

Geomeetrilisi nuputamisülesandeid

Tööjuhend

Tööjuhendis õpetatakse tegema kolme geomeetrilist nuputamisülesannet GeoGebras, mida saab näidata gümnasistidele ja ilmselt ka põhikooli lõpuklassidele matemaatikatunnis mõnusaks vahelduseks ja veidikeseks nuputamiseks. Ülesanded on koostatud nõ slaididena nii, et igale ülesandele on pühendatud kolm slaidi: kõigepealt on antud ülesanne, kui lahendaja peaks hätta jääma, on järgmisel slaidil suunavad vihjed antud, ning siis on ülesanne veidi lahti seletatud ning vastus on ka antud.

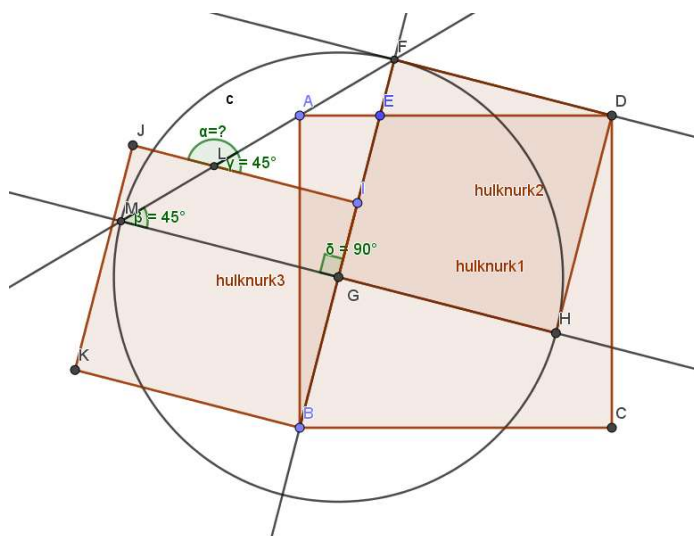
Mina panin kõik ülesanded ühte GeoGebra faili, kuid igat ülesannet saab ka eraldi failina teha.

- 1) Selleks, et teha ühe failina, loo kõigepealt liugur, miinimumiks 1 ja maksimumiks 9 kasvuga 1.
- 2) Lisa tekst „Geomeetrilisi nuputamisülesandeid“ soovitud kohale (soovitan üles äärde paigutada) graafikavaates. See tekst jääb kõikidele slaididele.

Hakkame ülesandeid koostama! (**PS!** Siin on tähistused objektidele pandud nii, nagu ülesanded oleks eraldi failidesse tehtud.)

I ülesanne: On antud kolm ruutu. Leia märgitud nurga suurus.

- 1) Tee ruut korrapärase hulknurga tööriistaga. Külje pikkus pole oluline.
- 2) Tipust B tee sirge läbi külje AD. Tee saadud sirgele ristsirge läbi punkti D. Märgi nende sirgete lõikepunkt. Tee sirge läbi saadud lõikepunkti ja tipu A.
- 3) Tee uus ruut korrapärase hulknurga tööriistaga. Vali tippudeks punktid D ja F.
- 4) Punkt objektile tööriistaga vali suvaline punkt lõigul BE. Tee kolmas ruut korrapärase hulknurga tööriistaga. Vali tippudeks punktid B ja I.
- 5) Tee sirge läbi punktide I ja J. Märgi selle sirge ja sirge, mis läbib punkte A ja F, lõikepunkt. Märgi lõik FL ja BF.
- 6) Märgi nurk α , mis on nurk FLJ, ja pane pealdiseks „ $\alpha=?$ “.
- 7) Tee ringjoon, mille keskpunktiks on punkt G ja raadiuseks lõik GF. Loo selle raadiusega risti olev diameeter. Loo nurgad GMF, ILF ja FGM.



Joonis 1. Seitsmenda punkti lõpuks peaks joonis selline välja nägema.

- 8) Vali objektid hulknurk1, hulknurk2, hulknurk3, lõigud BF ja FL, punktid A, B, D, E ja I, α , ning lisavõimaluste alt kirjuta lahtrisse „Tingimus, millal näidata objekti“ $a \leq 3$.
- 9) Järgmisele slaidile lisa vihjed ehk ringjoon c, diameeter HM, lõik FM. Tingimus, millal näidata objekti: $2 \leq a \leq 3$.

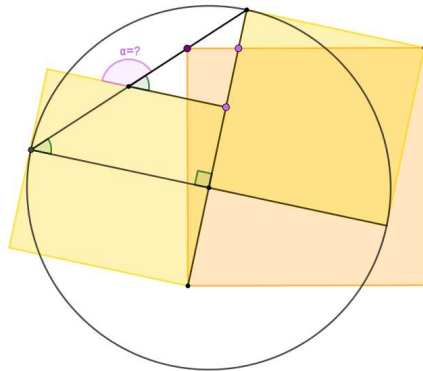
10) Kolmandale slaidile lisa nurgad β , γ , δ . Lisaks võid panna selgitava teksti ja vastuse. Kui seda ei lisa, võid need nurgad juba eelmisele slaidile lisada. Tingimus, millal näidata objekti: **a = 3**. Ülejäänud objektid peida.

11) Võta jooniselt maha tähistused. Jäta alles ainult nurga α pealdis. Kujunda joonis vastavalt oma maitsele!

a = 3

Geomeetrilisi nuputamisülesandeid

Antud on kolm ruutu. Kui suur on märgitud nurk?



Võtame ringi raadiuseks ruudu külje. Ühendades kahe ristuva raadiuse otspunktid, näeme, et tekkinud täisnurkse võrdhaarse kolmnurga hüpotenuus ühtib märgitud nurga haaraga. Saame sarnased kolmnurgad, mille alusnurgad on 45° .

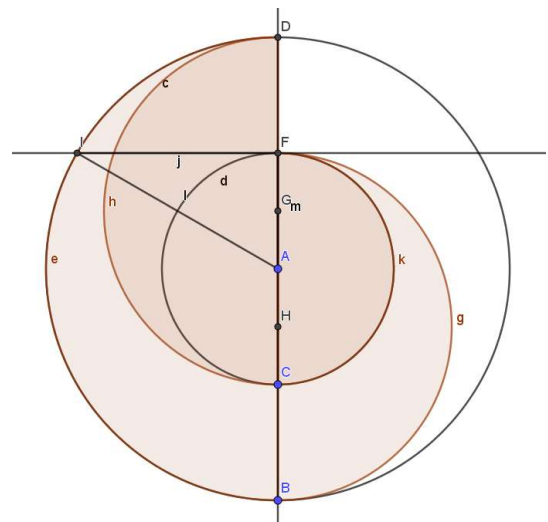
Kõrvunurkade reegli järgi on $\angle \alpha$ suuruseks seega

$$\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Joonis 2. Lõpptulemus võiks midagi sellist välja näha.

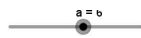
II ülesanne: Suurima ja väikseima poolringi keskpunktid ühtivad. Kui suur on sinise ala pindala?

- 1) Tee suvaline ringjoon ja sinna sisse, samast keskpunktist, teine ringjoon. Tee sirge läbi punktide A ja B. Märgi ringjoonte lõikepunktid selle sirgega.
- 2) Märgi sellele sirgele punktide F ja B ning C ja D keskpunkt.
- 3) Vali tööriist "Ringi sektor keskpunkti ja kahe punktiga". Joonista poolringid järjestuses ADB, HBF, GDC, ACF. On oluline teha need selles järjekorras, et saaksid hiljem spiraalilaadse kujundi värvida.
- 4) Tee ristsirge diameetriga punktist F. Märgi lõikepunkt selle sirge ja suure ringjoonega. Tee lõik FI. Lisa sellele tekst „2 ühikut“.
- 5) Märgi joonisele diameeter ehk lõik BD, lõik AI ja AF.
- 6) Vali poolringid, lõigud FI ja BD ning jäta need näha, kui **a ≤ 3** (kui teed kõik ühte faili, siis tingimuseks on **4 ≤ a ≤ 6**).
- 7) Teisele slaidile lisa lõigud AI ja AF. Võid need ümber nimetada vastavalt R ja r. Tingimus: **2 ≤ a ≤ 3** (ühes failis tingimus: **5 ≤ a ≤ 6**).



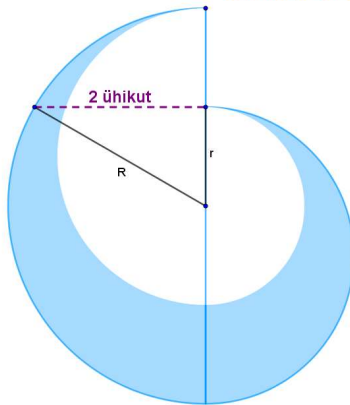
Joonis 3. Viienda punkti lõpuks peaks joonis nägema välja selline.

- 8) Kolmandale võid lisada selgitava teksti. Tingimus: **a = 3 (ühes failis tingimus: a = 6).**
Ülejäänud objektid peida.
- 9) Võta maha tähistused ja kujunda joonis vastavalt oma maitsele! (**PS!** Et saada eriti hea spiraal, tee kaks viimasena tehtud poolringi läbipaistmatuks ja valgeks.)



Geomeetrilisi nuputamisülesandeid

Suurima ja väikseima poolringi keskpunktid ühtivad. Kui suur on sinise ala pindala?



Olgu väikseima poolringi raadiuseks $r \Rightarrow$ selle poolringi pindala on $S_r = \frac{\pi r^2}{2}$

Suurima poolringi raadiuse saame arvutada Pythagorase teoreemiga $\Rightarrow R = \sqrt{4 + r^2}$

Seega suurima poolringi pindala on $S_R = \frac{\pi \cdot (\sqrt{4 + r^2})^2}{2} = \frac{\pi \cdot (4 + r^2)}{2}$

Kahe keskmise suurusega poolringi pindala on sama suured, sest nende diameetrid on võrdsed. Seega tähistame nende pindala A.

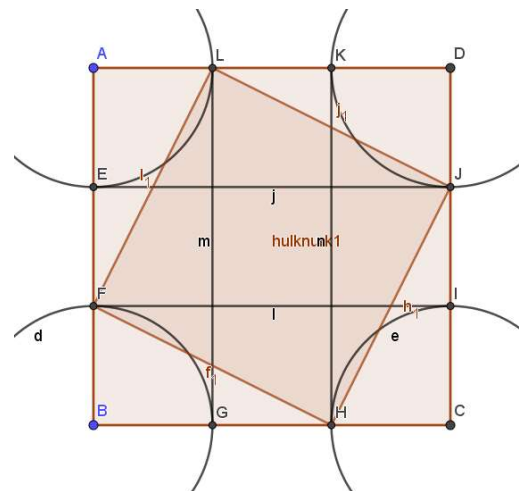
Sinise ala pindala on $S_s = (S_R - A) + (A - S_r) = S_R - S_r$

$$S_s = \frac{\pi \cdot (4 + r^2)}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4\pi + \pi r^2 - \pi r^2}{2} = 2\pi$$

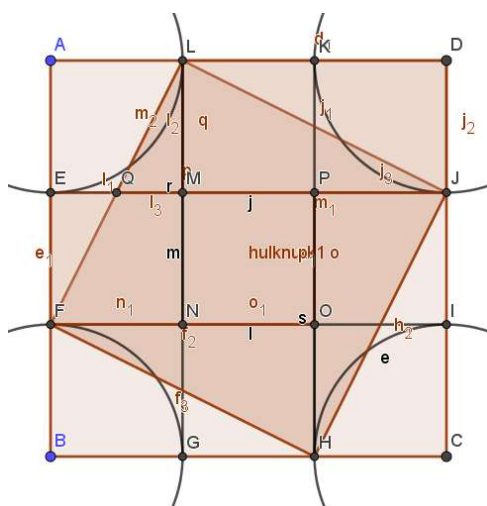
Joonis 4. Lõpptulemus võiks midagi sellist tulla.

III ülesanne: Lillad ristkülikud on võrdsed. Kui suure osa moodustab roheline ala musta ruudu pindalast?

- 1) Tee korrapärase hulknurga tööriistaga ruut. Jaga küljed kolmeks nii, et teed igast ruudu tipust ringjoone raadiusega $\frac{1}{3}$ külje pikkusest. Märki igale küljele ringjoone ja külje lõikepunktid ja tee lõigud vastava vastaskülje punktiga.
- 2) Tee hulknurga tööriistaga ruut FHJL. (Joonis 5)
- 3) Märki joonisele lõikude j, l, m, n lõikepunktid. Tee ristkülik DLMJ, EFOP, kolmnurk MLQ, kujund POFHJ, lõigud LN ja PH.



Joonis 5



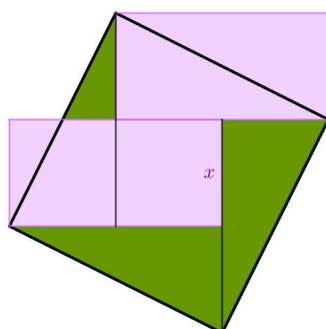
Joonis 6. Peale kolmandat punkti peaks joonis välja nägema selline.

- 4) Vali tehtud ristkülikud, kolmnurk, ruut ja viisnurk ning jätta need nähtavaks, kui $a \leq 3$. (Ühes failis $a \geq 7$).
- 5) Teisele slaidile lisa lõigud PH ja LN ning ühele ristküliku lühemale küljele tekst "x". Tingimus: $2 \leq a \leq 3$. (Ühes failis $a \geq 8$)
- 6) Viimasele slaidile võid lisada selgitava teksti ja vastuse. Tingimus: $a = 3$. (Ühes failis $a = 9$). Ülejäänud objektid peida.
- 7) Võta maha tähistused ja kujunda joonis oma maitse järgi. (PS! Kolmnurk ja viisnurk tee ühte värvi.)



Geomeetrilisi nuputamisülesandeid

Lillad ristkülikud on võrdsed. Kui suure osa moodustab roheline ala musta ruudu pindalast?



Joonis 7. Selline võiks välja näha lõpptulemus.

Olgu ristküliku lühem külg x . Jagades musta ruudu neljaks võrdses täisnurkseks kolmnurgaks, saame, et ristküliku pikem külg on $2x$.

$$\text{Seega roheline ala pindala on } S_k = 2 \cdot \frac{x \cdot 2x}{2} + \frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{9x^2}{4}$$

$$\text{Musta ruudu külg on ristküliku diagonaal} \Rightarrow a = \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5x^2}$$

$$\text{Musta ruudu pindala on } S_m = (\sqrt{5x^2})^2 = 5x^2$$

$$\text{Roheline ala moodustab mustast ruudust } \frac{\frac{9x^2}{4}}{5x^2} = \frac{9}{20}$$

Kasutatud allikad/inspiratsioon:

Briti matemaatikaõpetaja Catriona Agg

Tema Twitter: <https://twitter.com/Cshearer41>

Rohkem ülesandeid temalt:

<https://drive.google.com/file/d/1hVP8tLURVDphmHsphz5BQLVzHCeTts29/view>