

POLAARKOORDINAADID

Võtame tasandil mingi punkti O , mida nimetame pooluseks, ja sellest punktist väljuva kiire Ox , mida nimetame **polaarteljeks**. Olgu M punkt, mille asukohta tahame määrata. Ühendame punkti M punktiga O ja märgime lõigu OM pikkuse tähega r . Mõõdame nurga xOM , lugedes seda vastupidi kellaosuti liikumise suunale (s.t. vastupäeva). Seda nurka tähistame tähega φ .

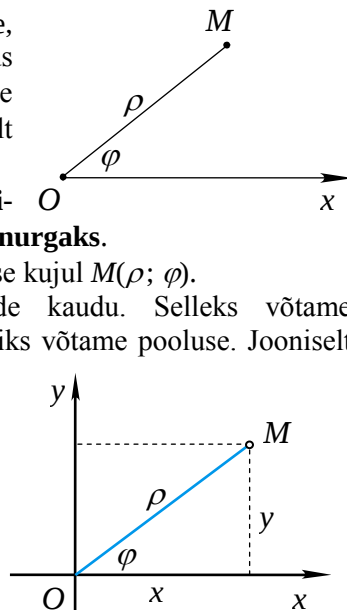
Nurga φ loeme asetsevaks vahemikus $[0^\circ; 360^\circ]$. On selge, et igale punktile M (välja arvatud punkt O) vastab üksainus paar suurusi ρ ja φ , ning ümberpöörduvalt, igale arvupaarile (ρ, φ) vastab üksainus punkt. Punktile O vastab üheselt väärtus $\rho = 0$ ja nurk φ pole punkti O korral määratav.

Arve ρ ja φ nimetatakse punkti M **polaarkoordinaatideks**, arvu ρ seejuures **polaarkauguseks**, arvu φ - **polaarnurgaks**.

Seda, et punkti M polaarkoordinaadid on ρ ja φ , märgitakse kujul $M(\rho; \varphi)$.

Avaldame punkti ristkoordinaadid polaarkoordinaatide kaudu. Selleks võtame abstsissitelje piki polaartelge ja koordinaatide alguspunktiks võtame pooluse. Jooniselt näeme, et

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$



Nüüd seame endale ülesandeks arvutada punkti polaarkoordinaadid, kui teame ristkoordinaate. Polaarkauguse avaldamiseks tõstame äsja saadud võrdused ruutu ja liidame vastavad pooled:

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2.$$

Juurides seda võrdust ning arvestades, et $\rho \geq 0$, saame $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Polaarnurga avaldamiseks jagame teise võrduse esimesega:

$$\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} = \tan \varphi. \quad \text{Seega} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Need valemid võimaldavad leida polaarkoordinaate, kui meil on antud ristkoordinaadid. Veerandi määramisel, kus asub nurk φ , tuleb abiks võtta abstsissi ja ordinaadi märgid.¹

Toimides nii, saame nurka määrata järgmiselt:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{kui } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{kui } x < 0 \text{ ja } y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & \text{kui } x < 0 \text{ ja } y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{kui } x = 0 \text{ ja } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{kui } x = 0 \text{ ja } y < 0 \\ \text{määramata}, & \text{kui } x = 0 \text{ ja } y = 0. \end{cases}$$

Näide Olgu punkti ristkoordinaadid $(3; -3)$. Leiame selle punkti polaarkoordinaadid.

$$\rho = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \tan \varphi = \frac{-3}{3} = -1.$$

Et $\tan \varphi < 0$, siis φ on kas II või IV veerandi nurk. Kuna $x = 3 > 0$ ja $y = -3 < 0$, siis φ on neljanda veerandi nurk. Neljanda veerandi nurkadest kehtib ainult ühe nurga korral võrdus $\tan \varphi = -1$ ja nimelt $\varphi = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$. Seega, punkti polaarkoordinaadid on $(3\sqrt{2}; 315^\circ)$ ehk $(3\sqrt{2}; 7\pi/4)$.

Näide. Olgu meil punkt polaarkoordinaatidega $(13; 112^\circ 37')$. Leiame selle punkti ristkoordinaadid.

$$x = \rho \cos \varphi = 13 \cdot \cos 112^\circ 37' = -4,999 \approx -5.$$

$$y = \rho \sin \varphi = 13 \cdot \sin 112^\circ 37' = 12.$$

Seega punkti ristkoordinaadid on $(-5; 12)$.

Olgu meil ristkoordinaatides antud joon $F(x; y) = 0$. Tehes asendused $x = \rho \cos \varphi$ ja

$y = \rho \sin \varphi$ saame selliselt joonelt üle minna joonele $F(\rho; \varphi) = 0$.

Näide. Vaatleme näiteks ringjoont $x^2 + y^2 = 16$. Tehes ülalnimetatud asendused, saame

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2 = 16 \quad \text{ja} \quad \rho = 4.$$

Ringjoone $x^2 + y^2 = 16$ võrrandiks polaarkoordinaadistikus on $\rho = 4$.

Näide. Vaatleme ringjoont $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Teeme asendused, saame

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho \sin \varphi - 1)^2 &= \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\rho \sin \varphi + 1 = 1 \quad \text{ehk} \\ \rho^2 - 2\rho \sin \varphi &= \rho(\rho - 2 \sin \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Nüüd on kaks võimalust $\rho = 0$ (tegemist on poolusega) või $\rho = 2 \sin \varphi$.

Võrrand $\rho = 2 \sin \varphi$ esitabki ringjoont $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ polaarkoordinaatides.

Selleks, et skitseerida polaarkoordinaatidega antud joont tuleb üldjuhul koostada tabel, milles antakse ette nurga φ väärtused ja leitakse seejärel vastavad ρ väärtused.

¹ Juhul, kui $x = 0$, siis $\tan \varphi$ väärtus puudub. Kui nüüd $y > 0$, siis $\varphi = 90^\circ$; kui aga $y < 0$, siis $\varphi = 270^\circ$.

Näide. Skitseerime joone $\rho = 2 \sin \varphi$. Teeme tabeli.

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\rho = 2 \sin \varphi$		0,52	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0,52	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2

Punktide teljestikku kandmiseks tuleb nurga φ poolt määratud kiirt mööda liikuda poolusest ρ väärtusele vastavale kaugusele. Kui ρ on negatiivne, siis tuleb liikuda kiirele vastupidises suunas.

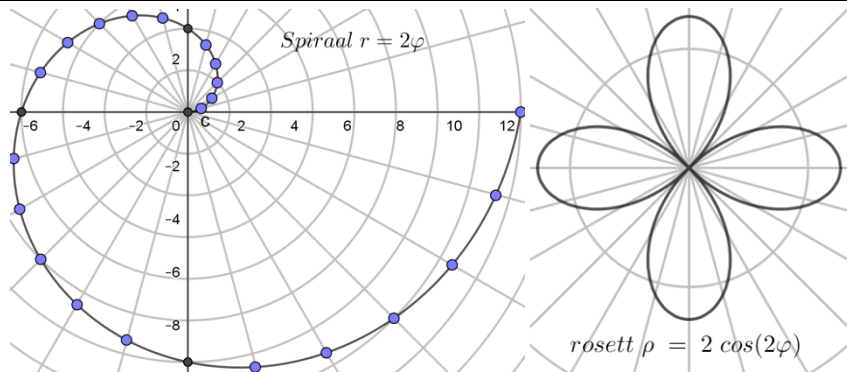
Joone $\rho = 2 \sin \varphi$ puhul, kui $\varphi \in [0; 2\pi]$ joonistame me ringioone kaks korda. Selle joone puhul piisab joonistamiseks piirkonnast $\varphi \in [0; \pi]$.

Näide. Skitseerime jooned $\rho = 2\varphi$ ja $\rho = 2 \cos 2\varphi$.

Teeme vastavad tabelid ja ühendame punktid (ρ, φ) omavahel.

Joone $\rho = 2\varphi$ puhul saame spiraali, aga joone $\rho = 2 \cos 2\varphi$ puhul saame roseti.

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\rho = 2\varphi$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$			2π					4π
$\rho = 2 \cos 2\varphi$	2	$\sqrt{3}$	1	0	-1	-2	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2	1	0	-1	-2	2



Ül 1. Leia ristkoordinaatides antud punktide koordinaadid polaarkoordinaatides.

a) (3; 3) b) (0; 4) c) $(-1; \sqrt{3})$ d) (0; -1) e) $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ f) $(2; -2\sqrt{3})$

Ül 2. Leia polaarkoordinaatides antud punktide koordinaadid ristkoordinaatides.

a) $(4; \frac{\pi}{6})$ b) $(2; \frac{\pi}{4})$ c) $(3; \frac{3\pi}{4})$ d) $(4; \frac{3\pi}{2})$ e) $(2; -\frac{\pi}{2})$ f) $(\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4})$ g) $(4; \frac{7\pi}{4})$

Ül 3. Tee joonte a) $\rho = 1 + \cos \varphi$ b) $\rho = e^{2\varphi}$ graafikud. Uuri kardioidi ja logaritmilist spiraali. Logaritmilise spiraali puhul $\varphi \in [0; 10\pi]$.

Ül 4. Uuri GeoGebra abil polaarkoordinaatides antud võrranditega jooni

a) $\rho = a \pm b \cos \varphi$, kus $\varphi \in [0; 2\pi]$ (kardioidid)

b) $\rho = a * n \sin n\varphi$ või $\rho = a * n \cos n\varphi$, kus $a > 0, n \in \mathbb{N}, \varphi \in [0; 2\pi]$ (rosetid)

c) $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$ või $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, kus $\varphi \in [0; \pi]$ (lemniskaadid)

d) $\rho = n * \varphi$, kus $\varphi \in [0; 8\pi]$ (Archimedese spiraalid)

e) $\rho = a * b^{c\varphi} * \varphi$, kus $\varphi \in [0; 8\pi]$ (logaritmilised spiraalid)

Näide Leiame joone $x^2 + y^2 - 3x = 0$ võrrandi polaarkoordinaatides.

Tehes asendused $x = \rho \cos \varphi$ ja $y = \rho \sin \varphi$ saame

$$\rho^2 - 3\rho \cos \varphi = 0 \quad \text{ehk} \quad \rho(\rho - 3 \cos \varphi) = 0.$$

Seega on graafikuks kas $\rho = 0$ või $\rho - 3 \cos \varphi = 0$. Et poolus on ka joonel

$\rho - 3 \cos \varphi = 0$ (kui $\varphi = \frac{\pi}{2}$, siis $\rho = 0$), siis lõpptulemuseks on $\rho = 3 \cos \varphi$.

Ristkoordinaatistikus on tegemist ringjoonega $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.

Näide. Leiame joone $\rho = \frac{1}{1 - \cos \varphi}$ võrrandi ristkoordinaatistikus.

Siit $1 = \rho - \rho \cos \varphi$ ja $\rho = 1 + \rho \cos \varphi$.

Asendades $\rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $\rho \cos \varphi = x$, saame

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x.$$

Tõstes mõlemad pooled ruutu ja lihtsustades, saame: $y^2 = 2x + 1$.

Ül 5. Esita joone võrrand polaarkoordinaatides.

a) $x = y$ b) $2x + \sqrt{2}y = 4$ c) $xy = 4$ d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y$ e) $x^2 + y^2 + 2x + 6y$

Ül 6. Esita joone võrrand ristkoordinaatides.

a) $\rho = 7$ b) $\rho = 3 \cos \varphi$ c) $\rho \cos \varphi = 5$ d) $\rho^2 \cos 2\varphi = 4$ e) $\rho^2 = \sin 2\varphi$.

Vastuseid: 1.a) $(3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$ b) $(4; \frac{\pi}{2})$ c) $(2; \frac{2\pi}{3})$ d) $(1; -\frac{\pi}{2})$ e) $(2; \frac{-5\pi}{4})$ f) $(4; \frac{-\pi}{3})$.

2. a) $(2\sqrt{3}; 2)$ b) $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ c) $(-1, 5\sqrt{2}; 1, 5\sqrt{2})$ d) (0; -4) e) (0; -2) f) (-1; -1)

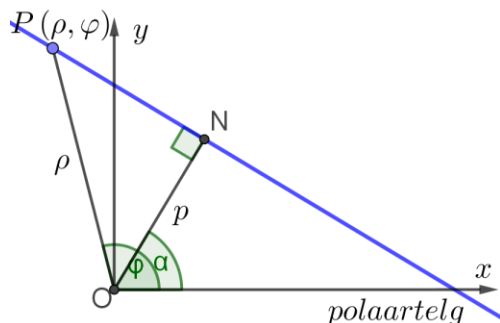
3.-4. Näiteks joonte $\rho = 2 \cos \varphi$ ja $\rho = 2\varphi$ joonistamiseks GeoGebra kasutada käske **Kõver**((2cos(2 φ); φ), φ, 0, 2π) ja **Kõver**((2φ; φ), φ, 0, 10π)

5. a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ b) $\rho(2 \cos \varphi + \sqrt{2} \sin \varphi = 4$ c) $\rho^2 \sin 2\varphi = 8$ d) $\rho = 4 \sin \varphi - 2 \cos \varphi$

6. a) $x^2 + y^2 = 49$ b) $x^2 + y^2 - 3x = 0$ c) $x = 5$ d) $x^2 - y^2 = 4$ e) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

SIRGE VÖRRAND POLAARKOORDINAATIDES

Võtame polaartelje ja mistahes sirge s . Tõmbame poolusest sirgele s normaali $ON = p$ ja märgime nurga polaartelje ja normaali vahel tähega α . Suurused p ja α määravad täielikult sirge asendi tasapinnal. Võtame sirgel mistahes punkti $P(\rho, \varphi)$, kus ρ ja φ on punkti P polaarkoordinaadid,



siis täisnurksest kolmnurgast ONP saame

$$p = \rho \cos(\varphi - \alpha)$$

Ehk

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

mis on sirge polaarvõrrand, kus ρ ja φ on jooksvad polaarkoordinaadid.

Kui sirge läbib poolust, siis moodustab sirge polaarteljega mingi nurga φ_0 . Sel juhul võime sirge võrrandi kirja panna kujul $\varphi = \varphi_0$. Siin võib ρ olla mistahes arv.

Erijuhul, kui $\alpha = 0$, saame sirgjoone $x = p$ võrrandi polaarkoordinaatides:

$$\rho = \frac{p}{\cos \varphi};$$

Erijuhul, kui $\alpha = 90^\circ$, saame sirgjoone $y = p$ võrrandi polaarkoordinaatides:

$$\rho = \frac{p}{\sin \varphi}.$$

SIRGE NORMAALVÖRRAND

Sirge polaarvõrrandi saab kirjutada kujul $p = \rho \cos(\varphi - \alpha)$ ehk

$$\rho(\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = p$$

Arvestades seoseid $\rho \cos \varphi = x$ ja $\rho \sin \varphi = y$ saame siit

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p,$$

mis ongi sirge normaalvõrrand.

Võrrandi nimetus tuleneb sellest, et sirget määravateks parameetriteks on siin normaali tõusunurk α ja normaali pikkus p .

Niisiis: Sirgjoont, mis on määratud oma normaali pikkusega p ja normaali tõusunurgaga α esitab võrrand

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

RINGJOONE VÖRRAND POLAARKOORDINAATIDES

Ringjoonel, mille keskpunkt on poolusel ja raadius on R , võrrandiks on $\rho = R$. Vaatleme ringjoont, mille keskpunkt on $K(\rho_0; \varphi_0)$ ja raadius on R . Ringjoone suvalist punkti tähistame $P(\rho; \varphi)$. Teeme joonise.

Kasutame kolmnurgale OKP koosinusteoreemi,

$$\text{Saame } R^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

See ongi ringjoone võrrand polaarkoordinaatides.

Tavaliselt esitatakse see kujul

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + (\rho_0^2 - R^2) = 0.$$

Erijuhul, kui ringjoon läbib poolust, on $R = \rho_0$ ning viimase võrrandi saab viia lihtsamale kujule

$$\rho = 2\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Näide. Ringi keskpunkt on punktis $(5; \frac{\pi}{3})$ ja selle ringi raadius on 2. Leiame ringi polaarvõrrandi.

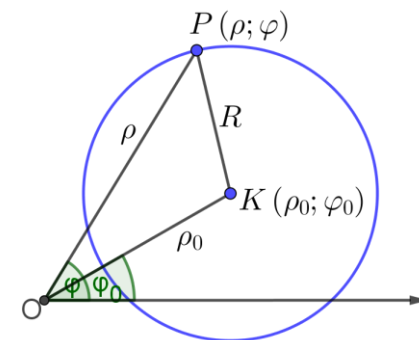
Andmetest saame $\rho_0 = 5$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ ja $R = 2$. Asendame need suurused ringjoone parameetritesse võrranditesse, saame:

$$\rho^2 - 2\rho 5 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + (5^2 - 2^2) = 0 \text{ ehk } \rho^2 - 10\rho \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + 21 = 0.$$

Ü1 7. Polaarkoordinaatidega määratud punkt N on sirge peal olevatest punktides kõige lähemal poolusele. Leia sirge võrrand.

a) $N(2; \frac{\pi}{3})$ b) $N(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4})$ c) $N(-1; \frac{\pi}{2})$ d) $N(3; \frac{5\pi}{6})$ e) $N(-3; -\pi)$ f) $N(-1; -\frac{\pi}{2})$.

Ü1 8. Koosta sirge $2x - 5y + 10 = 0$ polaarvõrrand. Leia selle sirge poolusele lähima punkti koordinaadid.



Ül 9. On antud ringjoone keskpunkt K polaarkoordinaatides ja raadius. Leia ringjoone võrrand polaarkoordinaatides.

- a) $K\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$ $R = 2$ b) $K(4; 0)$ $R = 4$ c) $K\left(-2; \frac{5\pi}{6}\right)$ $R = 3$ d) $K\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$ $R = 5$

Ül 10. Tuleta valem punktide $A(\rho_A; \varphi_A)$ ja $B(\rho_B; \varphi_B)$ vahelise kauguse leidmiseks.

ELLIPS, HÜPERBOOL JA PARABOOL POLAARKOORDINAATIDES

Teame et ellipsi, hüperbooli ja parabooli puhul on iga punkti kauguste suhe kindlast punktist (fookusest) ja kindlast sirgest (juhtjoonest) jääv suurus ekstsentrilisus ε . Ellipsi puhul on $\varepsilon < 1$, hüperbooli puhul $\varepsilon > 1$ ja parabooli puhul $\varepsilon = 1$. Kasutame seda omadust nende joonte ühise võrrandi tuletamiseks. Olgu parabooli fookus, ellipsi vasakpoolne ja hüperbooli parempoolne fookus punktis F . Asugu fookus poolusel ja polaarteljeks olgu fookusega ristuv poolsirge, mis ei lõika juhtjoont. Olgu fookuse F kaugus juhtjoonest p ja joone punkti polaarkoordinaadid $P(\rho, \varphi)$.

Kirjutame välja kauguste suhte:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{d} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\rho}{p + \rho \cos \varphi} \Rightarrow \rho = \varepsilon(p + \rho \cos \varphi),$$

millest saame avaldada polaarraadiuse

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Viimane võrrand on ellipsi, parabooli ja hüperbooli parempoolse haru ühine võrrand polaarkoordinaatides, kus joone tüübi määrab ekstsentrilisus ε . Hüperbooli vasakpoolset haru saab kirjeldada sama võrrandiga, kui pooluseks võtta vasakpoolne fookus.

Ellipsi (hüperbooli, parabooli) fokaalparameeter oli sellise fokaalteljega ristuva lõigu pikkus, mille üks otspunkt oli fookuses ja teine ellipsil (hüperboolil, paraboolil). Seega on fokaalparameeter lõigu FQ pikkus q . Lihtne on veenduda, et parabooli fokaalparameeter $q = p$. Ellipsi ja hüperbooli puhul on fokaalparameeter $q = \varepsilon p$.

Kasutades fokaalparameetrit saab ellipsi, parabooli ja hüperbooli polaarkoordinaatides antud võrrandid viia kujule

$$\rho = \frac{q}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Näide. Leiame koonuselõike võrrandi, kui fookus on poolusel, ekstsentrilisus $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ja juhtjoone võrrand on $\rho \cos \varphi = -3$.

Juhtjoone võrrandist ($x = -3$) saame järeldada, et $p = 3$. Seega $\rho = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3}{1 - \frac{1}{2} \cos \varphi} = \frac{3}{2 - \cos \varphi}$.

Näide. On antud koonuselõike võrrand $\rho = \frac{7}{4 - 5 \cos \varphi}$. Leiame ekstsentrilisuse, juhtjoone võrrandi ja määrame kindlaks joone tüübi.

Selleks jagame koonuselõike võrrandi parema poole lugeja ja nimetaja 4-ga. Saame

$$\rho = \frac{\frac{7}{4}}{1 - \frac{5}{4} \cos \varphi}. \text{ Seega } \varepsilon = \frac{5}{4} \text{ ja } \varepsilon p = \frac{7}{4}.$$

Seega $p = \frac{7}{5}$ ja juhtjoone võrrand on $\rho \cos \varphi = -\frac{7}{5}$. Jooneks on hüperbool.

Üldiselt saab näidata, et kui koonuselõike võrrandiks on

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \alpha)},$$

siis juhtjoone võrrandiks on

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = -p.$$

Ül 11. Koonuselõike fookus on poolusel, antud on ekstsentrilisus ja juhtjoon. Leia koonuselõike võrrand polaarkoordinaatides.

- a) $\varepsilon = 1$, juhtjoon $\rho \cos \varphi = -4$ b) $\varepsilon = 2$, juhtjoon $\rho \cos \varphi = -5$
c) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, juhtjoon $\rho \cos \varphi = 2$ d) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, juhtjoon $\rho \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 1$
e) $\varepsilon = 1$ juhtjoon $\rho \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$ f) $\varepsilon = 2$ juhtjoon $\rho \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = 3$

Ül 12. Leia võrrandiga antud koonuselõike ekstsentrilisus, juhtjoon ja joonest graafik

- a) $\rho = \frac{6}{1 - \cos \varphi}$ b) $\rho = \frac{9}{2 - \cos \varphi}$ c) $\rho = \frac{2}{1 - \sin \varphi}$ d) $\rho = \frac{4}{6 + \sin \varphi}$

Ül 13*. Tõesta, et kui kolmnurga tipud on antud polaarkoordinaatidega $A_1(\rho_1; \varphi_1)$, $A_2(\rho_2; \varphi_2)$ ja $A_3(\rho_3; \varphi_3)$ siis kolmnurga $A_1A_2A_3$ pindala saab arvutada valemiga

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \rho_2 \rho_3 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \\ \rho_1 \rho_3 & \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \\ \rho_1 \rho_2 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{vmatrix}.$$

Vastuseid: 7. a) $\rho \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ b) $y = x + 2$ c) $\rho \sin \varphi = -1$ e) $\rho \cos \varphi = 3$

8. $p = \frac{10}{5 \sin \varphi - 2 \cos \varphi}$. 9. a) $\rho^2 - 6\rho \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) + 5 = 0$ b) $\rho = 8 \cos \varphi$

d) $\rho = 10 \sin \varphi$ 10. $AB = \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2\rho_A \rho_B \cos(\varphi_A - \varphi_B)}$ 11. b) $\rho = \frac{10}{1 - 2 \cos \varphi}$

d) $\rho = \frac{1}{2 + \sin \varphi}$ f) $\rho = \frac{6}{1 - 2 \cos(\varphi + \frac{4}{3}\pi)}$ 12. b) $\varepsilon = \frac{1}{2}$, juhtjoon $\rho \cos \varphi = -9$

c) $\varepsilon = 1$, juhtjoon $\rho \sin \varphi = -2$ d) $\varepsilon = \frac{1}{6}$, juhtjoon $\rho \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -4$

