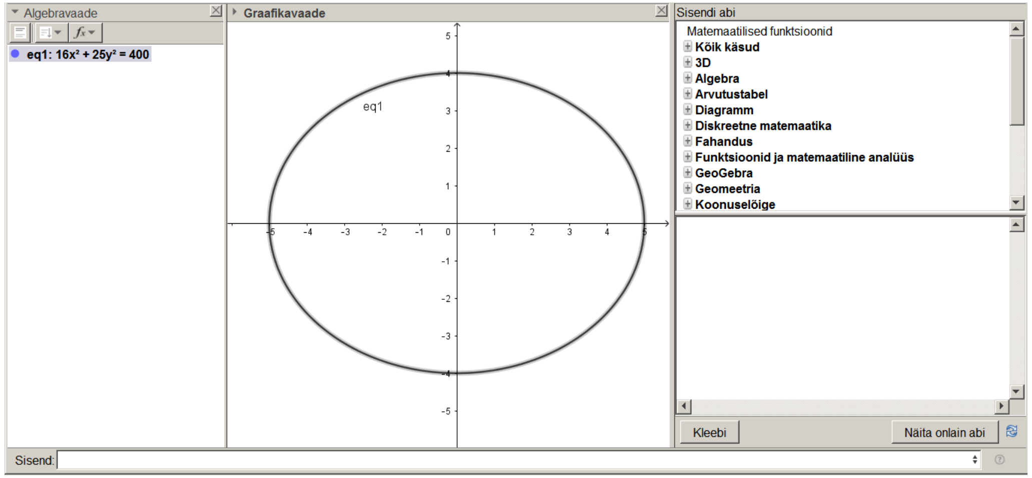
GeoGebra III tööjuhendite komplekt

Tavaline ellips. Koonuselõigete käskudega tutvumine

1) Kirjutame sisendreale ellipsi $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ võrrandi kujul: $\mathbf{16x^\wedge 2 + 25y^\wedge 2 = 400}$.

2) Tutvume GeoGebrale sisseehitatud koonuselõigete alaste käskudega. Nende käskude abil saab leida paljutki etteantud võrrandiga koonuselõike puhul vajaminevat.

Selleks vajutame sisendrea lõpus olevale küsimärgile (sisendi abi), valime avanenud matemaatiliste funktsioonide nimekirjast + märgiga tähistatud osa **Koonuselõige**:



Avame seal koonuselõike alaosas + märgi taga olevad koonuselõike käsud. Enamust neist peaksite juba teoreetilises mõttes tundma. Edasises õpime neid kasutama.

3) kirjutame sisendreale **O=SümmeetriaKeskpunkt(eq1)** ja vajutame Enter. Sulgudesse paneme oma koonuselõike nime. Mul on vaikimisi nimeks **eq1**, aga teil võib olla midagi muud, näiteks **c** täht. Graafikavaatesse peaks ilmuma koonuselõike keskpunkt O.

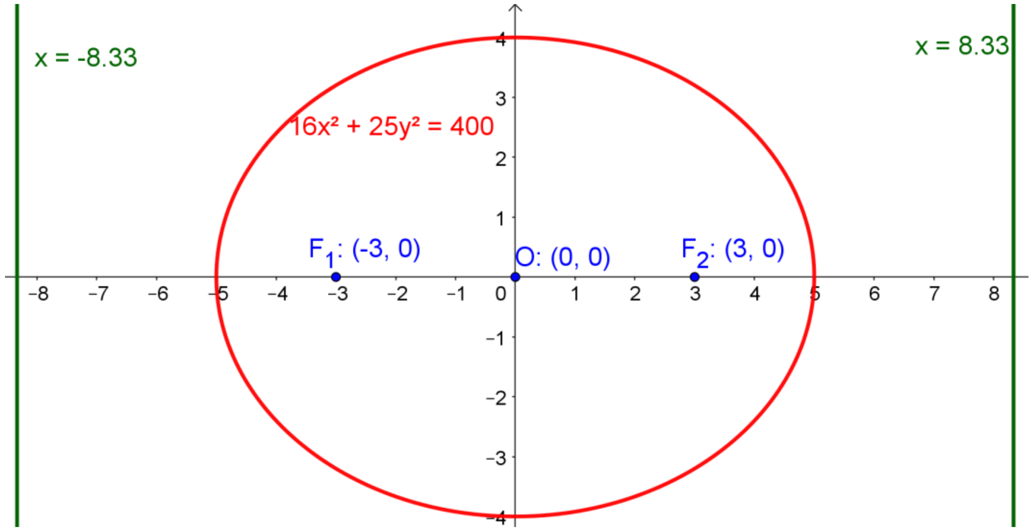
4) Kirjutame sisendreale **F=Fookus(eq1)** (Enterit edaspidi ma juhendisse ei kirjuta). Graafikavaatesse peaks ilmuma koonuselõike fookused $\mathbf{F_1}$ **ja** $\mathbf{F_2}$**.**

5) Kirjutame sisendreale **a=FokaalpoolteljePikkus(eq1)** ja **b=TeisePoolteljePikkus(eq1)**. Algebravaates näeme neid pooltelgede pikkusi **a=5** ja **b=4**.

6) Vajutame sisendrea lõpus olevale **α** -le, valime pakutavast menüüst **ε** ja kirjutame sisendreale: ε**=Ekstsentrilisus(eq1)**. Ekstsentrilisuse väärtus **ε=0,6** on algebravaates.

7) Kirjutame sisendreale **jj=Juhtjoon(eq1).** Graafikavaatesse ilmuvad juhtjooned, algebravaatesse nende võrrandid. Arvestame sellega, et GeoGebra töötab kümnendmurdudega ja juhtjoone võrrandid esitab kujul $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{5^2}{3}=\pm 8\frac{1}{3}\approx\pm 8.33$.

8) Näitame joonisel võrrandeid ja oluliste punktide koordinaate:



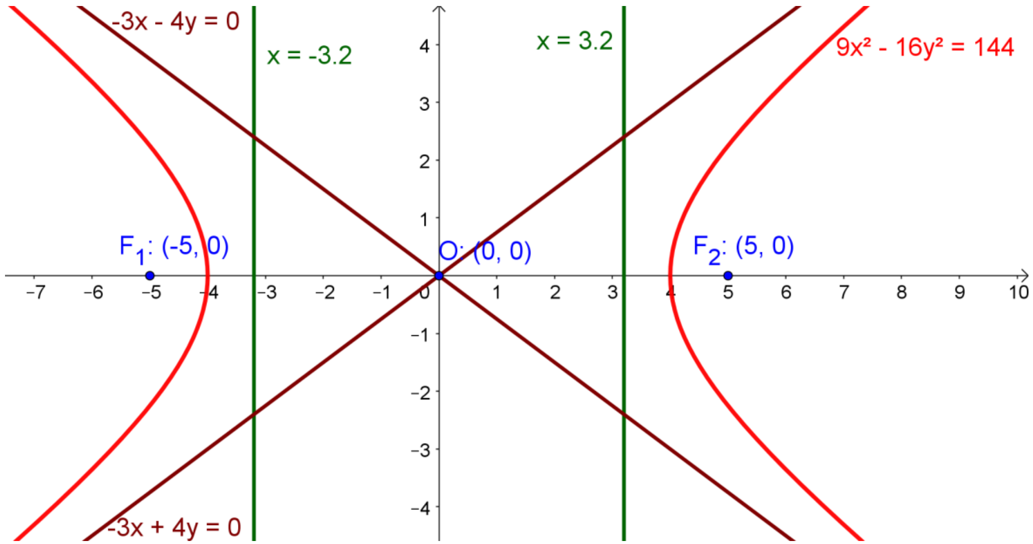
Iseseisev Töö: tavaline hüperbool. Asümptootide joonistamine

1) Kirjutame sisendreale hüperbooli $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ võrrandi kujul: $\mathbf{9x^2 - 16y^\wedge 2 = 144.}$ **(**Vajalik selleks, et GeoGebra ei teisendaks võrrandit kümnendmurrulisele kujule.)

Seejärel teeme kõik ülejäänud sammud läbi nii nagu ellipsi puhul. Võime ka võtta ellipsi valmisfaili ja seal joone omaduste all muuta ellipsi võrrandi hüperbooli võrrandiks ning salvestada tulemuse uue nime all.

2) Toksime sisendreale **as=Asümptoot(eq1).** Tulemusena saame algebraaknas ja graafikaaknas kaks asümptooti. Teeme graafikaaknas asümptootide võrrandid nähtavaks.

Kujundame joonise meile meeldivale kujule.



Iseseisev Töö: tavaline parabool. Haripunkti leidmine

1) Kirjutame sisendreale parabooli võrrandi: $\boldsymbol{y^2 = 4x}$.

2) Kirjutame sisendreale **F=Fookus(eq1).** Algebra- ja graafikavaates näeme fookust F.

3) Kirjutame sisendreale **jj=Juhtjoon(eq1).** Mõlemas vaates näeme juhtjoont $\boldsymbol{x = -1}$.

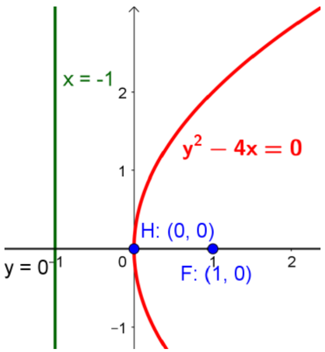
4) Kirjutame sisendreale ε=**Ekstsentrilisus(eq1)**. Algebravaatesse ilmub **ε=1.**

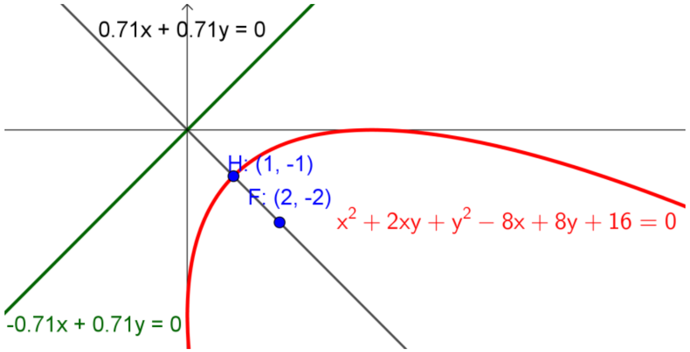
5) Leiame parabooli haripunkti. Selleks konstrueerime kõigepealt parabooli telje. Sisendreale kirjutame **Fokaaltelg(eq1)**. Mõlemasse aknasse ilmub sirge $\boldsymbol{y = 0}$.

Parabooli haripunkt on parabooli fokaaltelje ja parabooli lõikepunkt. Selle leidmiseks hakkame kirjutama sisendreale **H = Lõikepunkt**, siis ilmub ekraanile abimall:

Lõikepunkt(<Objekt>,<Objekt>). Valime selle ja kirjutame sisendreale ümarsulgude sisse kahe lõikuva objekti nimed. Minul on need **eq1** ja **f**, aga teil võivad olla muud tähised. Kokkuvõttes kirjutan mina **Lõikepunkt(eq1,f)** ning mõlemas aknas on punkt **H.**

6) Muudame haripunkti ja fookuse koordinaadid ning juhtjoone võrrandi ekraanil nähtavaks, ning kujundame joonise enda jaoks meeldivaks. Salvestame faili mõne muu nime all. Graafikaaknas olev võiks olla näiteks selline, kui alumisel vasakpoolsel joonisel.

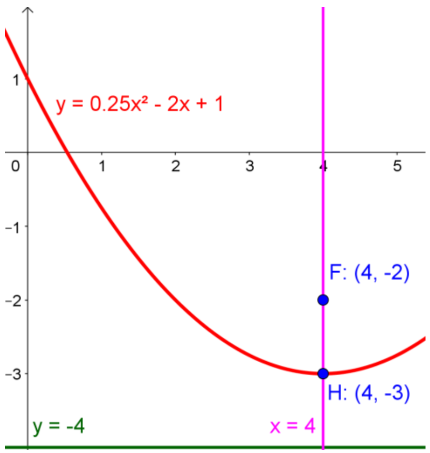




7) Proovime, kas meie programm töötab ka siis, kui me muudame parabooli võrrandit.

Muudame Omaduste alt joone **eq1** võrrandit ning katsetame võimalusi $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1$ ja $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$.

Esimese parabooli joonis on kõrvalolev, teise parabooli joonis on ülalolev ja parempoolne.



Lükke ja pöörde tegemine. Ellipsi võrrandi lihtsustamine lükke ja pöörde abil

1) Märgime punktina joonisel koordinaatide alguspunkti. Tähistame selle O tähega.

2) Kirjutame sisendreale ellipsi võrrandi: **5x² + 4x y + 8y² + 14x - 52y + 89 = 0.**

Astendajas oleva ² võib sisestada **^** märgi abil, aga võib kasutada ka sisendreale kirjutamisel tekkiva α sümboli taha peidetud võimalusi. Tulemusena tekib ellips.

3) Kirjutame sisendreale **O_1=SümmeetriaKeskpunkt(eq1)**. Niiviisi saame ellipsi keskpunkti O_1, mille koordinaadid on antud ellipsi puhul (-3; 4).

4) Teeme valmis vektori $\overrightarrow{O_1O}$. Selleks kirjutame sisendreale: **Vektor(O_1,O).** Tulemusena saame nii algebra kui ka graafikavaates vektori $\boldsymbol{u} = \binom{3}{-4}$.

5) Teeme esialgsele ellipsile lükke vektoriga $\boldsymbol{u}$. Selleks kasutame sisendreal süntaksit **LükeVektoriga(<Objekt>, <Vektor>)** ja kirjutame sisendreale **LükeVektoriga(eq1, u).**

Tulemusena tekib meil algebravaates ja graafikavaates uus ellips, mille tähis on **eq1'** ja mille võrrand on **5x² + 4x y + 8y² = 36.**

6) Selleks, et viia ellips kanoonilisele kujule, peame leidma kõigepealt ellipsi teljed ning seejärel määrama nurgad. mille need teljed moodustavad *x*-teljega.

Telgede määramiseks kasutame sisendreal kahte käsku **Fokaaltelg(<Koonuselõige>) ja TeineTelg(<Koonuselõige>).** <Koonuselõike> kohale kirjutame nüüd lükke tulemusena saadud koonuselõike nime **eq1'.** Tulemusena saame kaks sirget, minul on nende tähisteks **f** ja **g**. Näiteks sirge **g** ja *x*-telje vahelise nurga saab leida sirge tõusu abil. selleks sisestame sisendreale **k=Tõus(g).** Näeme algebraaknas, et antud sirge tõus on 2. Tõusunurga leidmiseks sisestame sisendreale **β=arctan(k).**

Edasi on kaks võimalust. Me saame viia võrrandi **eq1'** viia kanaoonilisele kujule, pöörates koonuselõiget **eq1'** päripäeva nurga β võrra või vastupäeva nurga $90° - \beta$ võrra. Mina eelistan teist võimalust, sest siis satuvad fookused *x*- teljele. Klõpsame sisendreale ja sisestame sinna **α=90°-β.** Saame pöördenurga α.

Järgmiseks teeme koonuselõikele **eq1'** pöörde ümber punkti O(0; 0) nurga **α** võrra.

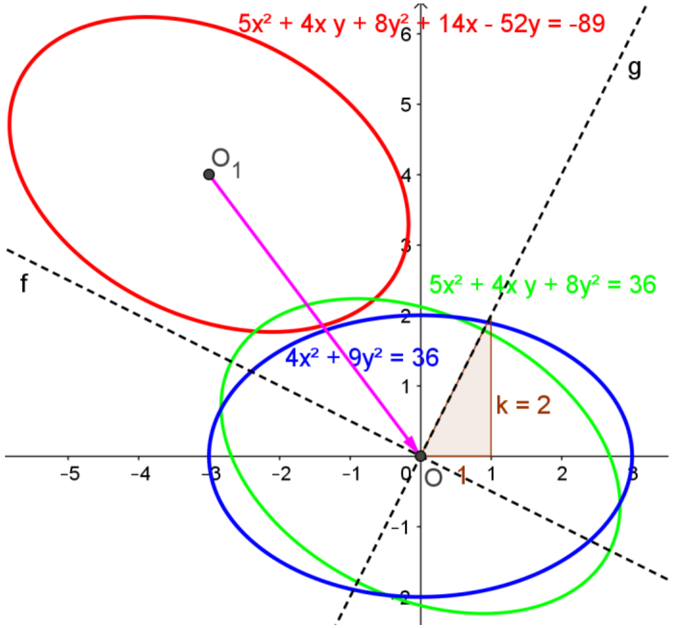
Selleks kirjutame sisendreale Pööre; valime süntaksi **Pööre(<Objekt>, <Nurk>**) ja kirjutame objekti asemele **eq1'** ning nurga asemele **α.**

Tulemusena saame ellipsi **4x² + 9y² = 36** ehk $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Teisenduste ilusamaks kujundatud resultaati näed järgmisel leheküljel oleval joonisel.

Märkus: Meie teeme siin selleks, et saada joone kanoonilist võrrandit. ellipsile lükke ja pöörde, analüütilise geomeetria kursuses tehakse tavaliselt lüke ja pööre reeperile.

Lükete ja pöörete puhul on oluline ka liikumisteisenduste järjekord. Kui oleksime teinud ellipsi pöörde ümber koordinaatide alguspunkti esimese teisendusena, siis tuleks lükkevektor hoopis erinev.



Parabooli võrrandi lihtsustamine lükke ja pöörde abil.

1) Märgime punktina joonisel koordinaatide alguspunkti. Tähistame selle O tähega.

2) Kirjutame sisendreale näiteks parabooli võrrandi: **4x² - 4x y + y² - 3x + 4y - 7 = 0.**

3) Sisendreale kirjutame **f=Fokaaltelg(eq1).**

4) Paraboolil ei ole sümmeetriakeskpunkti, paraboolil on haripunkt. milleks on parabooli ja selle fokaaltelje lõikepunkt, tähistame selle *H tähega.* Sisendreale kirjutame

H=Lõikepunkt(eq1,f)

5) Teeme valmis vektori $\overrightarrow{HO}$. Selleks kirjutame sisendreale: **Vektor(H,O).**

Tulemusena saame nii algebra- kui ka graafikavaates vektori $\boldsymbol{u} = \binom{-2}{-3}$.

6) Teeme lükke vektoriga $\boldsymbol{u}$. Kirjutame sisendreale **LükeVektoriga(eq1, u)**

Saame parabooli **eq1'** mille võrrand on. **4x² - 4x y + y² + x + 2y = 0.**

7) Leiame parabooli fokaaltelje nurga *x- teljega*. Selleks kirjutame sisendreale:

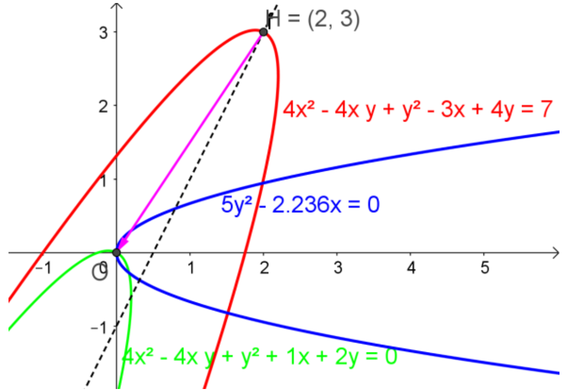
α=arctan(Tõus(f)).

8) Pöördenurgana võib kasutada nii nurka α, kui ka nurka $90° - \alpha$, kui ka nurka $180° - \alpha$, olenevalt sellest, kuhu poole me tahame, et lõppresultaadina saadav konkreetne kanoonilise võrrandiga parabool avatud oleks. Mina valiksin

Pööre(eq1', $180° - \boldsymbol{\alpha}$).

Tulemusena saame parabooli, mis avaneb paremale, aga mille võrrandis on midagi ligikaudset: **5y²-2.24x = 0**. Kui lubada võimaluste alt rohkem kümnendkohti, siis võib saada: **5y²-2.2360679x = 0.** Tegemist on arvu $\sqrt{5}$ kümnendlähenditega. Seega on otsitava joone kanooniliseks võrrandiks

$$y^2 = \frac{\sqrt{5}}{5}x.$$



Ülesandeid iseseisvaks lahendamiseks:
Alljärgnevaid ülesandeid võib lahendada olemasolevate GeoGebra failide abil, sisestades sinna oma võrrandeid, aga neid programme võib ka vastavalt konkreetsetele ülesannetele modifitseerida.

1. Vii hüperbool $xy - 2x - 4y + 4 = 0$ GeoGebra abil kanoonilisele kujule, tehes selleks kõigepealt kujundile lükke ja seejärel pöörde. (Kontrolliks: lükke järel on võrrandiks $xy = 4$, lõpptulemus on $x^2 - y^2 = 8$).

2. Vii ellips $33x^2 - 24xy + 40y^2 - 192x - 144y - 576 = 0$ GeoGebra abil kanoonilisele kujule, tehes selleks kõigepealt kujundile lükke ja seejärel pöörde. (Kontrolliks: lükke järel on võrrandiks $33x^2 - 24xy + 40y^2 = 1176$, lõpptulemus on $24x^2 + 49y^2 = 1176$ ehk $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$).

3. Vii hüperbool $15x^2 + 24xy + 8y^2 - 150x - 104y + 311 = 0$ GeoGebra abil kanoonilisele kujule, tehes selleks kõigepealt kujundile lükke ja seejärel pöörde. (Kontrolliks: lükke järel on võrrandiks $15x^2 + 24xy + 8y^2 = 24$, lõpptulemus on $24x^2 - y^2 = 24$).

4. Vii parabool $4x^2 + 4xy + y^2 - 24x + 38y = 139$ GeoGebra abil kanoonilisele kujule, tehes kõigepealt kujundile lükke ja seejärel pöörde. (Kontrolliks: lükke järel on võrrandiks $4x^2 + 4xy + y^2 - 20x + 40y = 0$, lõpptulemus on $5y^2 + 20\sqrt{5}x = 0$).