

GeoGebra II tööjuhendite komplekt

Parabooli ja sirge joonistamine. Joonte lõikepunktid. Funktsiooni nullkohad ja ekstreemumid. Lõikepunktide vahele jääva kujundi pindala.

Tööjuhend:

1) Kirjuta sisendireale **$f(x) = x^2 + 2x - 1$**

Tulemusena saad algebravaates funktsiooni

$f(x) = x^2 + 2x - 1$ ja graafikavaates selle funktsiooni graafiku.

2) Tee sedasama funktsiooniga $g(x) = x + 1$

3) Leia nende funktsioonide lõikepunktid. Kirjuta sisendireale **Lõikepunkt[g, f]**

4) Leia funktsiooni $f(x) = x^2 + 2x - 1$ nullkohad Kirjuta sisendireale: **Nullkohad[f]**

5) Leia funktsiooni $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ekstreemum lõigus $[-2; 0]$.

Kirjuta sisendireale: **Ekstreemum[f, -2, 0]**

6) Leia lõikepunktide vahele jääva kujundi pindala. Kirjuta

sisendireale: **IntegraalVahemikus[g, f, -2, 1]**. Saad $\int_{-2}^1 (g(x) - f(x)) dx = 4.5$

Funktsiooni graafiku muutmine liugurite abil. Ringjoone võrrandi sisestamine.

Ringjoone ja parabooli lõikepunktid. Graafikute värvi jms muutmine.

Tööjuhend:

1) Kirjuta sisendireale: **$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$** Seejärel loo liugurid a, b ja c jaoks. Muutes a väärtust, näed, kuidas muutub parabooli kuju; muutes b ja c väärtusi, näed, kuidas muutub parabooli asend teljestikus.

2) Sisesta sisendireale ringjoone võrrand: **$x^2 + y^2 = 25$** Nüüd peaks algebravaates olema näha koonuselõige **$d: x^2 + y^2 = 25$** ja graafikavaates vastav ringjoon.

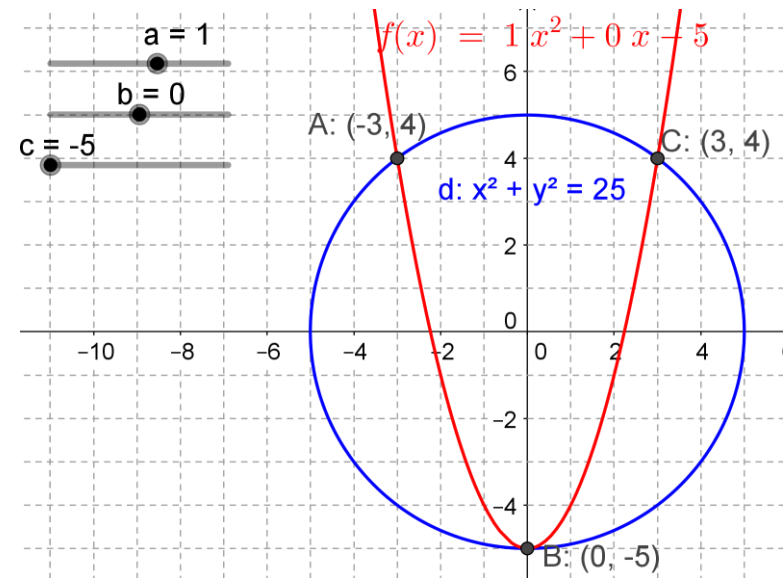
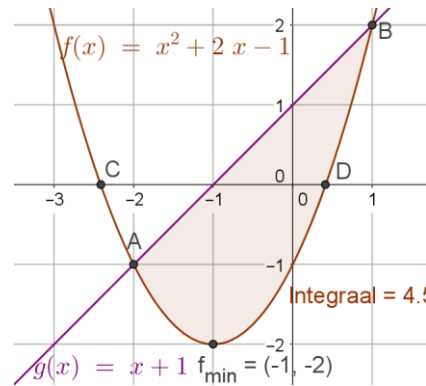
3) Ringjoon ja parabool võivad lõikuda 0 kuni 4 punktis. Muuda liugurite abil a, b ja c väärtusi nii, et paraboolil ja ringjoonel oleks neli lõikepunkti.

4) Leia parabooli ja ringjoone lõikepunktid. Sisesta sisendireale: **Lõikepunkt[f, d]**

5) Sea liugurite abil paika väärtused **$a=1$, $b=0$ ja $c=-5$** . Tulemusena peaks parabool $f(x) = x^2 - 5$ ja ringjoon $x^2 + y^2 = 25$ lõikuma kolmes punktis A(-3;4), B(0;-5) ja C(3; 4).

6) Muuda joonte paksust ja värvi ning lõikepunktide suurust. Vihje: parema hiireklahviga → Omadused → Värv ja Stiil.

7) Näita joonisel ka joonte võrrandeid ning lõikepunktide koordinaate. Vihje: parema hiireklahviga → Omadused → Üldine → Tähis → Tähis ja väärtus.



Siinusfunktsiooni ja selle puutuja ja tuletisfunktsiooni joonistamine. Puutepunkti ja puutuja animeerimine

1) Kirjuta sisendireale: **Kui[abs(x) ≤ 2Pi, sin(x)]**

2) Olgu arv a puutepunkti x-koordinaat. Teeme liuguri, mis hakkab muutma arvu a vahemikus $[-2\pi; 2\pi]$ sammuga 0.1.

3) Kirjuta sisendireale: **A=(a, f(a))**. Tulemusena saad graafikul liikuva punkti A.

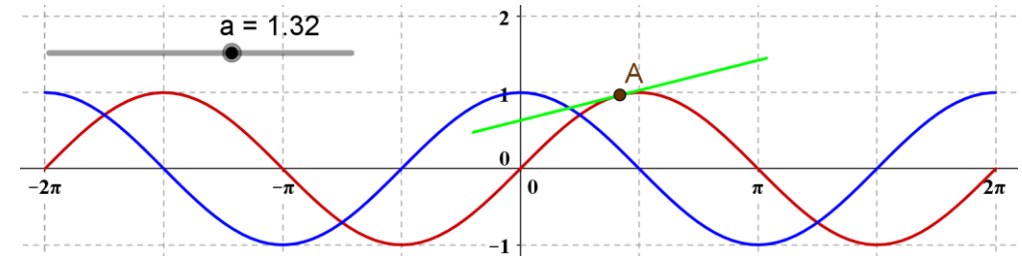
4) Kirjuta sisendireale: **g(x)=Puutuja[a, f]** Tulemusena liigub puutuja koos puutepunktiga.

5) Kirjuta sisendireale: **h(x)=Tuletis[f]**. Tulemusena saad tulerisfunktsiooni $h(x) = \cos x$.

6) Märgi x teljel ühikuteks arvu π kordsed. Selleks vali

Võimalused → Lisavõimalused → Graafikavaade → x-telg → ühik → π .

7) Lõpuks võid muuta oma graafikuid visuaalselt atraktiivsemateks.



Parameetriliste võrranditega jooned (näiteks ring, ellips ja tsükloid)

Kui ringjoone keskpunkt on (0;0) ja raadius on a; siis on ringjoone võrrandiks $x^2 + y^2 = a^2$.

Sama ringjoone saab kirja panna parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}; \text{ kus } 0 \leq t < 2\pi.$$

1) Näiteks ühikringjoone joonistamiseks kirjuta sisendreale:

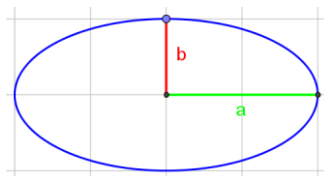
Ühikring=Kõver[cos(t), sin(t), t, 0, 2Pi]

Kui ellipsi keskpunkt on (0; 0) ja ellipsi telgedeks on koordinaatteljed ja tema poolteljed on a ja b , siis on ellipsi võrrandiks

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ellipsi parameetrilised võrrandid on aga

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \text{ kus } 0 \leq t < 2\pi.$$



2) Ellipsite joonistamiseks kirjuta sisendreale **Ellips=Kõver[a*cos(t), b*sin(t), t, 0, 2pi]**

Nüüd saab teha kaks liugurit pooltelgede pikkuste muutmiseks. Raadiuste a ja b minimaalne väärtus olgu 0, maksimaalne väärtus olgu 4, samm olgu 0.1. Nüüd saab muuta ellipsi pooltelgede pikkusi ja vaadata, kuidas muutub ellipsi kuju. Võrdsete pooltelgedega ellips on ringjoon.

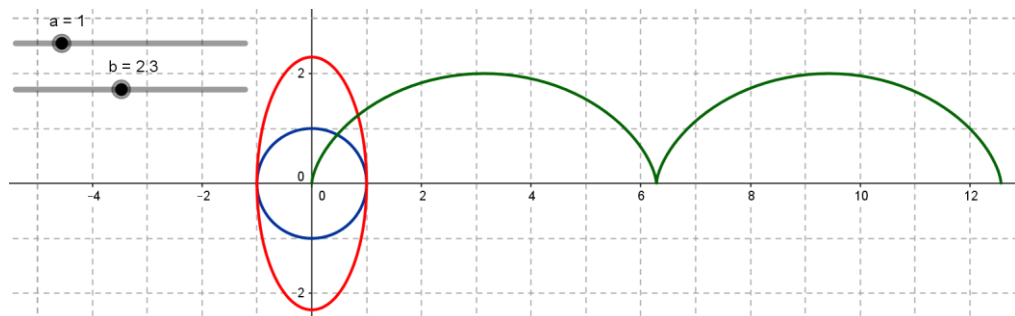
3) Tsükloid on tasandiline joon, mille kujundab mööda sirget veereva ringjoone punkt.

Tsükloidi võrrand on $\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$

Tsükloidi joonistamiseks kirjuta sisendreale:

Tsükloid=Kõver[(1t - sin(t)), 1(1 - cos(t)), t, 0, 4Pi]

Tulemuseks saad kaks tsükloidi kaart.



Polaarkoordinaatides joone tegemiseks tuleb lisavõimaluste alt valida koordinaadistiku tüübiks polaarkoordinaadid ja seejärel kasutada käsureal käsku kõver.

Näiteks joone $\rho = \sin(2\varphi)$, kus $\varphi \in [0; 2\pi]$ kujutamiseks tuleks käsureale sisestada:

Kõver((sin(2φ); φ), φ, 0, 2π) Uurige, mida teevad käsud:

Kõver((2φ; φ), φ, 0, 10π) Kõver((2cos(2φ); φ), φ, 0, 2π)

Harjutusülesandeid

Nende harjutusülesannete puhul tuleks kasutada nii graafika- kui ka algebravaadet ja sisendrida. Graafikavaates tasuks hoida nii teljestik kui ka ruudustik nähtavana.

1) Lahenda võrrandisüsteemid GeoGebra abil graafiliselt

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - y = 1 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 40 \end{cases} & \text{d) a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases} \end{array}$$

2) Millise parameetri a väärtuse puhul võrrandisüsteemil lahendid puuduvad, millise parameetri a väärtuse puhul on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid?

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + ay = 6 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = a \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - ay = a \\ 2x - 4y = 2a \end{cases} \end{array}$$

3) Leia joonele $y = x^2 - 3$ puutuja, mis läbib punkti $P(1; -2)$.

4) Skitseeri jooned $y = \sin x$ ja $y = \cos x$, kui $0 < x \leq 2\pi$. Leia nende joonte lõikepunktid ja joontevahelise kujundi pindala kahe järjestikuse lõikepunkti vahel.

5) Leia punkti $A(2; 1)$ kaugus sirgest, mis läbib punkti $B(1; 3)$ ja on risti sirgela $3x - 4y + 2 = 0$. Teha joonis.

6) Leia punkti $A(3; -4)$ läbiva ja sirgela $3x + 4y - 2 = 0$ ristuva sirge võrrand. Leia punkti A kaugus sirgest $3x + 4y - 2 = 0$. Teha joonis.

7) Leia sirgete $3x - 5y + 1 = 0$ ja $7x - y + 2 = 0$ vaheline teravnurk ning punkti $A(-1; 3)$ kaugused mõlemast sirgest. Teha joonis

8) Koostada kolmnurga ABC küljele AB tõmmatud kõrguse võrrand, kui $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$ ja $C(5; 2)$. Teha joonis.

9) Koosta kolmnurga ABC küljega AB paralleelse kesklõigu võrrand, kui $A(1; 2)$, $B(3; 3)$ ja $C(-2; 4)$. Teha joonis

10) Koostada sirgete AB ja AC võrrandid ning leida nende sirgete vaheline nurk, kui $A(-1; 3)$, $B(2; -3)$ ja $C(-5; 1)$.

$$11) \text{ Lahendada graafiliselt süsteemid a) } \begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases} \text{ b) } \begin{cases} x^2 - 3xy = -2 \\ x^2 + 2xy = 8 \end{cases}$$

Vastuseid:

1) a) (1; 1) b) (-1; -2) ja (2; 1) c) (5; 8) ja (8; 5) d) (4; 3) ja (-3; -4)

2) a) kui $a = 6$, siis puuduvad c) kui $a = 10$, siis lõpmata palju c) kui $a = 2$, siis lõpmata palju. 3) $y = 2x - 4$ 4) $\pi/4$ ja $5\pi/4$. $S = 2\sqrt{2} \approx 2,83$. 5) Otsitav sirge on $4x + 3y = 13$, Otsitav kaugus on 0,4. 6) Otsitav sirge on $-4x + 3y = 0$. Kaugus on 4,6. 7) $50,91^\circ$ kaugused umbes 1,13 ja 2,92. 8) $-4x + 3y = -14$

9) $-2x + 4y = 13$. 10) $AB: 2x + y = 1$ $AC: x - 2y = -7$ 90° . 11) a) (0, 0), (17, 17), (-3; 12) ja (12; -3) b) (2; 1) ja (-2; -1).