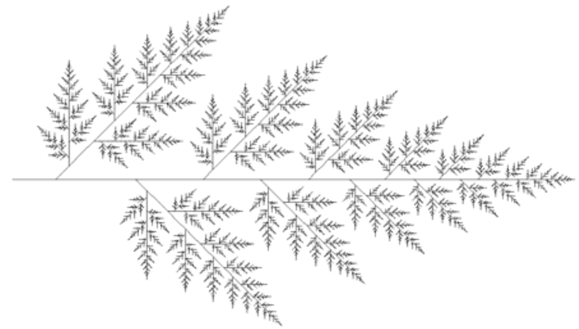
Paljudel Mandelbroti fraktalite piltidel on rohkem kui kaks värvi. Need värvid saadakse järgmiselt: Kui mõned punktid väljuvad ringist $x^2 + y^2 \leq 4$ alles peale 200-ndat liiget siis värvitakse need näiteks punaseks, kui peale 300-ndat liiget, siis kollaseks jne. Värvilisi pilte fraktalitest näed ka õpiku tagakaanel.

Mandelbroti fraktalil on tähelepanuväärne omadus - see on enesesarnasus. See tähendab, et objekti mõni detail on sarnane objekti kui tervikuga. Tagakaanel oleval pildil ongi Mandelbroti fraktal ja selle järjestikused suurendused.

Ka järgnevatel piltidel on kujutatud mõned fraktalid:







[4] Fraktalite kohta ilmus ajakirja "Horisont" 1995. a. numbrites 1-6 Jüri Engelbrechti ja Ragnar Kurmi artiklite seeria "Arvutiga maailma avastamas". Sealt leiad põhjalikuma ülevaate.
[5] Mandelbrot, Benoit (20.11.1924 -), poola päritolu ameerika matemaatik.