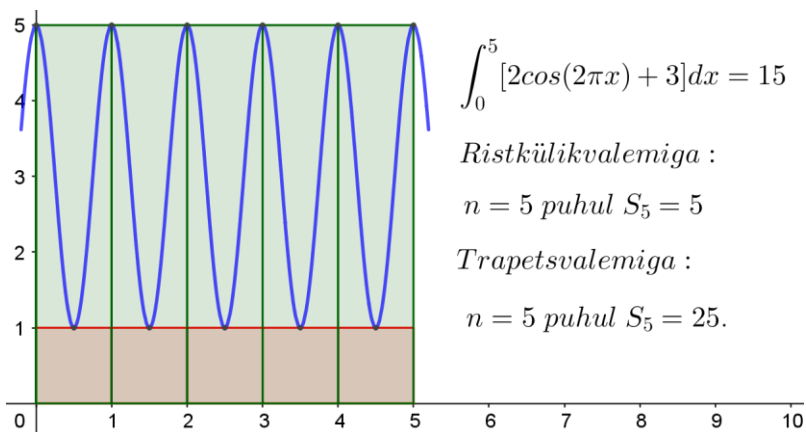


Numbriline integreerimine MonteCarlo meetodil

Ostsilleeruvaid funktsioone integreerides võivad tavalised kvadratuurvalemid anda integraali tegelikust väärtusest oluliselt erinevaid tulemusi.

Kahe-, kolme- ja enamakordseid integraale võttes hakkab aga sõlmede koguarv kasvama väga kiiresti, vastavalt astmefunktsiooni seaduspärasustele. Kui näiteks ühekordse integraali puhul jaotame lõigu $[a; b]$ 100 sõlmeks, siis kahekordse integraal puhul tuleks ruut küljepikkusega $b - a$ jaotada juba $100 \cdot 100$ ruuduks, kolmekordse integraali puhul kuup servapikkusega $b - a$ jaotada $100 \cdot 100 \cdot 100$ kuubiks. Sellistel juhtudel kasutatakse integreerimisel Monte Carlo meetodit.

Monte Carlo meetodi selgituseks üritame leida integraali



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

See integraal kujutab endast pindala, mis jääb ühikringjoone kaare alla koordinaatteljestiku I veerandis. Korraldame seeria katseid, milles hakkame „viskama“ juhuslikku punkti $(x; y)$ ruutu, mis on määratud võrratustega $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1$. Seda antud vahemikku sattuva juhusliku punkti viskamist korraldame mõne juhuslikke arve genereeriva funktsiooni (näiteks RND või Random) abil. Kokku teeme n katset. Loeme kokku kõik need juhtumid, mil juhuslik punkt jääb funktsiooni $y = \sqrt{1-x^2}$ graafiku alla. Olgu see arv m .

Edasises lähtume võrdusest

$$\frac{\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx}{S_{\text{ühikruut}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

Kui n on küllalt suur, siis võime öelda, et

$$\frac{\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx}{S_{\text{ühikruut}}} \approx \frac{m}{n}.$$

Et ühikruudu pindala on 1, siis arvutub ühikringjoone kaare alla jääva osa pindala ligikaudselt valemiga:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \approx \frac{m}{n}.$$

Ühel õnnelikul katsel, võttes $n = 100$ ilmnes, et $m = 78$.

Seega siis $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \approx \frac{78}{100}$.

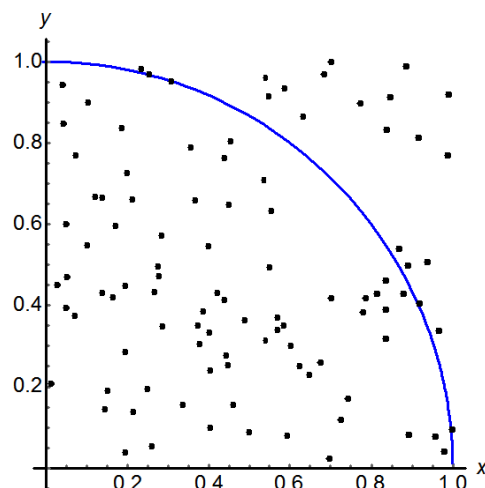
Et ühikringi pindala on võrdne arvuga π , siis

on selle integraali täpne väärtus $\frac{\pi}{4}$.

Kui kasutada $\frac{\pi}{4}$ lähendväärtusena arvu 0,78,

siis saaksime arvu π lähendiks $4 \cdot 0,78 = 3,12$.

Paraku on Monte-Carlo meetod väga aeglaselt koonduv meetod ja seetõttu tuleks selleks, et arvu π lähendiks nii täpseid tulemusi saada, teha vähemalt tuhatkond katset.



Nimetuse „Monte Carlo meetod“ võtsid kasutusele John von Neumann, Stanislaw Ulam ja Nicholas Metropolis 1940. aastatel, kui nad tegelesid Manhattani projektiga. Nimetus tuli Monte Carlo kasiino järgi, kus Ulami onu tihti oma raha maha mängis. Monte Carlo meetodid ei ole ainult numbrilise integreerimise meetod, neid kasutatakse lisaks matemaatikale veel paljudes muudes valdkondades, seal kus tuleb simuleerida juhuslikke nähtusi. Matemaatika eriala üliõpilased peaksid läbi lugema eestikeelse Monte Carlo meetoditele pühendatud artikli Wikipedias: https://et.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_meetodid. Hoiatan, eestikeelses artiklis on palju vigu.

Kuidas käib Monte Carlo meetodil veidi keerulisemate kujundite pindala leidmine?

Olgu funktsioon $y = f(x)$ lõigul $[a; b]$ pidev ja positiivne. Joonistame funktsiooni graafiku ja leiame selle funktsiooni maksimaalse väärtuse lõigul $[a; b]$. Konstrueerime ristküliku, mille aluse otspunktideks on x -telje peal olevad punktid, kus $x = a$ ja $x = b$. Ristküliku kõrguseks on aga arv d , mille puhul kehtib seos:

$$d \geq \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Viskame ristküliku sisse n juhuslikku punkti, mille koordinaadid on $(x_i; y_i)$.

Loeme kokku kõik need punktid, mille puhul $y_i < f(x_i)$. Need punktid on kõik sellised, mis jäävad funktsiooni graafiku ja x -telje vahele. Olgu neid punkte m .

Kirjutame välja võrduse

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{S_{\text{ristkülik}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

Küllalt suurte n väärtuste puhul kehtib ligikaudne seos:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{S_{\text{ristkülik}}} \approx \frac{m}{n}.$$

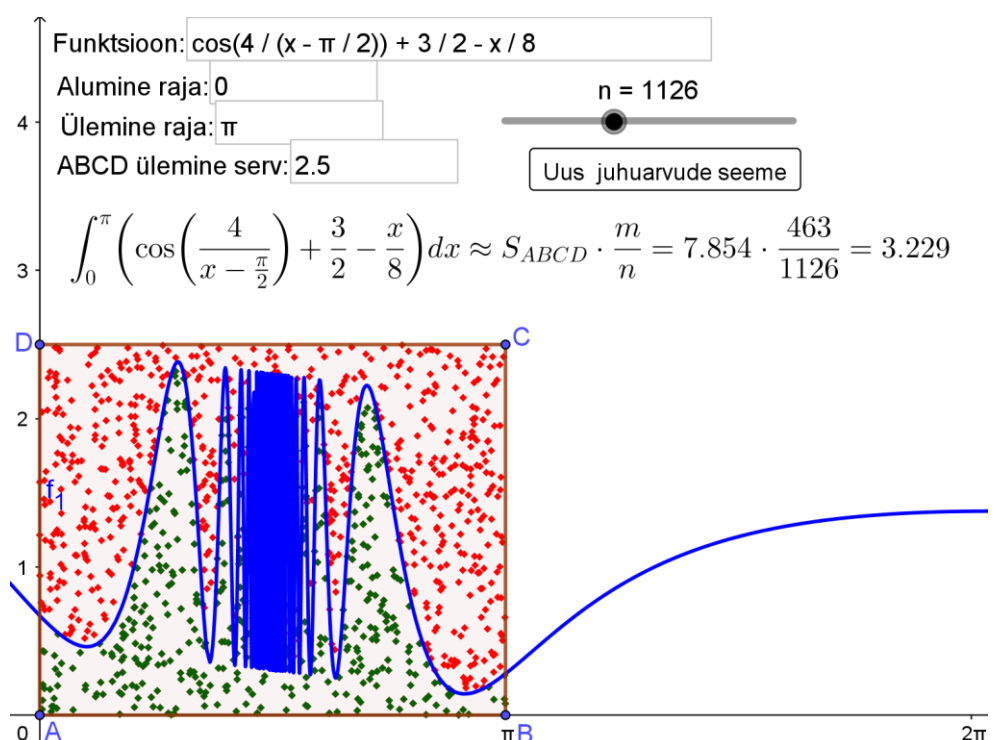
Siit

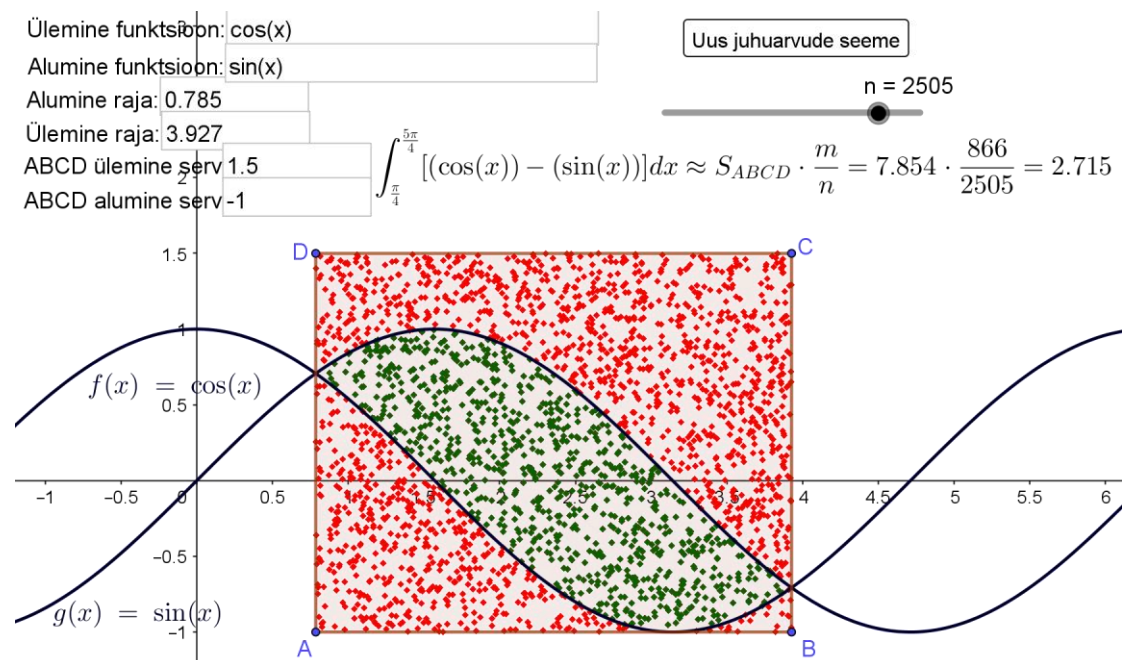
$$\int_a^b f(x) dx \approx S_{\text{ristkülik}} \cdot \frac{m}{n}.$$

Loengu ettevalmistamise käigus sai valmis tehtud kaks GeoGebra faili. Neist esimene integreerib Monte Carlo meetodil positiivset funktsiooni $f(x)$ lõigus $[a; b]$, teine aga leiab Monte Carlo meetodil kahe funktsiooni graafikute vahele jääva pindala lõigus $[a; b]$. Teisel juhul, me funktsioonidelt $f(x)$ ja $g(x)$ positiivsust ei nõua, nõuame ainult, et

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a; b].$$

Kõrval on pilt esimese faili töö kohta, järgmisel leheküljel teise faili töö kohta:





Kuidas käib siis Monte-Carlo meetodi rakendamine kahe-, kolme- ja enamakordsete integraalide puhul.

Ühekordsete integraalide puhul kujundame me raskesti hinnatava pindalaga tasandilise kujundi ümber ühe lihtsasti arvatava pindalaga kujundi – näiteks ristküliku, (aga põhimõtteliselt võiks see kujund ka näiteks ring olla!), laseme kukkuda juhuslikul punktil selle ristküliku sisse ning loeme kokku kõik need juhtumid, kus ristküliku sisse sattunud juhuslik punkt on ühtlasi ka selle raskesti hinnatava pindalaga kujundi sees.

Selle hindamiseks, kas mingi punkt asub mingi kujundi sees või hoopis väljaspool seda, on mõned toredad algoritmid. Programmeerijad võiksid vastavad algoritmid kusagilt Interneti sügavustest ülesse otsida...

Lõpuks loeme punktide arvude suhte m/n ligikaudu võrdseks pindalade suhtega. Paraku tuleb selle meetodi puhul teha mitte palju, vaid lausa väga palju katseid, näiteks arvu π esimese kolme tüvenumbri määramiseks veerandringjoone meetodil ei piisa kolmest tuhandest katsest.

Kui meil on nüüd näiteks vaja määrata mõne raskestihinnatava ruumalaga ebakorrapärase keha ruumala, siis tasub selle keha ümber kujundada mõni korrapärane ja kergesti arvatava ruumalaga keha (näiteks risttahukas või kera) ja hakata siis viskama kolme juhusliku koordinaadiga punkti selle kergesti arvatava ruumalaga keha sisse ning fikseerida ära kõik juhtumid m , kus see punkt satub ühtlasi ka raskesti arvatava ruumalaga keha sisse. Kui katsete arv n läheneb lõpmatusse, siis ruumalade suhe võrdub suhtega m/n .

Paraku tuleb ette ka olukordi, kus meil on tarvis võtta mitte kahekordne integraal, vaid on vaja leida näiteks n –mõõtmelise keha „ruumala“ või hoopis sajakordne integraal. Modifitseerin ülalmainitud eestikeelset Wikipedia artiklit:

Deterministlikud arvulised integreerimisalgoritmid töötavad hästi väheste mõõtmete korral, aga esineb kaks probleemi, kui funktsioonidel on mitu muutujat. Esiteks mõõtmete arvu kasvuga suureneb järsult sõlmede arv, kus peame teadma oma n -mõõtmelise funktsiooni väärtust.. Näiteks kui 10 sõlme tagavad piisava täpsuse ühes mõõtmes, siis 100 mõõtmes on vaja väärtusi 10^{100} punktis arvutada, mis nõuab ilmselgelt liiga palju arvutusvõimsust. Teiseks, mitmemõõtmelise piirkonna ääritingimused võivad olla väga keerulised, seega ei pruugi olla mõistlik lihtsustada probleemi mitmele ühekordsele integraalile. 100 mõõdet ei ole mitte mingil määral ebaharilik, kuna paljudes füüsikalistes probleemides mõõde võrdub vabadusastmega. Monte Carlo meetodid võimaldavad väljapääsu arvutusaja eksponentsiaalsest kasvust. Samas on aga nii, et Monte Carlo meetod on kui rusikareegel, mis ei anna kunagi päris täpseid tulemusi, aga annab tulemusi siis, kui teised meetodid ei tööta.

Milliseid jämedaid vigu eestikeelses vikipeediaartiklis peaks matemaatikatudeng teadma? Esiteks, veerandringjoone meetodil π määramist ei saa võrrelda noole viskamisega, sest noole viskamisel on eesmärk tabada mingit punkti ja siis ei jaotu nooletabamused pinnatükil ühtlaselt ja juhuslikult (nagu kukuvad vihmapiisad), vaid hoopis kahemõõtmelise normaaljaotuse järgi ümber sihtpunkti. Teine karjuv viga on von Neumanni poolt juhuarvude genereerimisel kasutatud „keskruutude meetod“ tõlkida „ruutkeskmise“ meetodiks. Seepärast lugege ikka ka ingliskeelset Wikipedia artiklit.