

KOCHI LUMEHELBE ÜMBERMÕÖDU JA PINDALA LEIDMINE

Võrdkülgse kolmnurga külge on 1 m pikk. Jaotame selle kolmnurga iga külje kolmeks võrdseks osaks ning ehitame iga külje keskmisele osale võrdkülgse kolmnurga. Saame joonisel kujutatud "tähtkuusnurga". Saadud tähtkuusnurga iga külje jaotame kolmeks võrdseks osaks ning ehitame keskmisele osale neist võrdkülgse kolmnurga. Tulemusena saame hulknurga, millel on 48 külge. Jätkame sellist protsessi lõpmatuseni. Leiame nii tekkiva lumehelbe kujulise kujundi (Kochi lumehelbe) ümbermõõdu ning pindala. Olgu K_n on külgede arv, L_n ühe külje pikkus, $\tilde{U}_n$ ümbermõõt ja S_n pindala.

$$K_0 = 3 \quad L_0 = 1 \quad \tilde{U}_0 = 3 \quad S_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$K_1 = 4K_0 = 12 \quad L_1 = \frac{1}{3} L_0 = \frac{1}{3} \quad \tilde{U}_1 = \frac{4}{3} \tilde{U}_0 = 4$$

$$S_1 = S_0 + \frac{K_0}{9} S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$K_2 = 4K_1 = 3 \cdot 4^2 = 48 \quad L_2 = \frac{1}{3} L_1 = \frac{1}{9} \quad \tilde{U}_2 = \frac{4}{3} \tilde{U}_1 = \frac{16}{3}$$

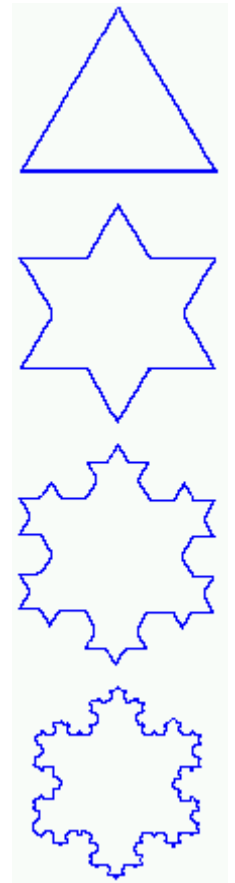
$$S_2 = S_1 + \frac{K_1}{9^2} S_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{12}{9^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3^3} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$$

$$K_3 = 4K_2 = 3 \cdot 4^3 = 192 \quad L_3 = \frac{1}{3} L_2 = \frac{1}{27} \quad \tilde{U}_3 = \frac{4}{3} \tilde{U}_2 = \frac{64}{9}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{K_2}{9^3} S_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3^3} + \frac{48}{9^3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{4\sqrt{3}}{243} = \frac{94\sqrt{3}}{243}.$$

$$K_n = 4K_{n-1} = 3 \cdot 4^n; \quad L_n = \frac{1}{3} L_{n-1} = \frac{L_0}{3^n}; \quad \tilde{U}_n = \frac{4}{3} \tilde{U}_{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \tilde{U}_0;$$

$$S_n = S_{n-1} + \frac{K_{n-1}}{9^n} S_0.$$



Tuletame valemi, millega saaksime esitada Kochi fraktali pindala S_n esialgse kolmnurga pindala S_0 kaudu:

$$S_n = S_0 + \frac{3}{9} S_0 + \frac{3 \cdot 4}{9^2} S_0 + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} S_0 + \frac{3 \cdot 4^3}{9^4} S_0 + \dots + \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n} S_0.$$

Toome alates teisest liikmest $\frac{1}{3} S_0$ sulgude ette, saame:

$$S_n = S_0 + \frac{1}{3} S_0 \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \right).$$

Kasutame sulule geomeetrilise jada summa valemit:

$$S_n = S_0 + \frac{1}{3} S_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{9}} \right) = S_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} S_0 \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right) = S_0 + \frac{3}{5} S_0 \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right).$$

Saime otsitud valemi

$$S_n = S_0 + \frac{3}{5} S_0 \left(1 - \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \right).$$

Kui $n \rightarrow \infty$, siis $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \rightarrow 0$, seega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{8}{5} S_0 = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0,69282032 \dots$$

Kochi lumehelbe übermööd ja pindala

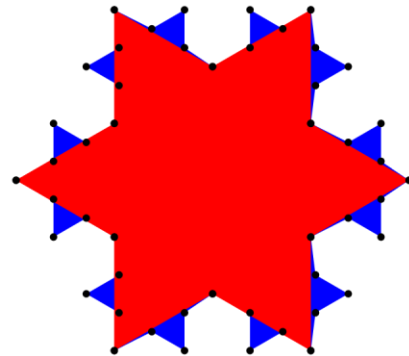
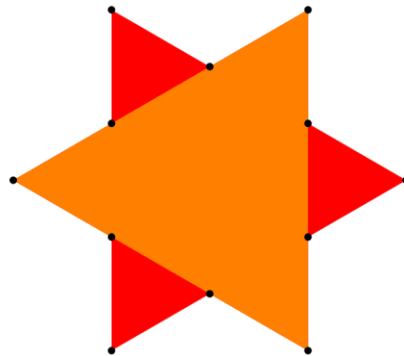
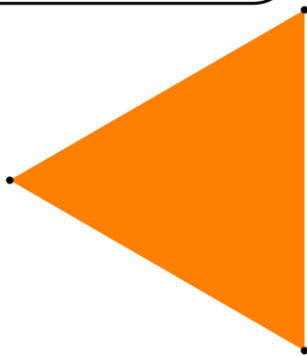
$$K_0 = 3; L_0 = 1; \ddot{U}_0 = 3;$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Tähised :

K_i – i – nda hulknurga külgede arv; L_i – i – nda hulknurga külje pikkus;

$\ddot{U}_i$ – i – nda hulknurga übermööd; S_i – i – nda hulknurga pindala.



$$K_1 = 4 \cdot K_0 = 12; L_1 = \frac{1}{3} \cdot L_0 = \frac{1}{3}; \ddot{U}_1 = \frac{4}{3} \cdot \ddot{U}_0 = 4;$$

$$S_1 = S_0 + \frac{K_0}{9} \cdot S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$K_n = 4 \cdot K_{n-1} \quad L_n = \frac{1}{3} \cdot L_{n-1} \quad \ddot{U}_n = \frac{4}{3} \cdot \ddot{U}_{n-1}$$

$$S_n = S_{n-1} + \frac{K_{n-1}}{9^n} \cdot S_0$$

Kochi lumehelbe übermöödu ja pindala arvutamise_abipilt.ggb

Fail Redigeeri Vaade Võimalused Tööriistad Aken Abi

Liiguta
Lohistage või valige objektid

Graafikavaade

Kochi lumehelbe übermööd ja pindala

Tähised :

K_i – i – nda hulknurga külgede arv; L_i – i – nda hulknurga külje pikkus;

$\ddot{U}_i$ – i – nda hulknurga übermööd; S_i – i – nda hulknurga pindala.

$K_0 = 3; L_0 = 1; \ddot{U}_0 = 3;$

$S_0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

$K_1 = 4 \cdot K_0 = 12; L_1 = \frac{1}{3} \cdot L_0 = \frac{1}{3}; \ddot{U}_1 = \frac{4}{3} \cdot \ddot{U}_0 = 4;$

$S_1 = S_0 + \frac{K_0}{9} \cdot S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$K_n = 4 \cdot K_{n-1}; L_n = \frac{1}{3} \cdot L_{n-1}; \ddot{U}_n = \frac{4}{3} \cdot \ddot{U}_{n-1};$

$S_n = S_{n-1} + \frac{K_{n-1}}{9^n} \cdot S_0.$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{8}{5} S_0 = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0,692820323...$

Arvutustabeli vaade

E3 = E2 + B2 \$E\$2 / 9^A3

	A	B	C	D	E
1	Indeks n	Külgede arv	Külje pikkus	Übermööd	S_n
2	0	3	1	3	0.4330127019
3	1	12	0.3333333333	4	0.5773502692
4	2	48	0.1111111111	5.3333333333	0.6415002991
5	3	192	0.037037037	7.1111111111	0.6700114235
6	4	768	0.012345679	9.4814814815	0.6826830344
7	5	3072	0.0041152263	12.6419753086	0.6883148614
8	6	12288	0.0013717421	16.8559670782	0.6908178956
9	7	49152	0.0004572474	22.4746227709	0.6919303553
10	8	196608	0.0001524158	29.9661636946	0.6924247818
11	9	786432	0.0000508053	39.9548849261	Arv E10: E9 + B9 \$E\$2 / 9^A10
12	10	3145728	0.0000169351	53.2731799014	0.6927421914
13	11	12582912	0.000005645	71.0309065353	0.6927855979
14	12	50331648	0.0000018817	94.7078753803	0.6928048896
15	13	201326592	0.0000006272	126.2771671738	0.6928134637
16	14	805306368	0.0000002091	168.3695562317	0.6928172745
17	15	3221225472	0.0000000697	224.4927416423	0.6928189681
18					

Väljade sisu:

A2=0 A3=1 B2=3 B3=B2*4 C2=1 C3=C2/3 D2=3 D3=D2*4/3 E2=sqrt(3)/4 E3=E2+B2*\$E\$2/9^A3

Kuidas teha graafikaaknas olevaid fraktalite pilte? Siin on mitmeid võimalusi. Alla tasub võtta kolmnurkvõrgustik. Võrgustiku punktide külge kinnitamine võiks peale seatud olla. Vasakpoolse suure kolmnurga külje pikkus võiks olla näiteks 9 ühikut või 9-kordse suurenduse ning (1/9) abijoonte puhul 1 ühik. Tähtkuusnurga tippude saamiseks teeme kõigepealt esimese kolmnurga tippudele nii pika lükke paremale, et tulevane uus kolmnurk ei satuks esialgse kolmnurga peale; aga planeeritava tähtkuusnurga (see on tegelikult mittekumer 12-nurk) tipud oleksid kolmnurkvõrgustiku sõlmpunktides. Seejärel märgime kolmnurkvõrgustiku sõlmpunktidesse ülejäänud 9 tähtkuusnurga tippu ning teeme valmis tähtkuusnurga. Tähtkuusnurga peale teeme teise suure kolmnurga. Järgmiseks teeme tähtkuusnurgale (või selle 12 tipule) nii pika lükke paremale, et täht24-nurga (mis on tegelikult mittekumer 48-nurk) tipud satuksid koordinaatvõrgustiku sõlmpunktidesse. Lõpuks teeme 48-nurga ja selle peale tähtkuusnurga.