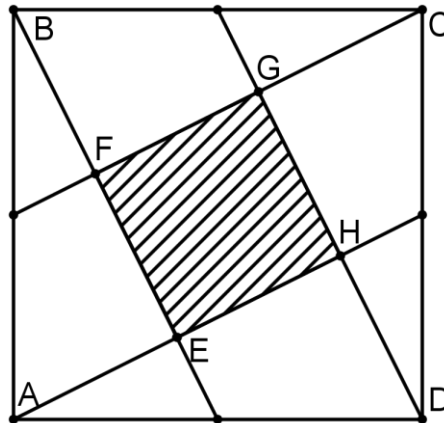


Feynmani kolmnurgast Routhi teoreemini

Tõnu Tõnso, Tallinna Ülikool

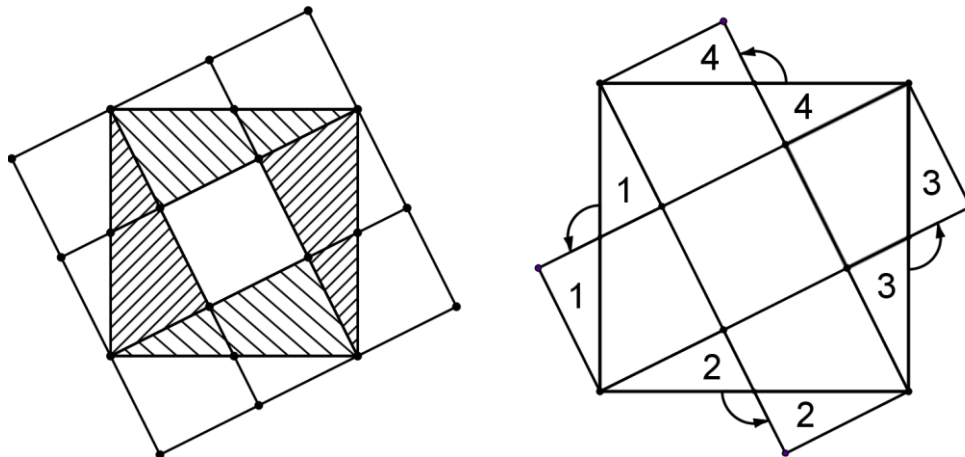
Kaks järgnevat ülesannet ilmusid ajakirjas “Horisont” 2013. a. [4, lk 62].

Ül 1. Ruudu $ABCD$ tipud on vastupäeva ühendatud vastaskülgede keskpunktidega nii, nagu on näidatud alloleval joonisel. Tulemusena on saadud väiksem ruut $EFGH$. Leia ruutude $EFGH$ ja $ABCD$ pindalade suhe.



Joon 1. Leia ruutude $EFGH$ ja $ABCD$ pindalade suhe

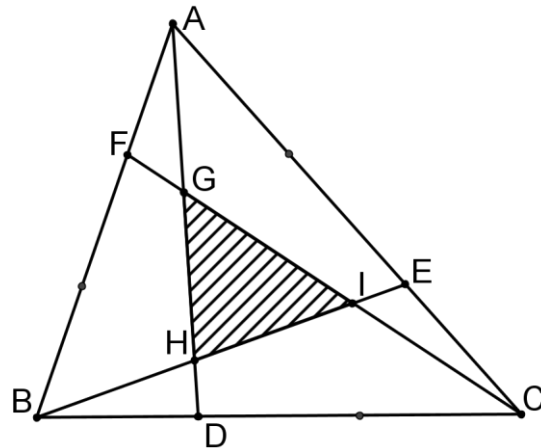
Sel ülesandel on mitu huvitavat lahendust. Võttes ruudulisel paberil väiksema ruudu küljepikkuseks ühe ühiku ja konstrueerides selle ümber ruudu küljepikkusega $\sqrt{5}$ ühikut, saab kasvõi ilma sõnadeta tõestuste abil näidata, et see suhe on 1:5. Alljärgneval joonisel näebki kahte niisugust lahendust.



Joon 2. $EFGH$ ja $ABCD$ pindalade suhe on 1:5

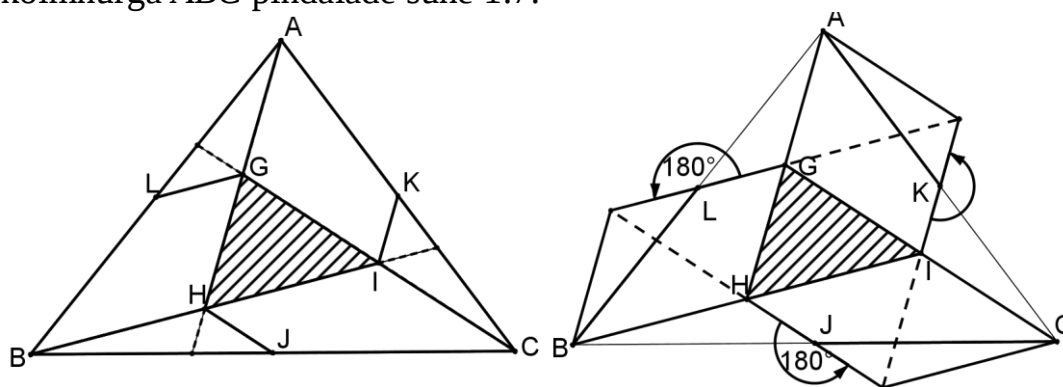
Tseviaaniks (itaalia matemaatiku Giovanni Ceva nime järgi) nimetatakse kolmnurga tippu vastaskülje mingi punktiga ühendavat lõiku [1, lk 29]. Tseviaanide paarikaupa lõikumisel tekib lähtekolmnurga sees üks väiksem kolmnurk (vt ka jooniseid 3, 7 ja 8) ning me saame leida selle kolmnurga ja lähtekolmnurga pindalade suhte.

Ül 2. Kolmnurga ABC küljed on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja nende osade otspunktid D , E ja F on ühendatud kolmnurga tippudega nii, nagu on näidatud joonisel 3. Leia tulemusena tekkinud kolmnurga GHI ja kolmnurga ABC pindalade suhe.



Joon 3. Leia kolmnurkade GHI ja ABC pindalade suhe

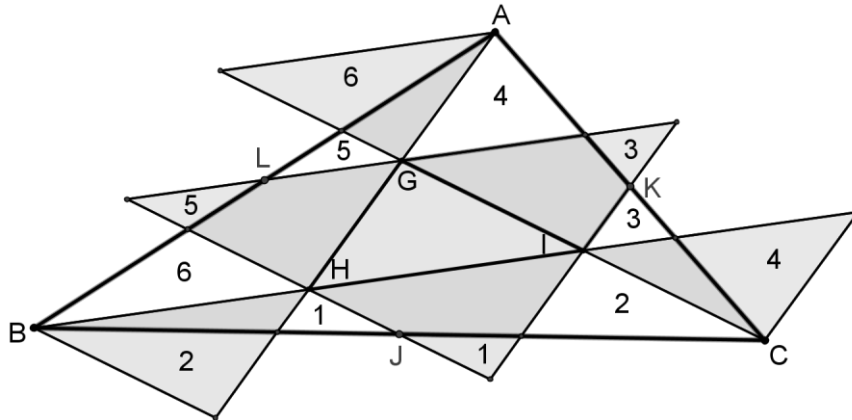
See on tuntud ülesanne, mida kutsutakse „1/7 kolmnurga ülesandeks“ ja kuulsa füüsiku Richard Feynmani järgi Feynmani kolmnurga ülesandeks. Ka seda ülesannet saab lahendada sõnadeta tõestuste abil. Alljärgnevas on ära toodud kaks sellist lahendust. Esimesel juhul märgime joonisele ka kolmnurga ABC külgede keskpunktid J , K ja L ning konstrueerime kolmnurgad BJH , CKI ning ALG . Pöörates kolmnurki BJH , CKI ning ALG 180° ümber punktide J , K ja L , oleme konstrueerinud kolmnurga GHI külgedele rööpkülilikud, mille pindala on kolmnurga GHI pindalast kaks korda suurem. Kolmnurga ABC pindala on võrdne kolmnurga GHI pindala ja kolme rööpküliliku pindalade summaga. Seega on kolmnurga GHI ja kolmnurga ABC pindalade suhe 1:7.



Joon 4. Feynmani kolmnurga ülesande üks lahendus

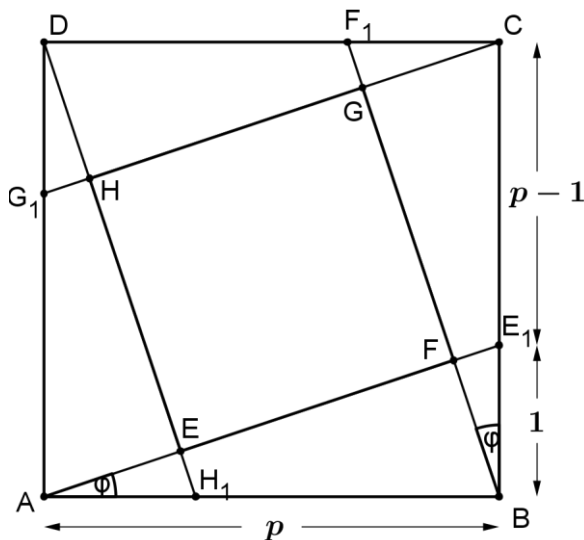
Teine lahendus. Kolmnurk ja rööpkülilik on planigoonid, s.t. kujundid, mille omavahel kongruentsete eksemplaridega saab lünkadeta täita kogu tasandi. Täidame piirkonna, millel asub kolmnurk ABC , kolmnurga GHI eksemplaridega nii, nagu on näidatud joonisel 5. Kolmnurga ABC poolt

piiratud pindala täitmiseks kolmnurga GHI eksemplaridega läheb meil
tarvis täpselt seitsmet kolmnurgaga GHI kongruentset kolmnurka.
Kolmnurga ABC küljed jaotavad kuus kolmnurka neist kaheks tükiks.
Kolmnurgast ABC väljaspoole jäävatele tükidele (joonisel tähistatud
numbritega 1-6) saab teha 180° pöörde ümber kolmnurga ABC külgede
keskpunktide J , K ja L .



Joon 5. Feynmani kolmnurga ülesande teine lahendus.

Üldistame ruudu ülesannet. Ruutude $EFGH$ ja $ABCD$ pindalade suhet saab
leida ka siis, kui ruudu $ABCD$ küljed jagada p võrdseks osaks ning iga
ruudu $ABCD$ tipp ühendada vastupäeva esimese jaotuspunktiga.



Joon 6. Ruudu ülesande üldistus.

Teoreem: Kui ruudu $ABCD$ küljed jagada suhtes $1 : (p - 1)$ ning seejärel
ühendada $ABCD$ tipud vastupäeva nende jaotuspunktidega, siis tekkiva
ruudu $EFGH$ ja ruudu $ABCD$ pindalade suhe on

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{p^2 - 2p + 1}{p^2 + 1}.$$

Tõestus:

Kolmnurgad AH_1E ja BE_1F on võrdsed, seega $AH_1=BE_1=1$ ja $EH_1=FE_1$.

Need kolmnurgad on sarnased täisnurkse kolmnurgaga ABE_1 . Siis olgu $\angle BAE_1 = \angle E_1BF = \varphi$.

Kolmnurga ABE_1 hüpotenuusi AE_1 pikkus on $|AE_1| = \sqrt{1+p^2}$.

Täisnurksest kolmnurgast ABE_1 saame, et

$$\cos \varphi = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{ja} \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Kolmnurkadest AH_1E ja BE_1F saame, et $AE = \cos \varphi$ ja $FE_1 = \sin \varphi$.

Lõigu EF pikkuse saamiseks lahutame lõigu AE_1 pikkusest lõikude AE ja FE_1 pikkused:

$$EF = \sqrt{1+p^2} - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{p^2 - p - 1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{p(p-1)}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Et lõigu AB pikkus on p , siis lõikude EF ja AB pikkuste suhe on $\frac{p-1}{\sqrt{1+p^2}}$.

Seega on ruutude $EFGH$ ja $ABCD$ pindalade suhe

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{(p-1)^2}{(\sqrt{1+p^2})^2} = \frac{p^2 - 2p + 1}{p^2 + 1}. \blacksquare$$

Kui $p=2$, siis pindalade suhe on $\frac{1}{5}$; kui $p=3$, siis $\frac{2}{5}$, kui $p=4$, siis $\frac{9}{17}$.

Kui ruudu $ABCD$ asemel oleks olnud rõõpkülik $ABCD$ ning peale rõõpküliku külgede jaotamist p võrdseks osaks tuleks leida rõõpkülikute $EFGH$ ja $ABCD$ pindalade suhe, on arvutusvalem sama. Põhjuseks on see, et rõõpkülik ja ruut on teineteisest saadavad mingi *afiinse teisenduse* abil. Afiinne teisendus on niisugune tasandi või ruumi teisendus, mis kujutab sirged sirgeteks ning tasandid tasanditeks. Afiinsed teisendused säilitavad paralleelsuse ja lõikumise ning pikkuste, pindalade ja ruumalade suhted.[1, lk 8]

Vaatleme nüüd Feynmani kolmnurga ülesande üldistust [3, lk 107].

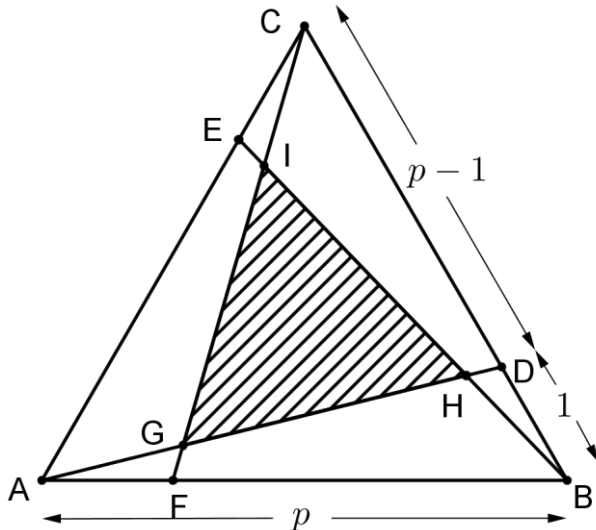
Kui kolmnurga ABC küljed jagada p osaks ning seejärel ühendada kolmnurga tipud vastupäeva vastaskülje sellise punktiga, mis jaotab vastaskülje suhtes 1: $(p-1)$, siis tekkiva kolmnurga GHI ja kolmnurga ABC pindalade suhe on

$$\frac{S_{GHI}}{S_{ABC}} = \frac{(p-2)^2}{p^2 - p + 1}.$$

Kui $p = 3$, siis pindalade suhe on $\frac{1}{7}$; kui $p = 4$, siis $\frac{4}{13}$, kui $p = 5$, siis $\frac{3}{7}$ jne.

Tõestus:

Lähtume võrdkülgsest kolmnurgast ABC , mille külje pikkus on p . Jaotame selle kolmnurga küljed osadeks, mille pikkused on 1 ja $p - 1$. Vt joon 7.



Joon 7. Feynmani kolmnurga ülesande üldistus.

Kolmnurgast ADB leiame koosinusteoreemi abil lõigu AD pikkuse:

$$AD^2 = p^2 + 1^2 - 2p \cos 60^\circ.$$

Seega $AD = \sqrt{p^2 - p + 1}$.

Kolmnurgad AFG ja ABD on sarnased, sest neil on kaks võrdset nurka.

Sarnaste kolmnurkade vastavad küljed on võrdelised, saame võrduste ahela

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{FG}{DB} \quad \text{ehk} \quad \frac{AG}{p} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - p + 1}} = \frac{FG}{1}.$$

Siit saame, et

$$AG = \frac{p}{\sqrt{p^2 - p + 1}} \quad \text{ja} \quad FG = \frac{1}{\sqrt{p^2 - p + 1}}.$$

Kuna sümmeetria tõttu $HD = FG$, siis lõigu GH pikkuse saamiseks lahutame lõigu AD pikkusest lõikude AG ja HD pikkused:

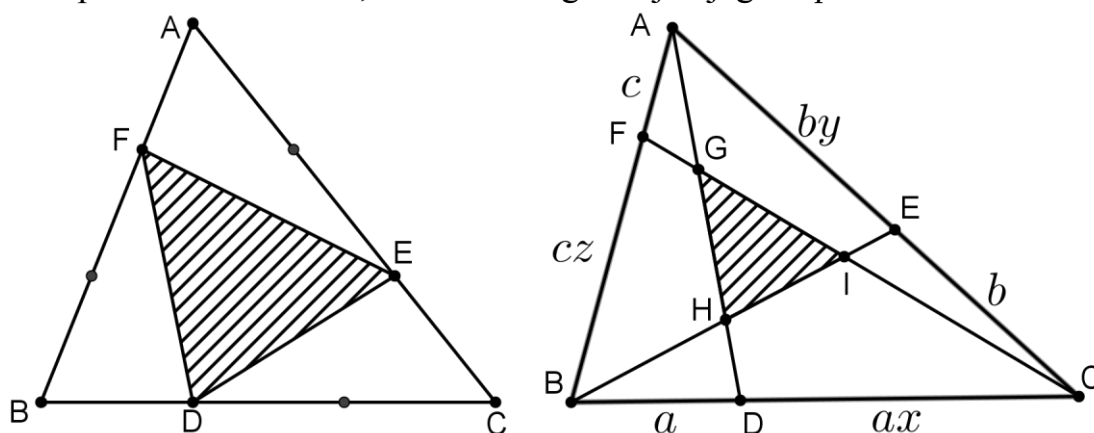
$$GH = \sqrt{p^2 - p + 1} - \frac{p}{\sqrt{p^2 - p + 1}} - \frac{1}{\sqrt{p^2 - p + 1}} = \frac{p(p - 2)}{\sqrt{p^2 - p + 1}}.$$

Kuna sümmeetria tõttu on ka kolmnurk GHI võrdkülgne, siis kolmnurkade GHI ja ABC pindalade suhe võrdub külgede GH ja AB suhte ruuduga:

$$\frac{S_{GHI}}{S_{ABC}} = \frac{(p-2)^2}{p^2 - p + 1}.$$

Et afiinsete teisenduste puhul on iga kolmnurk ekvivalentne võrdkülgse kolmnurgaga ja antud teoreemis kasutatakse ainult neid omadusi, mis afiinsetel teisendustel ei muutu (lõikude pikkuste suhe ja kolmnurkade pindalade suhe), siis kehtib antud teoreem mistahes kolmnurkade puhul. ■

Ülesanne 3. Kolmnurga ABC küljed on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja seejärel on osade otspunktid D, E ja F ühendatud sirglõikudega nii, nagu on näidatud joonisel 8. Leia kolmnurkade DEF ja ABC pindalade suhe. Leia pindalade suhe siis, kui kolmnurga küljed jagada p võrdseks osaks?



Joon 8. Kolmas ülesanne ja Routhi teoreem

Feynmani kolmnurga ülesande üheks üldistuseks on Routhi teoreem,

Edward Routh tõestas 1896. aastal, et ka siis, kui kolmnurga küljed jagada erineva suurusega osadeks, saab tseviaanide paarikaupa lõikumisel tekkiva kolmnurga GHI ja esialgse kolmnurga ABC pindalade suhte välja arvutada.

Routhi teoreem. Kui kolmnurga ABC tipud on ühendatud vastaskülje selliste punktidega D, E ja F , mille puhul kehtivad võrdused

$$\frac{CD}{BD} = x, \frac{AE}{CE} = y, \frac{BF}{AF} = z,$$

siis tseviaanide AD, BE ja CF paarikaupa lõikumisel tekkiva kolmnurga GHI ja kolmnurga ABC pindalade suhe on

$$\frac{S_{GHI}}{S_{ABC}} = \frac{(xyz - 1)^2}{(xy + y + 1)(yz + z + 1)(zx + x + 1)}.$$

Routhi teoreemi saab tõestada Menelaose teoreemi abil. H. S. M. Coxeter oma raamatus „Sissejuhatus geomeetrias“ [2, lk 211-221] tõestas selle teoreemi barütsentriliste koordinaatide abil. Tegemist on väga huvitava raamatuga, mis seob efektselt erinevaid geomeetria teemasid.

Kirjandus

1. Abel, E, Abel, M. ja Kaasik, Ü. (2001) *Koolimatemaatika entsüklopeedia*. Tartu, Ilmamaa, lk 8, 29-30, 126.
2. Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry*. Washington, John Wiley & Sons Inc, p 211-221.
3. De Villiers, M. (2005). *Feedback: Feynman's Triangle*. The Mathematical Gazette, 89 (514), March 2005, p. 107.
4. Tõnso, T. (2013). *Leia pindalade suhe*. Horisont VI/2013, Enigma, MTÜ Loodusajakiri, Tallinn, lk 62.

From Feynman triangle to Routh theorem

Tõnu Tõnso, Tallinn University

Summary

The paper describes the two popular planimetry problems and gives two solutions for both of them using proofs without words. After that both problems are generalised and solved: computational formulas are found using the method of affine transformations. Finally, one more generalisation of Feynman's triangle, namely Routh's Theorem, is presented.