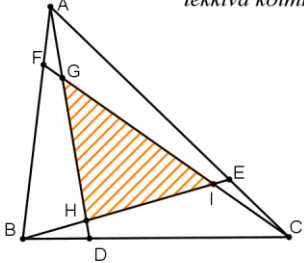


GeoGebra V tööjuhendite komplekt

Teeme muutuva teksti ja joonistega slaidishow, milles kasutame muutuvate väärtustega valemeid

$n = 4$ Feynmani kolmnurga ülesande üldistus

Kui kolmnurga ABC küljed jagada p osaks ning seejärel ühendada kolmnurga tipud vastupäeva vastaskülje sellise punktiga, mis jaotab vastaskülje suhtes 1: $(p-1)$, siis tekkiva kolmnurga GHI ja kolmnurga ABC pindalade suhe on


$$\frac{S_{GHI}}{S_{ABC}} = \frac{(p-2)^2}{p^2 - p + 1}$$
$$\frac{S_{GHI}}{S_{ABC}} = \frac{(4-2)^2}{4^2 - 4 + 1} = \frac{4}{13}$$
$$\frac{S_{GHI}}{S_{ABC}} = \frac{5.485}{17.825} \approx 0.308 \approx \frac{4}{13}$$

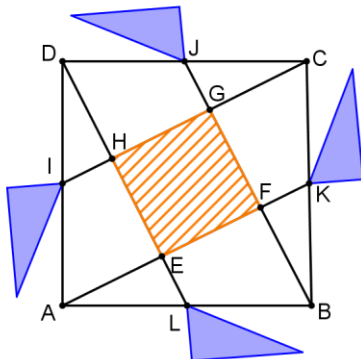
- 1) Teeme valmis kaks liugurit, n ja p . Liugurid $n \in [1; 5]$ ja $p \in [2; 10]$ ja samm (kasv) olgu 1. Liugur n näitab slaidi numbrit, p aga seda, mitmeks osaks jagunevad edaspidi kolmnurga ABC küljed.
- 2) Joonistame vabalt valitud tippudega kolmnurga ABC . Tähistame selle kolmnurga küljed tähtedega $a=BC$, $b=AC$ ja $c=AB$.
- 3) Jaotame kolmnurga ABC küljed suhtes $\frac{1}{p-1}$. Selleks konstrueerime kolm ringjoont. Esimese keskpunkt olgu A ja raadius $\frac{c}{p}$, teise keskpunkt B ja raadius $\frac{a}{p}$, kolmanda keskpunkt C ja raadius $\frac{b}{p}$. Leiame nende ringjoonte ja kolmnurga külgede lõikepunktid. Tähistame need punktid D , E ja F -ga. Peidame kolm ringjoont.
- 4) Ühendame punktid D , E ja F sirglõikude (mida nimetatakse tseviaanideks) abil kolmnurga ABC tippudega. Leiame tseviaanide paarikaupa lõikumisel tekkivad punktid G , H , ja I ning joonistame kolmnurga GHI . Peidame tseviaanide tähist.
- 5) Muudame liuguriga p väärtust ja vaatame, kuidas muutub ΔGHI . Seame p väärtuse võrdseks 3-ga ja leiame kolmnurkade GHI ja ABC pindalad. Muudame ΔABC mõne tipu asukohta. Kui oleme kõik õigesti teinud, siis pindalade suhe peab olema 1: 7.
- 6) Kirjutame pealkirja, teoreemi sõnastuse ja pindalade suhte arvutusvalemi. Pealkirja teeme rasvase kirjaga, teoreemi sõnastuse seriifidega kaldkirjas ja valemi LaTeX'i abil.
- 7) Teeme p väärtuse muutmisel muutuva arvutusvalemi. Selleks sisestame valemisse p -d objektidena ning seejärel ka lugeja ja nimetaja p -d sisaldavate objektidena. Mõtleme, kuidas taandada taanduvat murdu (vihje- funktsioon SÜT).
- 8) Teeme pindalade muutumisega ligikaudselt pindalade suhet leidva arvutusvalemi.
- 9) Koostame slaidishow, mis näitaks erinevatel slaididel erinevaid objekte. Selleks seame paika omadustes lisatingimuste all tingimusi (n väärtusi), millal näidata objekte.

Kahe ruudu pindalade suhe on 1/5.

Teeme teksti ja joonisel pööratavate kolmnurkadega dünaamilise ilma sõnadeta tõestuse, millega näitame, et kahe ruudu pindalade suhe on 1/5.

$n = 5$

Ruudu $ABCD$ tipud on vastupäeva ühendatud vastaskülgede keskpunktidega nii, nagu on näidatud kõrvalloleval joonisel. Tulemusena on saadud väiksem ruut $EFGH$. Tõestame, et ruutude $EFGH$ ja $ABCD$ pindalade suhe on 1/5.


$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{5}$$

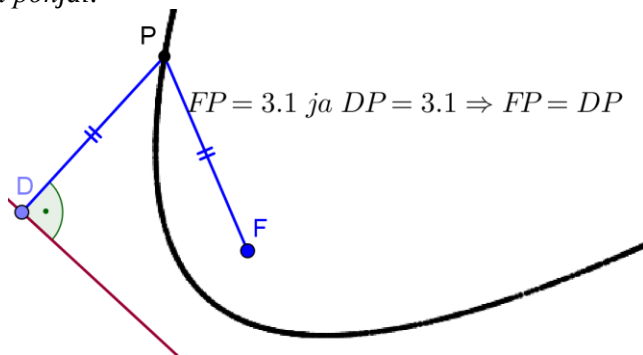
$\alpha = 158^\circ$

- 1) Teeme valmis kaks liugurit, n ja α . Liugur $n \in [1; 5]$ ja kasvagu sammuga 1, liugur $\alpha \in [0; 180^\circ]$ ja samm olgu 1° . Liugur n näitab slaidi numbrit, α aga pöördenurka.
- 2) Joonistame ruudu $ABCD$ tippudega koordinaatteljestiku ruudustiku punktides. Olgu see ruut roheline ja läbipaistev. Leiame ruudu külgede keskpunktid, tähistame need punktid I , J , K ja L . Ühendame ruudu tipud vastupäeva vastaskülgede keskpunktidega.
- 3) Ruudu sisse tekib teine ruut, mille tipud tähistame tähtedega E , F , G ja H . Värvime selle ruudu mingit muud värvi ja viirutame selle sisu.
- 4) Pöörame punkte A ja E ümber punkti L nurga α võrra, B ja F ümber punkti K nurga α võrra, G ja C ümber punkti J nurga α võrra ning D ja H ümber punkti I nurga α võrra. Nii tekivad punktid A' , E' , B' , F' , G' , C' , D' ja H' : mida saab liuguriga α pöörata. Muudame nende punktide asendit liuguri abil ja kontrollime, kas kõik on korras.
- 5) Seame liuguri mingisse vahepealsesse asendisse vahemikust $]0^\circ; 180^\circ[$ ning loome kolmnurgad $A'E'L$, $B'F'K$, $G'C'J$ ja $D'H'I$. Värvime kõik need kolmnurgad ühte värvi (näiteks siniseks). Kontrolliks pöörame liuguri abil neid kolmnurki. Peidame pöörlevate kolmnurkade servade tähist ning tipud A' , E' , B' , F' , G' , C' , D' , H' .
- 6) Kirjutame joonisele sobivasse kohta tõestusülesande teksti. Esitame selle kaldkirjas.
- 7) Kirjutame joonisele sobivasse kohta valemi $\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{5}$.
- 8) Koostame slaidishow, mis näitaks erinevatel slaididel erinevaid objekte. Selleks seame paika omadustes lisatingimuste all tingimusi (n väärtusi), millal näidata objekte.
- 9) Kõrvaldame slaididelt defektid; kujundame slaidid selliseks, et nad meile meeldiks.

Punkti jälje jätmine. Parabooli joonistamine definitsiooni järgi.

Parabooliks nimetatakse sellist joont tasandil, mille iga punkti kaugus ühest kindlast punktist F (parabooli fookusest) ja ühest kindlast sirgest j (parabooli juhtsirgest ehk juhtjoonest) on võrdsed.

Konstruksioon definitsiooni põhjal:



- 1) Paneme graafikavaatesse kaks punkti A ja B ning ühendame need sirgega. Sellest sirgest saabki juhtjoon. Peidame punktid A ja B .
- 2) Võtame juhtjoonest eemal ühe vabalt valitava punkti. Seda punkti tähistame F tähega (fookus) ning seda punkti me edaspidi ilma tungiva vajaduseta ei liiguta.
- 3) Võtame veel ühe vabalt valitava punkti. Tähistame selle D tähega ja kinnitame juhtjoonele. Joonestame läbi punkti D juhtjoonega ristuva sirge. Liigutades punkti D mööda juhtjoont, muudab asendit ka see ristsirge.
- 4) Leiame lõigu FD keskristsirge. Seejärel leiame juhtjoone ristsirge ja lõigu FD keskristsirge lõikepunkti. Tähistame viimase punkti tähega P .
- 5) Muudame punkti P omadusi nii, et see punkt hakkaks jälge jätma. Liigutades punkti D mööda juhtjoont, näeme, kuidas punkt P joonistab parabooli.
- 6) Peidame keskristsirge ja juhtjoonega ristuva sirge. Lisame joonisele lõigud FP ja DP . Määrame lõikude FP ja DP pikkused.
- 7) Võtame punkti P omaduste hulgast jälge jätmise maha. Muudame nähtavaks lõigu FD keskristsirge ja muudame selle sirge omadusi nii, et hoopis see sirge jätaks jälje. Nüüd tekib parabool sirgete parve mähisjoonena.

Teine võimalus: Paneme graafikavaatesse punkti (fookuse) ja sirge. Valime ellipsi tööriista alt parabooli, klõpsame punktil ja juhtjoonel. Nii on kõige lihtsam, aga puudub jälje jätmine.

Definitsioonikohase parabooli ja koolis õpitava parabooli $y=ax^2+bx+c$ seos: Kui fookuseks on valitud punkt $F(p; q)$ ja juhtsirgeks on y -teljega paralleelne sirge $y = r$, (kus $r \neq q$, s.t. fookus ei tohi asuda juhtsirgel) siis omandab parabooli võrrand kuju

$$y = \frac{1}{2(q-r)}x^2 - \frac{p}{q-r}x + \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2(q-r)}.$$

Seega osutub see parabool ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafikuks.

Teeme ühel joonisel parabooli fookuse $F(p; q)$ ja juhtjoonega $y = r$ ning parabooli ülaltoodud võrrandiga, mis sisaldab suurusi p , q ja r . Näitame, et need jooned ühtivad.

Korrutamismasin, mis korrutab ilma arve korrutamata, hoopis geomeetriliselt.

- 1) Joonestame x -telje peale kaks kiirt, üks olgu x -telje positiivse, teine negatiivse suuna peal. Selleks läheb vaja kolme punkti, olgu need A , B , ja C .

Kinnitame $-\infty$ suunduva kiire peale punkti D ja $+\infty$ suunduva kiire peale punkti E .

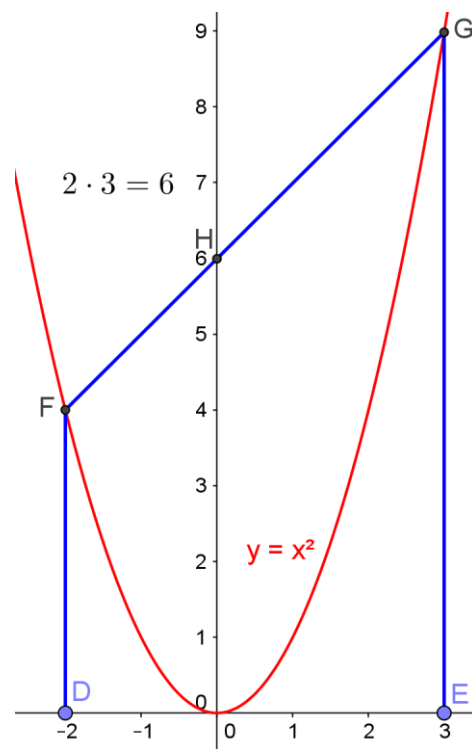
- 2) Joonestame parabooli $y = x^2$. Tõmbame punktide D ja E ristsirged x -teljele. Need sirged lõikuvad parabooliga punktides F ja G . Konstrueerime lõigu FG .

- 3) Leiame lõigu FG lõikepunkti y -teljega H . Selle punkti ordinaat ongi otsitav korrutis.

- 4) Joonistame lõigud DF ja EG . Peidame ära kiirte konstrueerimiseks vaja läinud punktid A , B ja C , kaks kiirt ning kiirtega risti olevad sirged.

- 5) Nüüd on vaja kätte saada graafikult tegurid ja tulemus:

Sisestame sisendreaale Tegur1= $-x(D)$ seejärel Tegur2= $x(E)$ ja Tulemus= $y(H)$



- 6) Esitame tegurid ja tulemuse ka muutuvate objektidena graafikavaatel.

- 7) Tõestame, et nii saab korrutada. Selleks võtame paraboolilt kaks punkti $F(-a; a^2)$ ja $G(b; b^2)$. Leiame sirge FG võrrandi. Lihtsustame selle sirge võrrandi ja leiame sirge algordinaadi. Kui kõik on õigesti tehtud, siis see algordinaat peaks võrduma ab -ga.

Ü1. Joonistada jälge jättes ellips, kasutades selleks kahte erineva raadiusega kontsentrilist ringjoont. https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse#/media/File:Parametric_ellipse.gif

Ü1.2. Teha valmis Pythagorase pükse $a^2 + b^2 = c^2$ esitav mudel.

Ü1.3. Teha mudel, kus ühikringjoonel $x^2 + y^2 = 1$ olevat punkti liigutades on näha siinuslõigu ja koosinuslõigu muutumine. Edasijõudnutele sama, koos tangenslõiguga:

<https://www.mathsisfun.com/geometry/unit-circle.html>