Ekstreemumülesanded

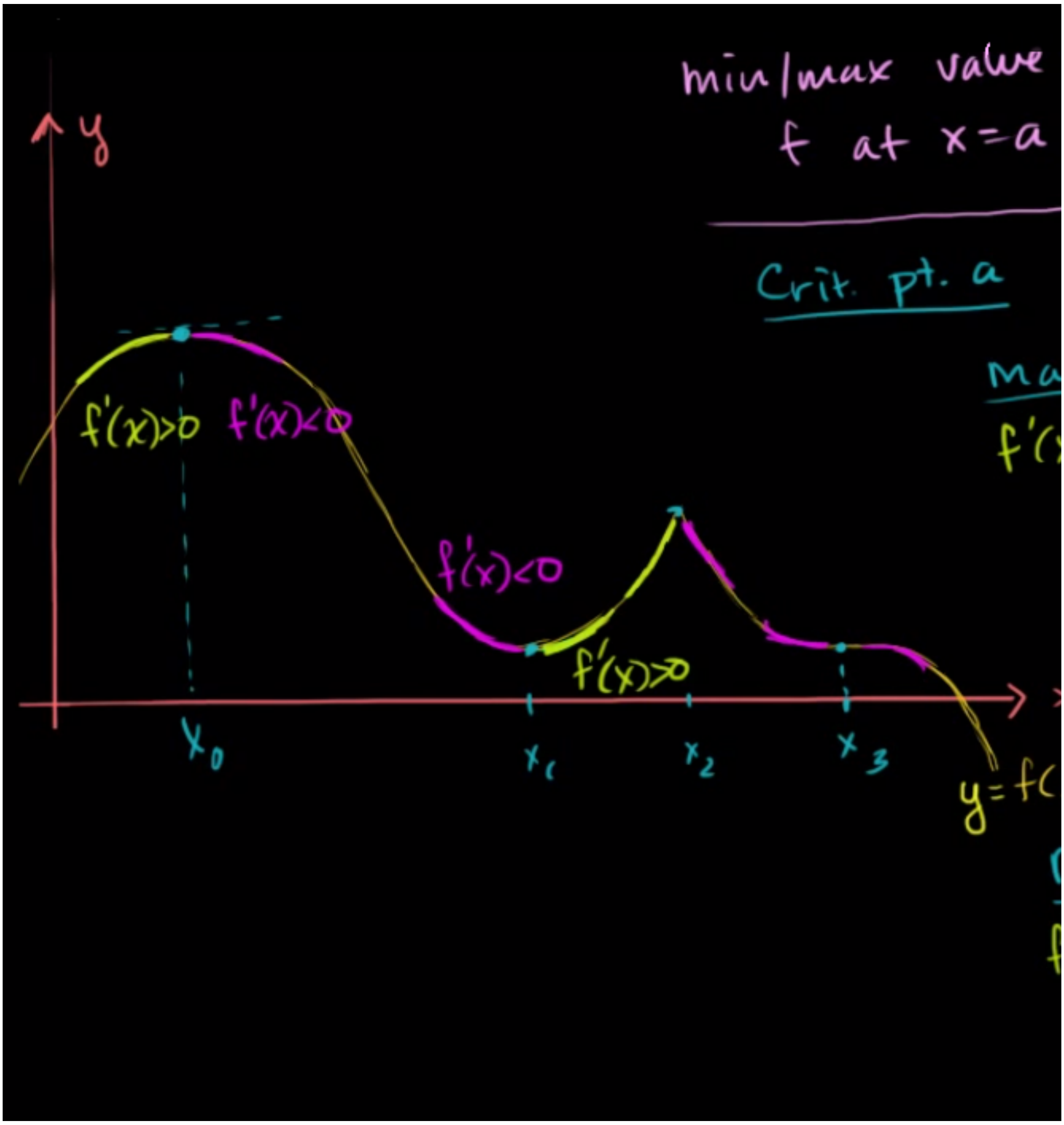
Mõisted

Ekstreemum (algallikas on ladina sõna *extremum* 'äär, piir') ehk *ekstremaalväärtus* on funktsiooni maksimum või miinimum. **Ekstreemumkoht** - ühe muutuja funktsiooni argumendi niisugune väärtus, mille korral see funktsioon saavutab oma ekstreemumi.

Ekstreemumpunkt:
1. ühe muutuja funktsiooni ekstreemumkohale vastav punkt selle funktsiooni graafikul.
2. määramispiirkonna punkt, milles vaadeldav mitme muutujaga funktsioon saavutab oma ekstreemumi.

Funktsioonil võivad olla ekstreemumid ainult *kriitilistes punktides*. Mis on kriitiline punkt?

Punkti *a* nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **kriitiliseks punktiks**, kui $f'(a) = 0$ (statsionaarne punkt) või kui kohal *a* ei ole sel funktsioonil tuletist.



Kokkuvõte: Ekstreemumpunkt on kriitiline punkt, milles funktsiooni tuletis muudab märki.

Kui tuletise märk muutub argumendi väärtuse kasvades plussist miinuseks, siis on tegemist maksimumiga.
Kui tuletise märk muutub argumendi väärtuse kasvades miinusest plussiks, siis on tegemist miinimumiga.

Statsionaarsete punktide ($f'(a) = 0$) puhul aitab maksimume-miinimume eristada funktsiooni teine tuletis.

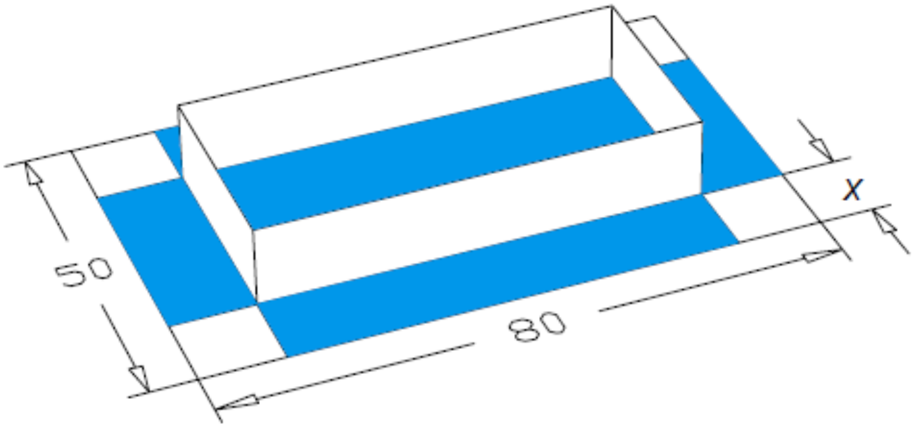
Kui $f''(a) < 0$, siis on funktsioonil kohal a lokaalne maksimum,
Kui $f''(a) > 0$, siis on funktsioonil kohal a lokaalne miinimum.

Näited

Näide 1. Ristkülikukujulisest papitükist, mille mõõtmed on 50 cm ja 80 cm, tuleb valmistada kaaneta karp. Selleks lõigatakse papitüki nurkadest ära võrdsed ruudud ja murtakse servad üles.

Kui suur peab olema väljalõigatavate ruutude külg, et karbi ruumala oleks suurim?

Olgu väljalõigatavate ruutude külje pikkus x cm.
On ilmne, et $0 < x < 25$.



Papitükist valmistatava karbi põhjaks on ristkülik, mille küljed on $50 - 2x$ ja $80 - 2x$.
Seega karbi põhja pindala on

$(50 - 2x)(80 - 2x)$

ja ruumala on $x\cdot(50 - 2x)(80 - 2x)$.

Et karbi ruumala V sõltub äralõigatavate ruutude külje pikkusest x, siis võib ruumala vaadelda muutuja x funktsioonina:

$V(x) = x\cdot(50 - 2x)(80 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

Leiame funktsiooni $V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$ maksimumkoha vahemikust]0; 25[.

$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 0 \Rightarrow x_1 = 10$ või $x_2 = \frac{100}{3}$.

Et $\frac{100}{3} > 25$, seetõttu uurime seda, kas tegemist on maksimumi või miinimumiga ainult kohal $x = 10$.

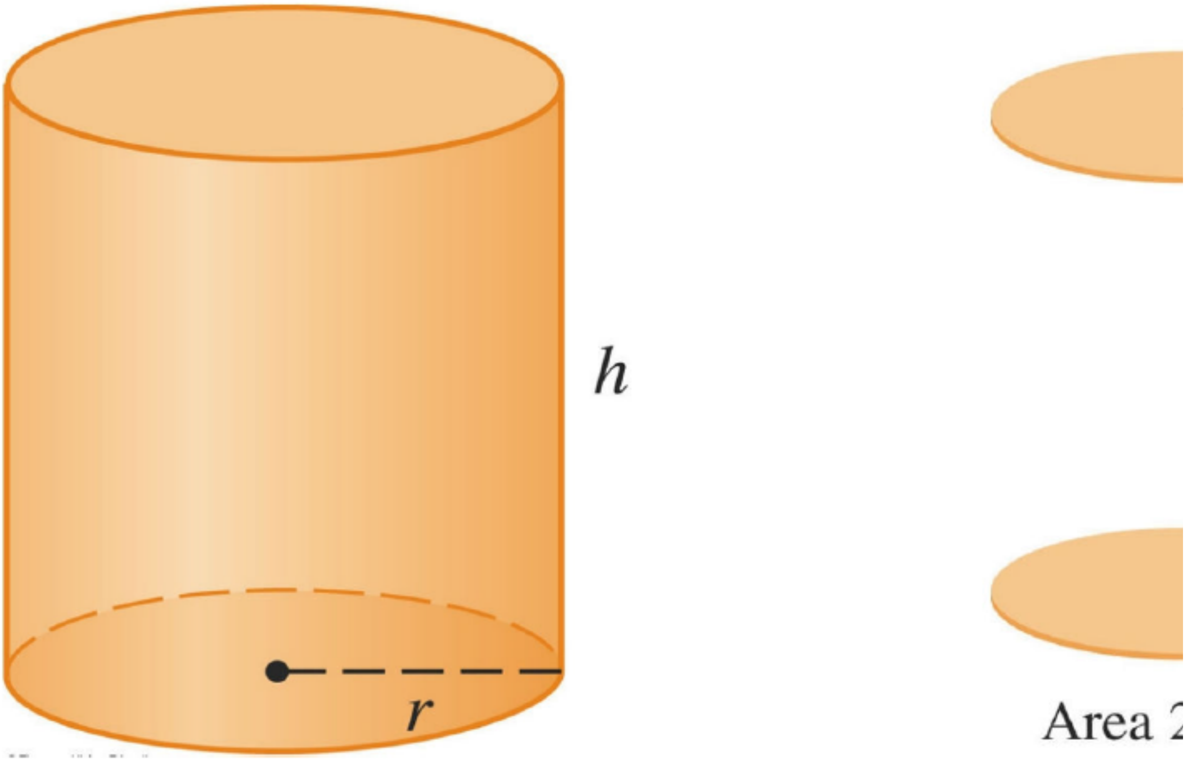
Kasutame teist tuletist:

$V''(x) = 24x - 520$; $V''(10) = 240 - 520 = -280 < 0$.

Seega kohal 10 on funktsiooni V(x) maksimumkoht.

Äralõigatava ruudu külg peab olema 10 cm.

Näide 2. Silindrikujulise konservipurgi ruumala on V. Millised peavad olema konservipurgi mõõtmed, et purgi valmistamiseks kuluks võimalikult vähe plekki (valtsimist ei arvestata!)?



Tähistame silindri raadiuse tähega *r*, kõrguse tähega *h* ning avaldame *r* ja *h* kaudu täispindala *S*:

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Täispindala sõltub kahest suurusest, silindri kõrgusest ja raadiusest. Ekstreemumülesannet on mugavam lahendada siis, kui vastav funktsioon sõltub ühest argumendist.

Et konservipurgi ruumala on konstantne, siis valemist $V = \pi r^2 h$
avaldame suuruse *h:*

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

ja asendame täispindala valemisse

$$S = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

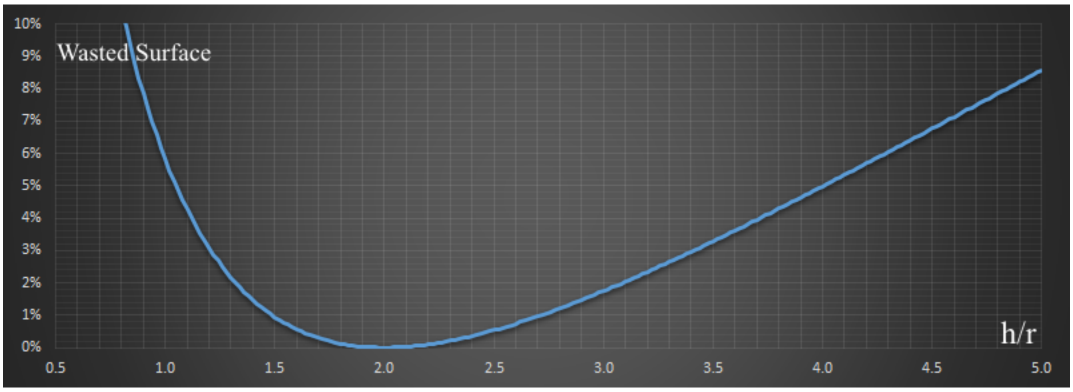
Peame leidma raadiuse väärtuse, mille korral pindala S väärtus on vähim, st tuleb
leida funktsiooni S(r) miinimumkoht. Selleks leiame S'(r) ja võrdsustame nulliga.

$$S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r.$$

$$-\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0. \quad \text{Siit } r^3 = \frac{V}{2\pi}. \text{ Et } V = \pi r^2 h \text{ , siis } r^3 = \frac{\pi r^2 h}{2\pi}.$$

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled r^2-ga, saame et $r = \frac{h}{2}$.

Siit järeldub, et konservipurgi põhja läbimõõt ja kõrgus peavad olema võrdsed.

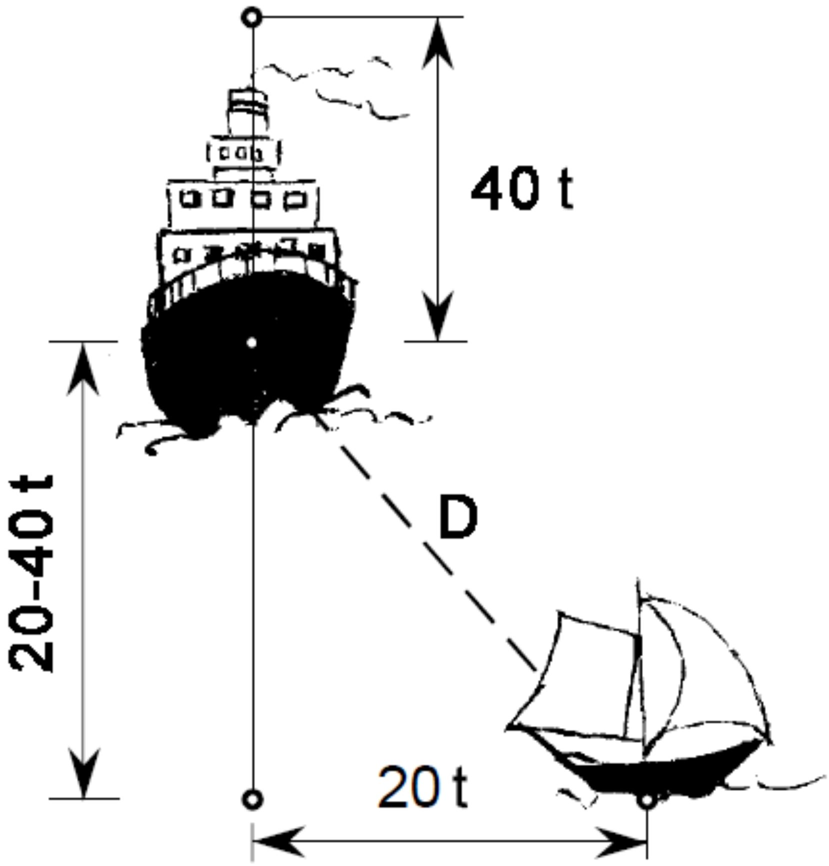


Miks me kasutame just selliste mõõtmetega silindrilisi anumaid, nagu me kasutame?

Näide 3. Keskpäeval on purjekas aurikust 20 km kaugusel lõunas. Purjekas liigub kiirusega 20 km/h itta, aurik kiirusega 40 km/h lõunasse. Kas aurikult on näha purjekat, kui nähtavus on 10 km?

Lepime kokku, et aega t mõõdame tundides, kiiruse ühik olgu km/h.
Keskpäeval olgu $t = 0$.

Ajahetkel $t \geqslant 0$ on purjekas liikunud $20t$ km itta ja aurik $40t$ km lõunasse.



Ajahetkel $t \geqslant 0$ on laevade vaheline kaugus leitav valemi

$$D=\sqrt{(20t)^2+(20-40t)^2}$$ abil.

Tahame uurida, kas leidub t väärtusi, mille korral $D \leqslant 10$.

Selleks võime leida funktsiooni

$$D=\sqrt{(20t)^2+(20-40t)^2}$$

miinimumi.

Et $\sqrt{(20t)^2+(20-40t)^2}=20\sqrt{5t^2-4t+1}$, siis

$$D'(t)=\frac{20(10t-4)}{2\sqrt{5t^2-4t+1}}=\frac{10(10t-4)}{\sqrt{5t^2-4t+1}}.$$

Kui $D'(t) = 0$, siis $10t - 4 = 0$, millest $t = \frac{2}{5}$.

Uurime $D'(t)$ märki koha $\frac{2}{5}$ ümbruses:

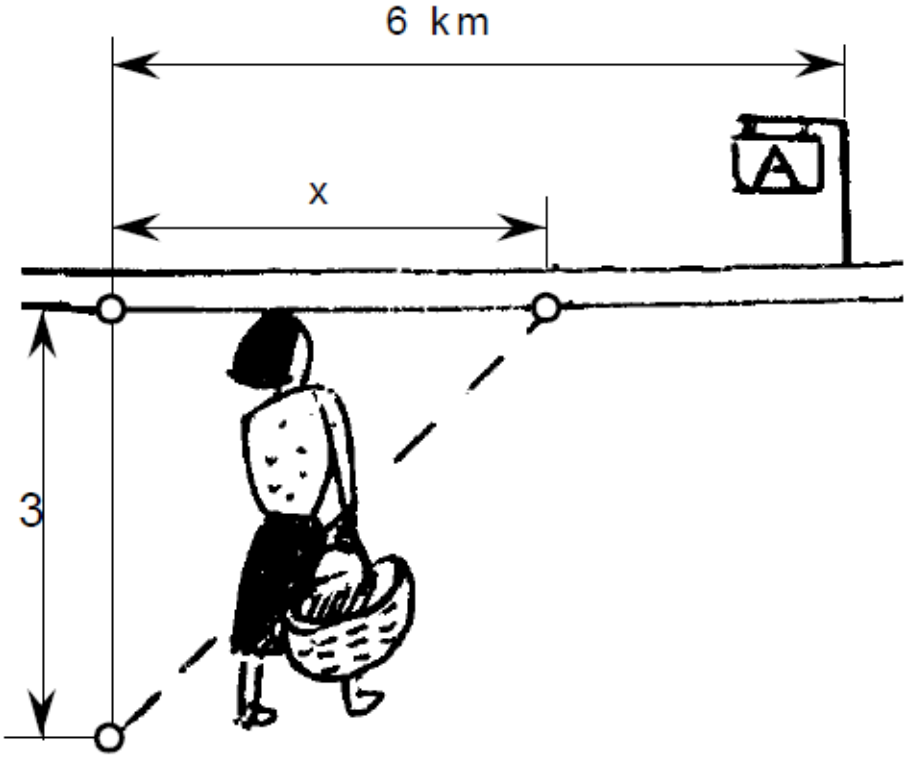
$D'(0) = -40 < 0; \quad D'(1) = \frac{60}{\sqrt{2}} > 0.$

Seega, kohal $t = \frac{2}{5}$ on funktsioonil $D(t) = \sqrt{(20t)^2 +$

$D\left(\frac{2}{5}\right) = \sqrt{\left(20 \cdot \frac{2}{5}\right)^2 + \left(20 - 40 \cdot \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{8($

Siit võime järeldada, et aurikult võib näha purjekat. Kõige parem peaks nähtavus olema $\frac{2}{5}$ tundi peale keskpäeva, s.o. kell 12.24.

Näide 4. Marjuline on metsa sees 3 km kaugusel sirgest kiirteest. Kiirteel, 6 km ida pool on bussipeatus. Marjuline liigub metsas kiirusega 4 km/h, mööda asfalti kiirusega 5 km/h. Millisesse punkti tee ääres peab marjulkäija suunduma, et jõuda bussipeatusse minimaalse ajaga?



Olgu x joonisel märgitud kaugus. Pythagorase teoreemi põhjal peab marjuline liikuma metsas $\sqrt{x^2 + 9}$ kilomeetrit, mööda teed 6 - x kilomeetrit.

Kasutades valemit aeg $= \dfrac{\text{teepikkus}}{\text{kiirus}}$ kaks korda, saame, et koguaeg *T* avaldub järgmiselt:

$$T = \frac{\sqrt{x^2+9}}{4} + \frac{6-x}{5}.$$

Siit

$$T'(x) = \frac{2x}{4 \cdot 2\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}.$$

Kui $T'(x) = 0$, siis

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5x - 4\sqrt{x^2+9}}{20\sqrt{x^2+9}} = 0 \;\Rightarrow\; 5x - 4\sqrt{}$$

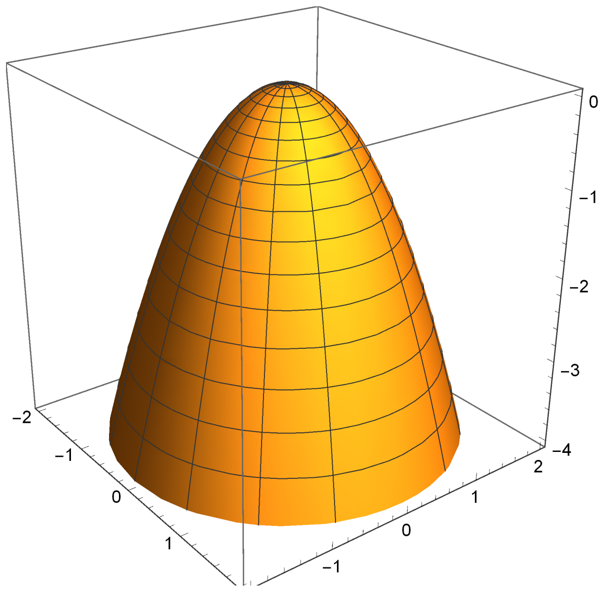
$$25x^2 = 16(x^2+9) \;\Rightarrow\; x = 4.$$

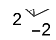
Et $T\,'(3) < 0$ ja $T\,'(5) > 0$, siis kohal $x = 4$ on funktsioonil T (x) miinimum.

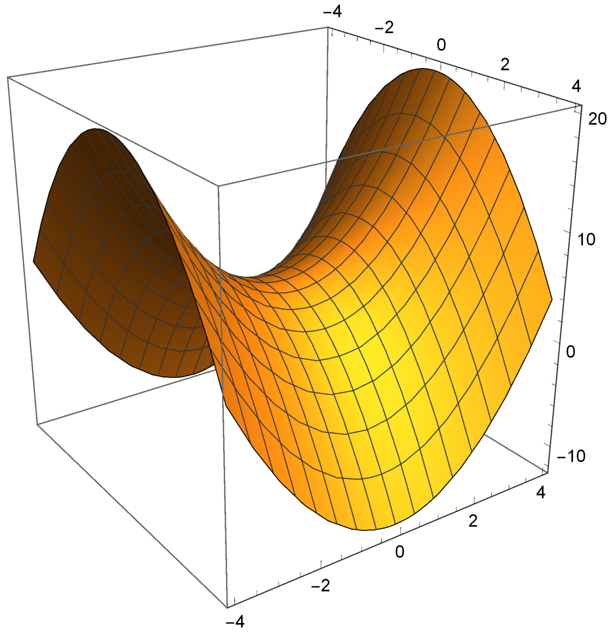
Kahe muutujaga funktsiooni ekstreemumid

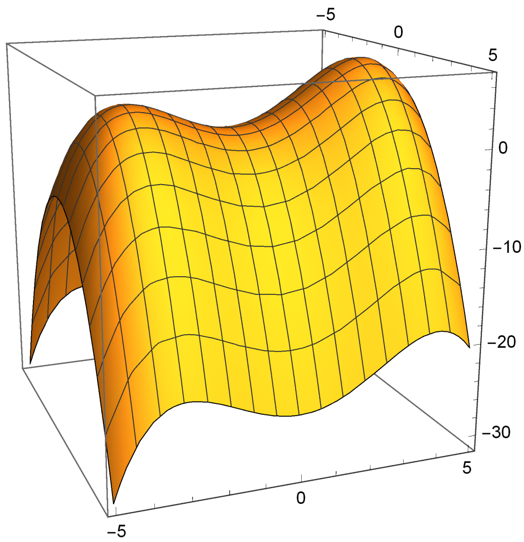
Kahe muutuja funktsioon on seos, mis seab järjestatud arvupaarile (x; y) vastavusse
ühe ja ainult ühe reaalarvu z = f (x, y).

Kahe muutuja funktsiooni z = f (x, y) graafikuks on pind 3-mõõtmelises ruumis.
Argumendipaar (x, y) on punkt xy -tasandil ja funktsiooni väärtus z "pinna kõrgus" selles punktis.
Eristada tuleb ekstreemumpunkte ja sadulpunkte.









Mõlemal juhul on tegemist funktsiooni kriitiliste punktidega.

Olgu (a; b) kriitiline punkt. Siis on kahe muutuja funktsiooni z = f (x, y) osatuletised x ja y järgi selles punktis võrdsed nulliga:

$f_x(a, b) = 0$ ja $f_y(a; b) = 0$.

Olgu $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$ ja $C = f_{yy}(a, b)$.

Kui $AC - B^2 > 0$ ja A < 0, siis on funktsioonil kohal (a,b) lokaalne maksimum.
Kui $AC - B^2 > 0$ ja A > 0, siis on funktsioonil kohal (a,b) lokaalne miinimum.
Kui $AC - B^2 < 0$, siis funktsioonil f (x, y) kohal (a,b) lokaalset ekstreemumit ei ole, kuid on sadulpunkt.
Kui $AC - B^2 = 0$, siis jääb ekstreemumi olemasolu lahtiseks.

Näide 5. Keegi Ameerika botaanik uuris mingite kasvuhoonetaimede kasvukiiruse sõltuvust temperatuurist ja õhuniiskusest. Temperatuuri tähistas ta x-ga (ühik °F), õhuniiskust tähistas ta y-ga (ühikuks protsendid), kasvukiirust tähistas $g(x, y)$ (ühik tolli nädala kohta). Peale pikki katseseeriaid leidis ta seose:

$g(x, y) = -2x^2 + 196x - 3y^2 + 242y + 2xy - 16360$, kus $75 \leqslant x \leqslant 85$ ja $50 \leqslant y \leqslant 75$.

Millise temperatuuri ja niiskusetaseme juures kasvavad need kasvuhoonetaimed kõige kiiremini? Kui suur on see kasvamiskiirus?

Leiame funktsiooni $g(x, y)$ esimest järku osatuletised:

$g_x(x, y) = -4x + 196 + 2y$ ja $g_y(x, y) = -6y + 242 + 2x$.

Ekstreemumite olemasolu kahtlustame punktides, kus need osatuletised on võrdsed nulliga. Saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} -4x + 196 + 2y = 0 \\ -6y + 242 + 2x = 0. \end{cases}$$

In[1]:=
```
Solve[{-4 x + 196 + 2 y == 0, -6 y + 242 + 2 x == 0}, {x, y}]
```

Out[1]=
```
{{x → 83, y → 68}}
```

Sellel võrrandisüsteemil on üksainus lahend, punkt (83, 68).

Leiame funktsiooni $g(x, y)$ teist järku osatuletised kohal (83, 68):

$A = g_{xx}(83, 68) = -4$; $B = g_{xy}(83, 68) = 2$ ja $C = g_{yy}(83, 68) = -6$.

Et $AC - B^2 = (-4)(-6) - 2^2 = 20 > 0$ ja $A < 0$, siis kohal (83, 68) on funktsioonil $g(x, y)$ lokaalne maksimum.

Leiame selle väärtuse:

In[2]:=
```
g[x_, y_] := - 2 x^2 + 196 x - 3 y^2 + 242 y + 2 x y - 16 360
```

In[3]:=
```
g[83, 68]
```

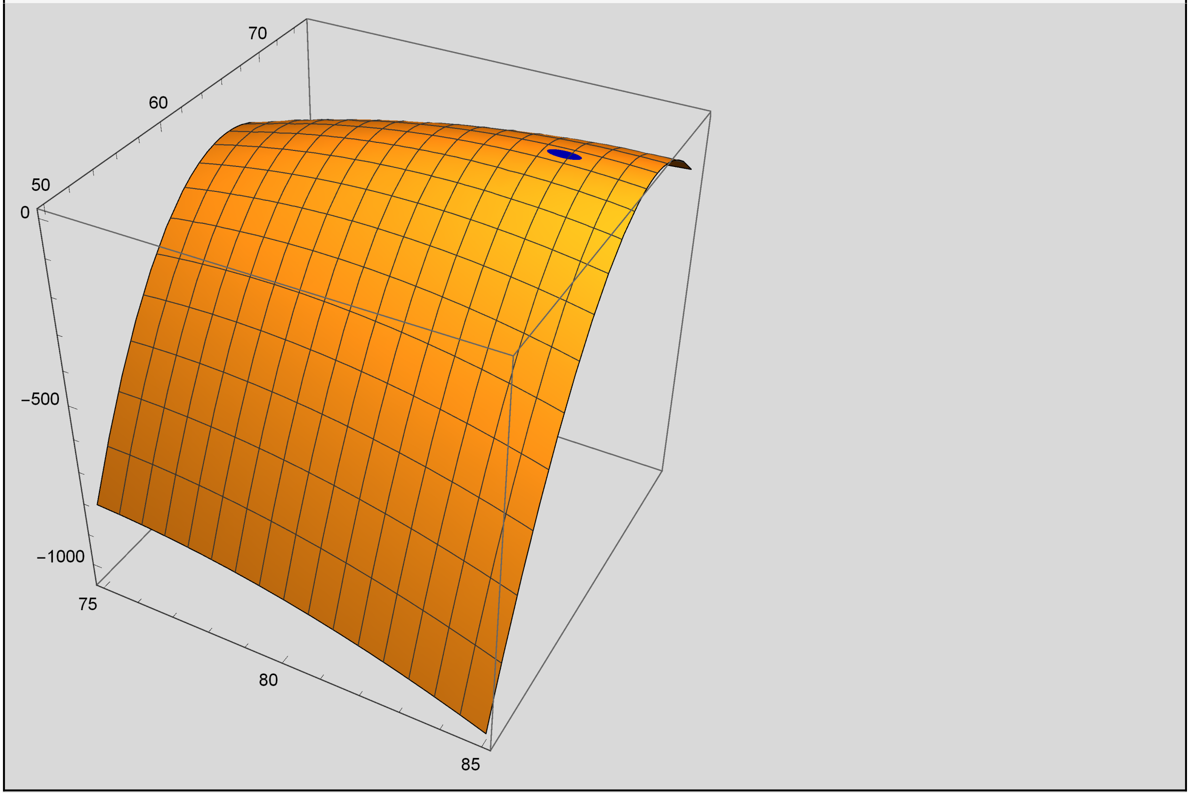
Out[3]=
```
2
```

Taime juurdekasv 83°F ja 68 % õhuniiskuse puhul on 2 tolli nädalas.

In[4]:=

```
Show[Plot3D[g[x, y], {x, 75, 85}, {y, 50, 75}, BoxRatios → {1, 1, 1}],
 Graphics3D[{Blue, Sphere[{83, 68, 2}, 0.4]}]]
```

Out[4]=



Mitme muutujaga funktsiooni tinglikud ekstreemumid

Funktsioonil $w = f(x, y, z)$ on kohal $A(a, b, c)$ *tinglik* ehk relatiivne maksimum [miinimum], kui võrratus $f(P) \leqslant f(A)$ [$f(P) \geqslant f(A)$] kehtib selles osas punkti A ümbrusest, milles on täidetud lisatingimus $g(x, y, z) = 0$, kusjuures nõutakse, et ka $g(a, b, c) = 0$.

Selleks, et leida tinglikke ekstreemumeid, moodustame nn Lagrange abifunktsiooni

$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\, g(x, y, z)$, kus $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lahendame järgmise süsteemi:

$F_x(x, y, z, \lambda) = 0$
$F_y(x, y, z, \lambda) = 0$
$F_z(x, y, z, \lambda) = 0$
$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0.$

Selle süsteemi lahendite hulgast leiamegi tinglikud ekstreemumid.

Näide 6. Kerasse raadiusega *r* tuleb kujundada maksimaalse ruumalaga risttahukas.

Kui risttahuka servade pikkused on *x*, *y* ja *z*, siis risttahuka ruumala *V avaldub kujul*

$V = xyz.$

Et risttahukas paikneb keras raadiusega *r*, siis risttahuka diagonaali pikkus peab olema *2r, s.o.*

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2r.$

Järelikult peab olema täidetud tingimus $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$, ehk $x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2 = 0$.

Viimase tingimuse võime esitada kujul: $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2 = 0$.

Seega tuleb leida funktsiooni $V(x,y,z) = x\, y\, z$ maksimaalne väärtus tingimusel et
$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2 = 0$.

Koostame Lagrange abifunktsiooni

$F(x, y, z, \lambda) = x\, y\, z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2)$

ja leiame selle funktsiooni osatuletised, mis võrdsustame nulliga.

$F_x(x, y, z, \lambda) = y\, z + 2\lambda x = 0$

$F_y(x, y, z, \lambda) = x\, z + 2\lambda y = 0$

$F_z(x, y, z, \lambda) = x\, y + 2\lambda z = 0$

$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2 = 0$.

Et $x \neq 0$, $y \neq 0$ ja $z \neq 0$, siis korrutame esimesed kolm võrrandit vastavalt x, y ja z*-ga, ning saame*

$V + 2\lambda x^2 = 0$, $V + 2\lambda y^2 = 0$ ja $V + 2\lambda z^2 = 0$.

Seega $x^2 = y^2 = z^2$.

Asendades y^2 ja z^2 x^2-ga neljandas võrrandis, saame $3x^2 = 4r^2$.

Järelikult

$$x = y = z = \frac{2}{\sqrt{3}}\, r.$$

Seega on kera sisse kujundatud risttahukatest kõige suurem ruumala *kuubil* ja see ruumala on

$$V = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 r^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}}\, r^3.$$

Ülesandeid

Ülesanne 1. Arvude summa on jääv. Millal on korrutis maksimaalne?

1 b) Kahe arvu summa on jääv suurus. Millised peavad need arvud olema selleks, et korrutis oleks maksimaalne?

1 c) Kolme arvu summa on jääv suurus. Millised peavad need arvud olema selleks, et korrutis oleks maksimaalne?

Ülesanne 2. Ringis on ristkülik, keras on risttahukas.

2a) Tõesta, et ringi sisse joonistatud ristkülikutest on ruudul suurim pindala ja ümbermõõt.
2a) Tõesta, et kera sisse joonistatud risttahukatest on kuubil suurim pindala ja ümbermõõt.
2c) Missugused peavad olema risttahuka mõõtmed, et antud ruumala puhul oleks ta täispindala vähim?

Ülesanne 3. Keras on silinder

3a) Kerasse raadiusega R on kujundatud suurima ruumalaga silinder. Leia selle silindri kõrgus ja raadius.
3b) Kerasse raadiusega R on kujundatud suurima täispindalaga silinder. Leia selle silindri kõrgus ja raadius.

Ülesanne 4. Keras on koonus

4a) Kerasse raadiusega R on kujundatud suurima ruumalaga koonus. Leia selle koonuse kõrgus ja raadius.

4b) Kerasse raadiusega R on kujundatud suurima täispindalaga koonus. Leia selle koonuse kõrgus ja raadius.

Ülesanne 5. On antud kujundi ümbermõõt. Milliste mõõtmete puhul on kujundi pindala maksimaalne?

5a) Kujund on ristkülik **5b)** kujund on täisnurkne kolmnurk **5c)** Kujund on võrdhaarne kolmnurk

5d) Kujund on ristkülik, mille peale on asetatud poolring (katedraali aken)

5e) Kujundiks on ristküliku peale on asetatud võrdkülgne kolmnurk (maja otsvaade).

Ülesanne 6. Koonuses on silinder

6a) Koonusesse, mille põhja raadius on 6 cm ja kõrgus 15 cm, on kujundatud suurima täispindalaga silinder. Arvuta silindri põhja raadius. (5 cm). Kuidas lahendada seda ülesannet, kui koonuse raadius on r ja kõrgus h.

6b) Koonusekukujulisest puutüvest, mis on 24 m pikkune ja mille läbimõõt juure kohalt on 0,48 m tahetakse raiuda maksimaalse ruumalaga silindrikujuline palk. Kui pikk tükk tuleb ladvapoolsest otsast maha saagida?

6c) Koonuse kõrgus on võrdne diameetriga. Koonuse sisse on kujundatud maksimaalse ruumalaga silinder. Leia silindri ja koonuse ruumalade suhe.

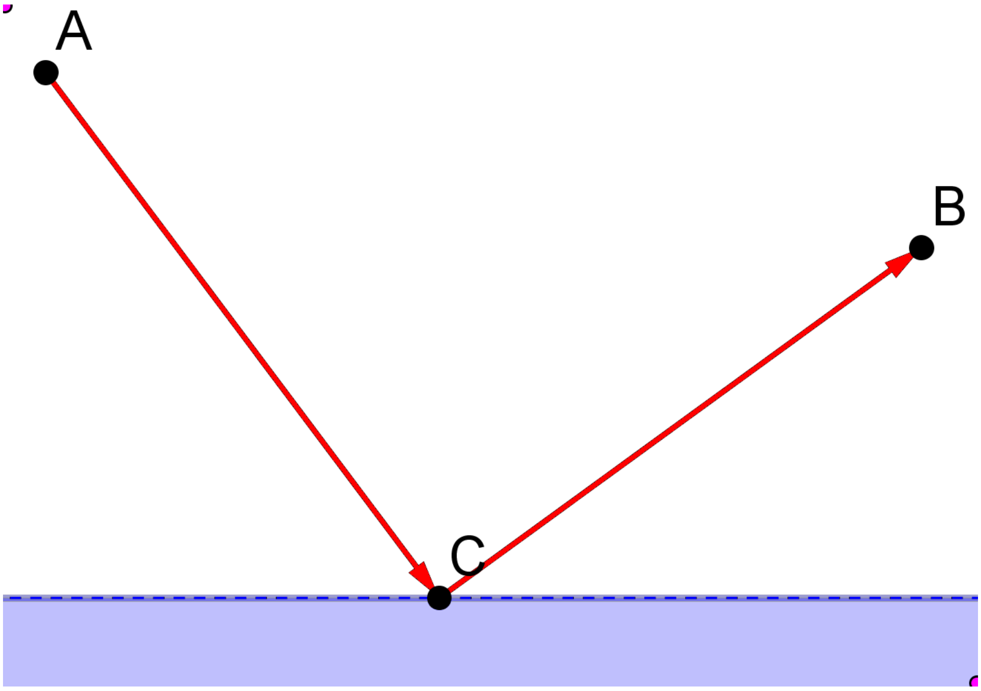
Ülesanne 7. Maksimaalne vaatenurk

7a) Pilt mille kõrgus on 1,4 m, ripub seinal nii, et ta alumine äär on 1,8 m kõrgemal vaatleja silmadest. Kui kaugel peab seisma vaatleja, et pilt oleks kõige paremini nähtav (vaatenurk oleks maksimaalne)? (2,4 m)

Kuidas lahendada seda ülesannet, kui pildi alumine äär asub silmast *a* meetrit kõrgemal, pildi ülemine äär aga *b* meetrit kõrgemal, vaatleja silma optimaalne kaugus seinast olgu x, pildi alumine äär paistku kaugusel *x nurga α all horisondiga, pildi ülemine äär aga nurga β all horisondiga.*

Ülesanne 8. Lühim teekond

8a) Kauboi on koos oma hobusega punktis A. Ta peab jootma hobust jões jootma ja minema hobusega seejärel laagrisse, mis asub punktis B. Tal tuleb leida jõe kaldal punkt C nii, et läbitud vahemaa AC + CB oleks vähim.



Kui keegi tahab seda ülesannet arvulisel kujul lahendada (muide see on raskem, kui ilma arvudeta!),
siis olgu antud punktide A ja B koordinaadid, näiteks A(0; 6), B(5; 4), jõgi olgu aga piirkond, kus y < 0.

In[5]:=

$$\text{Kaugus}[x\_] := \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

In[6]:=

```
Tul[x_] = Simplify[D[Kaugus[x], x]]
```

Out[6]=

$$\frac{-d + x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

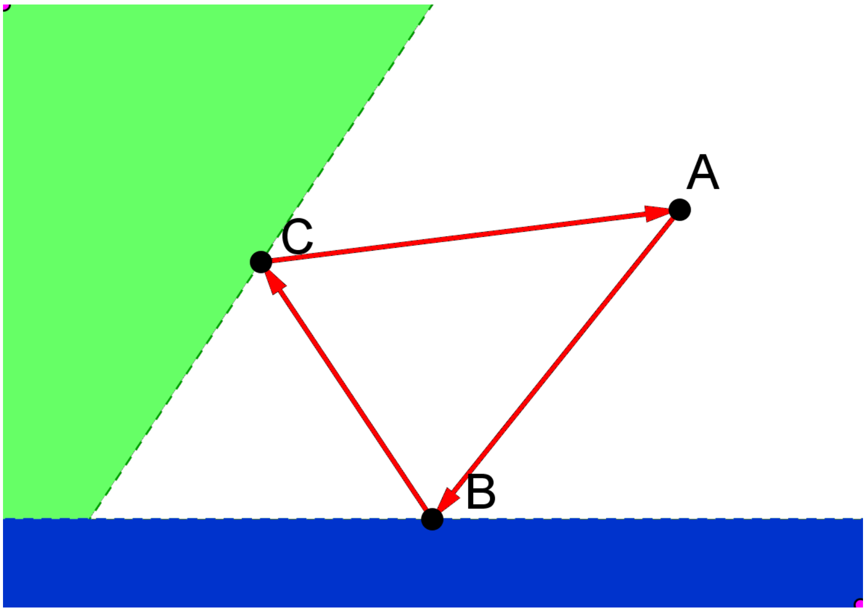
In[7]:=

```
Solve[Tul[x] == 0, x]
```

Out[7]=

$$\left\{\left\{x \to \frac{a\,d}{a - b}\right\}, \left\{x \to \frac{a\,d}{a + b}\right\}\right\}$$

8b) Kauboi on koos oma hobusega laagris punktis A. Ta peab hobust jões (jõe kaldal) jootma ja metsas (metsa servas) söötma ning tulema seejärel tagasi punktis A olevasse laagrisse, tehes seda nii, et läbitud vahemaa oleks vähim.



Seega, peab ta leidma jõe kaldal punkti B ja metsaservas punkti C nii, et kolmnurga ABC ümbermõõt oleks vähim.

Punkti A asukohta nurga sees peab saama vabalt valida; seda, mis nurga all mets jõega lõikub, peab saama kah vabalt valida.