

Trilineaarsed ja kaldkoordinaadid aitavad lahendada vedeliku ümbervalamise ülesandeid

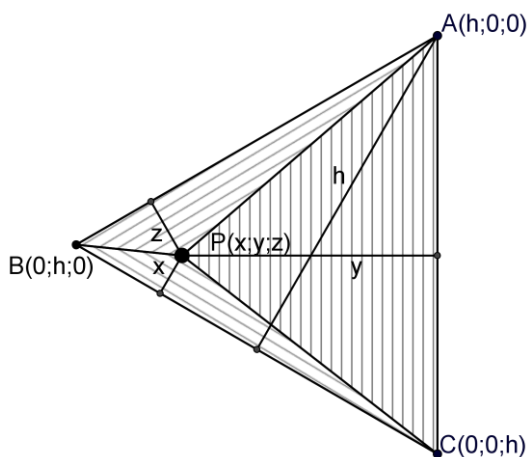
Tõnu Tõnso, Tallinna Ülikool

Ristkoordinaadistikku on tasandil mugav kujutada ruudulisel paberil. Iga esimeses veerandis oleva punkti koordinaadid tähendavad selle punkti kaugusi kahest koordinaatteljeks olevast sirgest. Võtame ruudulise paberi asemel kolmnurkvõrgustikuga paberi, mille puhul kolm paralleelsete sirgete hulka jaotavad tasandi ühesuursteks võrdkülgseteks kolmnurkadeks. Selles kolmnurkvõrgustikus võtame kolm punkti, mille omavahelised kaugused on võrdsed mingi positiivse arvuga d . Nii saame võrdkülgse kolmnurga ABC , mille külje pikkus on d . Võrdkülgse kolmnurga sees olgu mingi vabalt valitav punkt, mida tähistame P tähega. Selle kolmnurga ABC sisepunkti koordinaatideks olgu punkti P kaugused sirgetest BC ; AC ja AB . Tähistame neid kaugusi tähtedega x , y ja z (vt joon 1.). Et kolmnurkade PBC , PAC ja PAB pindalade summa võrdub kolmnurga ABC pindalaga, siis, saame $\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy + \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}d(x + y + z) = \frac{1}{2}dh$, kus h on kolmnurga ABC kõrgus. Siit saame, et $x + y + z = h$.

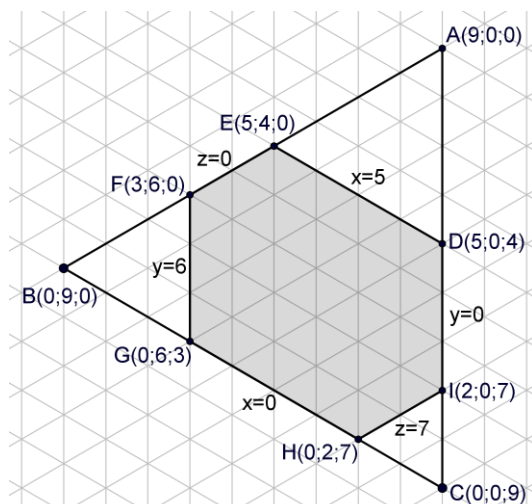
Sirgeid BC ; AC ja AB , millest kolmnurga seest vabalt valitud punkti kaugused on x , y ja z , nimetame koordinaattelgedeks.

Koordinaattelgede võrranditeks on $x = 0$, $y = 0$ ja $z = 0$. Et võrdkülgse kolmnurga ABC kõrgus on h , siis punktide A ; B ja C koordinaadid on $(h;0;0)$, $(0;h;0)$ ja $(0;0;h)$.

Saadud koordinaate, mis esitavad kolmnurga punktide kaugusi kolmest sirgest, nimetatakse *trilineaarseteks* koordinaatideks.



Joon 1. Trilineaarsed koordinaadid.



Joon 2. 9 liitrit vett, anumad 5, 6 ja 7 liitrit.

Kolmnurkvõrgustik ja trilineaarsed koordinaadid sobivad väga hästi kirjeldama olukordi, kus kolme mittenegatiivse muutuva suuruse summa on konstantne. Kui nüüd kolmest muutuvast suurusest üks püsib konstantne ja kaks ülejäänut muutuvad, siis punkt $(x; y; z)$ hakkab liikuma mööda kolmnurga ABC küljega paralleelset sirget.

Niisugune olukord tekib näiteks siis, kui meil on kolm anumad, esimeses on x liitrit, teises y liitrit ja kolmandas z liitrit vedelikku ning me kallame vedelikku ühest anumast teise. Vt ka [1, lk 89-90].

Olgu anumate ruumalad vastavalt a , b ja c ning kehtigu võrratused $h \geq c > b > a$.

Siis on vedeliku kogused anumates piiratud võrratustega

$0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ ja $0 \leq z \leq c$.

Trilineaarsetes koordinaatides esitatud vedeliku võimalikke koguseid anumates kirjeldav piirkond on üldjuhul kuusnurkne. Teisel joonisel on kujutatud olukorda, kus anumate mahutavused on 5, 6 ja 7 liitrit ning vedeliku kogus, mida neis anumates ümber kallame, on 9 liitrit.

Olenevalt h , a , b ja c väärtustest võivad tekkida ka viisnurksed, nelinurksed ja kolmnurksed piirkonnad.

Trilineaarsete koordinaatide kasutamist selgitame 2015. a. Horisondi I numbris [7] esitatud ülesannete abil.

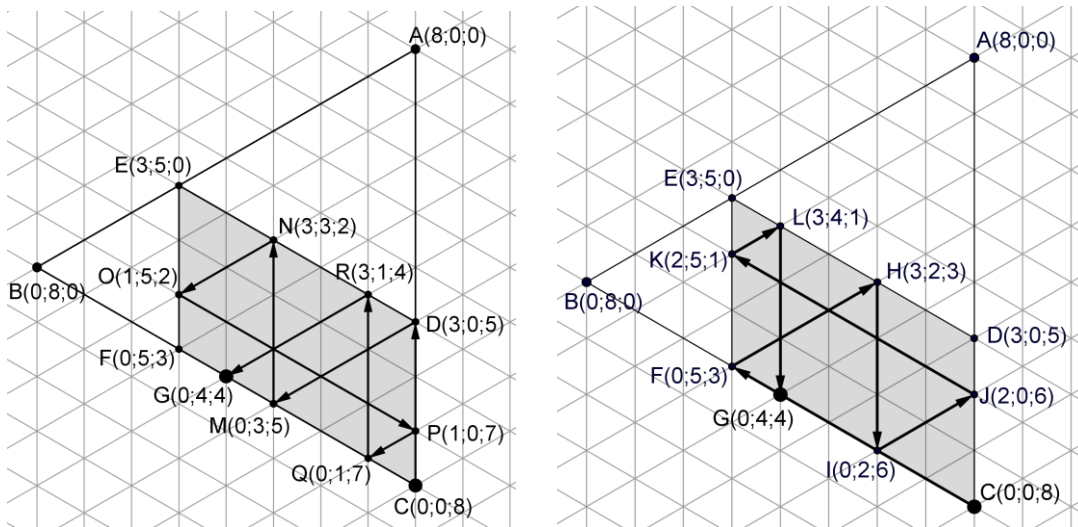
Ül 1. *On olemas kolm kannu, mahtuvustega vastavalt 3, 5 ja 8 gallonit. 8-galloniline kann on veini täis, ülejäänud kannud on tühjad. Vein on vaja jaotada kahte võrdsesse ossa, kallates seda ühest nõust teise, kasutamata peale nende kolme kannu ühtegi muud mõõtmisvahendit. Veini tuleb kallata nii, et ümbervalamisi oleks nii vähe kui võimalik.*

Joonestame kolmnurkvõrgustikku võrdkülgse kolmnurga, mille külje pikkus on 8 ühikut. Et kannude mahud on piiratud (esimesse kannu mahub kuni 3 gallonit, teise kuni 5 gallonit ja kolmandasse kuni 8 gallonit veini), siis kanname ka need piirangud võrgustikku. Tulemusena saame joonisel 3 kujutatud rööpküliku $CDEF$.

Üldjuhul võib värvitud piirkonna ja selle äärejoone iga punkt olla vedeliku valamise ülesande lähtepunktiks. Antud ülesande puhul on selleks punkt $C(0;0;8)$. Kuna vedeliku valamine ühest nõust teise lõpeb alati sellega, et kas esimene nõu saab tühjaks või teine nõu saab täis, siis lõpeb iga vedeliku valamine piirkonna äärejoone peal. Seetõttu peab ka vedeliku valamise ülesande sihtpunkt (antud ülesande puhul on selleks punkt $G(0;4;4)$) jääma piirkonna äärejoone peale, muidu pole ülesanne lahenduv.

Veini kallamisel tuleb liikuda rööpkülikus $CDEF$ mööda võrgustikku nii, et jõuaksime lähtepunktist $C(0;0;8)$ sihtpunkti $G(0;4;4)$ lühima arvu sammudega. Iga ümberkallamine peab lõppema mõne rööpküliku serva

peal, sest ainult siis on kas nõu, millest veini välja kallatakse, tühjaks saanud või nõu millesse veini kallatakse, täis saanud.



Joon 3. Esimene ülesanne ja selle kaks lahendusviisi.

Seega on punktist $C(0;0;8)$ väljudes ainult kaks võimalikku käiku (minna kas punkti $D(3;0;5)$ või punkti $F(0;5;3)$). Punktide D ja F ei ole mõtet minna punkti E ega tagasi punkti C ; seega tuleb punktist D minna punkti M ja punktist D punkti H . Niiviisi jätkates saame kaks erinevat teekonda, mida on kujutatud joonisel 3.

Esimesel juhul liigume me mööda teed: $C(0;0;8) \rightarrow D(3;0;5) \rightarrow M(0;3;5) \rightarrow N(3;3;2) \rightarrow O(1;5;2) \rightarrow P(1;0;7) \rightarrow Q(0;1;7) \rightarrow R(3;1;4) \rightarrow G(0;4;4)$.

Teisel juhul aga mööda teed: $C(0;0;8) \rightarrow F(0;5;3) \rightarrow H(3;2;3) \rightarrow I(0;2;6) \rightarrow J(2;0;6) \rightarrow K(2;5;1) \rightarrow L(3;4;1) \rightarrow G(0;4;4)$.

Esimesel juhul tuleb teha 8 ümbervalamist, teisel juhul aga ainult 7 valamist. Seega tuleb eelistada teist võimalust.

Kahte järgmist ülesannet tasub proovida lahendada kolmnurkvõrgustiku abil, joonistades sinna ülesande tingimustele vastava piirkonna, lähtepunkti ja sihtpunkti.

Ül 2. Ääreni täidetud ämbris on 12 liitrit vett. See vesi tuleb jaotada võimalikult väikese arvu ümberkallamistega kaheks võrdseks osaks; kasutada saab lisaks ämbrile ka 7-liitrist ja 5 liitrist pudelit.

Kontrolliks: piirkonnaks on rööpkülik, hakkama saab 11 kallamisega.

Ül 3. Kolm röövlit varastasid kaupmehelt vaasi, milles oli 24 untsi kallist vedelat palsamit. Põgenedes ostsid nad klaasipuhujalt kolm klaasanumat, millesse mahub vastavalt 13, 11 ja 5 untsi palsamit. Kuidas peaksid nad

jagama selle palsami kolmeks võrdseks osaks? Kasutada võib ainult neid nelja anumat ja teha tuleb võimalikult vähe ümberkallamisi.

Vihje - siin tuleb nelja anuma ülesanne muuta kolme anuma ülesandeks, näiteks täita vaasist 5 untsine ja 11 untsine nõu ning alles jääv 8 untsi palsamit anda koos vaasiga ühele röövlile. Allesjääv 16 untsi palsamit tuleb jagada 5, 11 ja 13 untsiste anumate abil kaheks võrdseks osaks. Kogu ülesande lahendamiseks on vaja teha ainult 6 ümberkallamist.

Kaldkoordinaadid

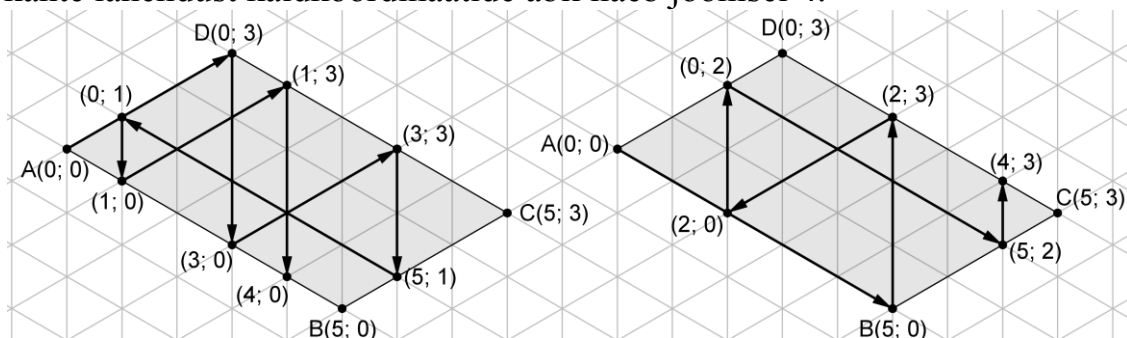
Filmis „Visa hing 3“ [2] tuleb detektiiv John McClane'il koos Zeus Carveriga pommi plahvatamise vältimiseks lahendada järgmine ülesanne:

Ül 4. *Veega täidetud purskkaevu kõrval on kaks veeanumat, mahutavustega 5 gallonit ja 3 gallonit. Nende kahe anuma abil tuleb mõõta välja täpselt 4 gallonit vett. Üleliigse vee võib purskkaevu tagasi valada.*

Kahe anuma ja veereservuaariga ülesandeid saab taandada kolme anuma ülesannete peale, võttes kolmanda anuma (see anum täidab veereservuaari rolli) ruumalaks kahe väiksema anuma ruumalade summa.

Samas ei lähe kahe anuma ja piiramatult mahuga vedelikureservuaariga (näiteks jõe või basseini) ülesannete lahendamisel tarvis kolme trilineaarset koordinaati. Sel juhul piisab kahest koordinaadist. Kui kaks koordinaattelge paigutada nii, et nad lõikuksid 60° kraadise nurga all, siis saame sobiva kaldkoordinaadistiku. Valamisülesande lähtepunktiks on punkt $(0; 0)$. Anumate ruumalad määravad ära rööpküliku, mille kaks külge paiknevad koordinaattelgedel.

Filmis „Visa hing 3“ esitatud ülesanne on esimese ülesande analoog, mille kahte lahendust kaldkoordinaatide abil näeb joonisel 4.



Joon 4. Ül 4. „Visa hing 3“ ülesande kaks lahendusviisi

Siin ja edaspidi lisame ülesannetele täiendava lisatingimuse – vett tuleb püüda valada nii, et kõikvõimalikke nõude täitmisi, tühjendamisi ja ümberkallamisi oleks võimalikult vähe. Kui seda lisatingimust arvestada, siis

tuleb neist kahest lahendusviisist eelistada teist võimalust, sest siis tehakse kaks ümbervalamist vähem.

Kui seda graafilist lahendusmeetodit on tutvustatud õpilastele, siis võiks nad proovida lahendada ka „Horisondis“ nr 2 2015. a. [8, lk 62] ilmunud ülesannet. Kõigis neis on ülesande lahendaja jõe kaldal ja tal on kaks tühja veeanumat.

Ül 5. 8-liitrise ja 5-liitrise anuma abil tuleb mõõta 4 liitrit vett.

Ül 6. 11-liitrise ja 7-liitrise anuma abil tuleb mõõta 5 liitrit vett.

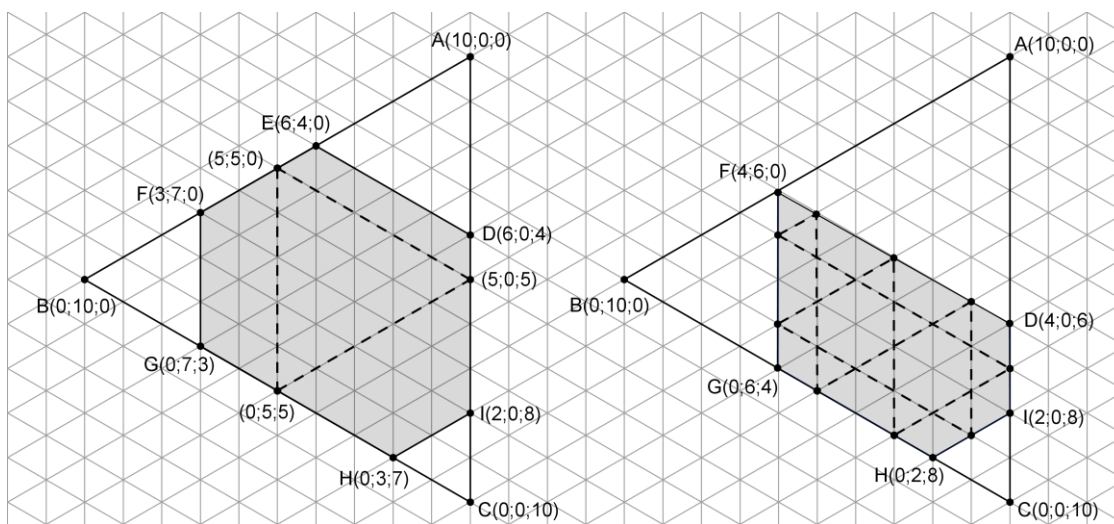
Ül 7. 11-liitrise ja 9-liitrise anuma abil tuleb mõõta 8 liitrit vett.

Ül 8. 12-liitrise ja 11-liitrise anuma abil tuleb mõõta 6 liitrit vett.

Kontrolliks - viienda ülesande puhul on vähim ümbervalamiste arv 10, kuuenda puhul 12, seitsmenda puhul 14 ja kaheksanda puhul 20.

Vedeliku ümbervalamise ülesannete hulgas on nii selliseid, millel on üks optimaalne lahendus, kui ka selliseid, millel on kaks või rohkem optimaalset lahendust. Aga leidub ka selliseid, millel lahendus puudub.

Nii näiteks ei saa kolme anumaga valamisülesannete puhul jaotada $h = 10$ liitrit vett kahte võrdsesse ossa, kui meil on kolm anumad mahtuvustega $a = 8$, $b = 7$ ja $c = 6$ liitrit. Vt joonis 5, vasakpoolne osa. Punktide $(5; 5; 0)$, $(0; 5; 5)$ ja $(5; 0; 5)$ moodustavad kinnise tsükli, millesse muudest piirkonna äärejoone punktidest ümbervalamiste teel sattuda ei saa. Sama liiki probleemid tekivad siis, kui $h = 2d \geq a > b > c > d$.



Joon 5. Lahendumatud ümberkallamisülesanded

Ka ei õnnestu $h = 10$ liitrit vett jaotada kahte võrdsesse ossa, kui meil on kolm anumad mahtuvustega $a = 8$, $b = 6$ ja $c = 4$ liitrit. Vt joonis 5, parempoolne osa. Paaritud arvu liitreid ei saa välja mõõta, kui me kasutame ainult nõusid, mille mahtuvused on paarisarvud. Seda liiki probleemid tekivad üldiselt siis, kui kõigi anumate mahtuvuste suurim ühistegur on ühest suurem.

Ka kahe anuma ja reservuaariga ülesanded pole alati lahenduvad. Olgu a ja b anumate mahtuvused, välja mõõta tuleb d liitrit. Olgu x ja y täisarvud mis näitavad, kui mitu korda tuleb vastavalt a ja b liitriseid nõusid reservuaarist täita (siis on x või y positiivne) või reservuaari tühjendada (siis on x või y negatiivne). Saab näidata, et kahe anuma ja reservuaariga ülesanne on lahenduv parajasti siis, kui diofantiline võrrand $ax + by = d$ on lahenduv. Niisugune võrrand on aga lahenduv ainult siis, kui arv d jagub arvude a ja b suurima ühisteguriga.

Vedeliku ümbervalamise ülesannete lahendamisel saab lisaks katsetamisele ja nõudes olevate ruumalade tabeli täitmisele kasutada trilineaarseid ning kaldkoordinaate, diofantilisi võrrandeid ja graafiteooriat. Neid ülesandeid käsitlevad geomeetrid [1], heuristika rajaja [6], keerdülesannete loojad [3], diskreetse matemaatika spetsialistid [5], programmeerijad [4] kognitiiv-psühholoogid ja tehisintellekti spetsialistid.

Seega on tegemist väga kasuliku materjaliga matemaatika õpetamisel.

Kirjandus

1. Coxeter, H. S. M. & Greitzer, S.L. (1967). *Geometry revisted*. Washington, The Mathematical Association of America, 89-93.
2. *Die Hard with a Vengeance*, (1995), action film, 20th Century Fox & Touchstone Pictures, US.
3. Dudeney, H. E. (1970) *Amusements in Mathematics*. NY, Dover, 109
4. Harvey, B. (1997). *Computer Science Logo Style: Symbolic Computing* (Vol. I), MA: MIT, pp. 279–287
5. McDiarmid C. J. and Alfonsin, J. R. (1994). “Sharing jugs of wine,” *Discrete Mathematics*, vol. 125, pp. 279–287.
6. Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press, New York, 226-229.
7. Tõnso, T. (2015). *Vedeliku ümbervalamise ülesanded*. Horisont I/2015, Enigma, MTÜ Loodusajakiri, Tallinn, 62.
8. Tõnso, T. (2015). *Veel vedeliku ümbervalamise ülesandeid*. Horisont II/2015, Enigma, MTÜ Loodusajakiri, Tallinn, 62.

Trilinear- and oblique coordinates are helping to solve two and three jug puzzles

Tõnu Tõnso, Tallinn University

Summary

The paper describes the solutions of the three and two jug problems, based on trilinear and oblique coordinates.