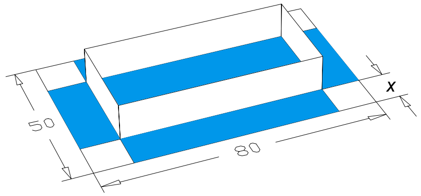
EKSTREEMUMÜLESANDED

Näide 2. Ristkülikukujulisest papitükist, mille mõõtmed on 50 cm ja 80 cm tuleb valmistada kaaneta karp. Selleks lõigatakse papitüki nurkadest ära võrdsed ruudud ja murtakse servad üles. Kui suur peab olema väljalõigatavate ruutude külg, et karbi ruumala oleks suurim?



Olgu väljalõigatavate ruutude külje pikkus x cm. On ilmne, et $0 < x < 25$.

Papitükist valmistatava karbi põhjaks on ristkülik, mille küljed on $50 - 2x$ ja $80 - 2x$. Seega karbi põhja pindala on $(50 - 2x)(80 - 2x)$ ja ruumala on $x\cdot(50 - 2x)(80 - 2x)$.

Et karbi ruumala V sõltub äralõigatavate ruutude külje pikkusest x, siis võib ruumala vaadelda muutuja x funktsioonina:

$V(x) = x\cdot(50 - 2x)(80 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

Leiame funktsiooni $V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$ maksimumkoha vahemikust $]0; 25[$.

$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 0 \Rightarrow x_1 = 10$ või $x_2 = \frac{100}{3}$.

Et $\frac{100}{3} > 25$, seetõttu uurime seda, kas tegemist on maksimumi või miinimumiga ainult kohal $x = 10$. Kasutame teist tuletist:

$V''(x) = 24x - 520$; $V''(10) = 240 - 520 = -280 < 0$.

Seega kohal 10 on funktsiooni $V(x)$ maksimumkoht.

Äralõigatava ruudu külg peab olema 10 cm.

Näide 3. Silindrikujulise konservipurgi ruumala on V. Millised peavad olema konservipurgi mõõtmed, et purgi valmistamiseks kuluks võimalikult vähe plekki (valtsimist ei arvestata!)?

Tähistame silindri raadiuse tähega r, kõrguse tähega h ning avaldame r ja h kaudu täispindala S:

$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

Täispindala sõltub kahest suurusest, silindri kõrgusest ja raadiusest. Ekstreemumülesannet oskame aga lahendada ainult siis, kui vastav funktsioon sõltub ühest argumendist. Et konservipurgi ruumala on konstantne, siis valemist $V = \pi r^2 h$ avaldame suuruse h:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

ja asendame täispindala valemisse

$$S = 2\pi r\frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Peame leidma raadiuse väärtuse, mille korral pindala S väärtus on vähim, st tuleb leida funktsiooni $S(r)$ miinimumkoht. Selleks leiame $S'(r)$ ja võrdsustame nulliga.

$S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$.

$-\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0$. Siit $r^3 = \frac{V}{2\pi}$. Et $V = \pi r^2 h$, siis $r^3 = \frac{\pi r^2 h}{2\pi}$.

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled r^2-ga, saame et $r = \frac{h}{2}$.

Siit järeldub et konservipurgi põhja läbimõõt ja kõrgus peavad olema võrdsed.

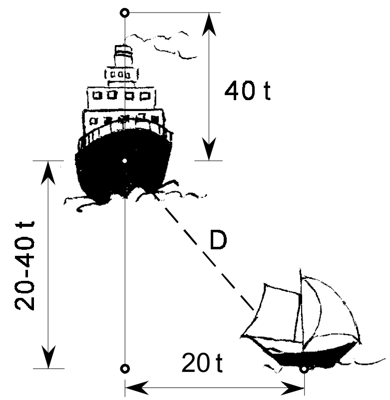
Näita iseseisvalt, et $r = \frac{h}{2}$ korral on $S''(r) > 0$ ja seega funktsioonil $S(r)$ on antud kohal tõesti miinimum.

Näide 4. Keskpäeval on purjekas aurikust 20 km kaugusel lõunas. Purjekas liigub kiirusega 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ itta, aurik kiirusega 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lõunasse. Kas aurikult on näha purjekat, kui nähtavus on 10 km?

Lepime kokku, et aega t mõõdame tundides, kiiruse ühik olgu $\frac{km}{h}$. Keskpäeval olgu $t = 0$. Ajahetkel $t \geqslant 0$ on purjekas liikunud $20t$ km ja aurik $40t$ km.

Ajahetkel $t \geqslant 0$ on laevade vaheline kaugus leitav valemi

$D = \sqrt{(20t)^2 + (20 - 40t)^2}$ abil.



Tahame uurida, kas leidub t väärtusi, mille korral $D \leqslant 10$. Selleks võime leida funktsiooni

$D(t) = \sqrt{(20t)^2 + (20 - 40t)^2}$ miinimumi.

Et $\sqrt{(20t)^2 + (20 - 40t)^2} = 20\sqrt{5t^2 - 4t + 1}$, siis

$$D'(t) = \frac{20(10t - 4)}{2\sqrt{5t^2 - 4t + 1}} = \frac{10(10t - 4)}{\sqrt{5t^2 - 4t + 1}}.$$

Kui $D'(t) = 0$, siis $10t - 4 = 0$, millest $t = \frac{2}{5}$.

Uurime $D'(t)$ märki koha $\frac{2}{5}$ ümbruses:

$D'(0) = -40 < 0$; $D'(1) = \frac{60}{\sqrt{2}} > 0$.

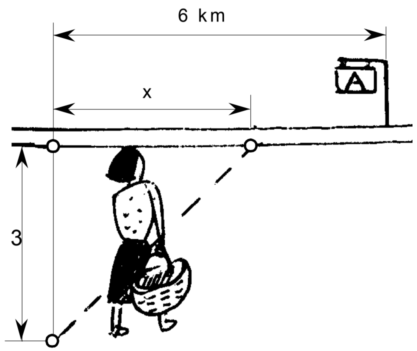
Seega, kohal $t = \frac{2}{5}$ on funktsioonil $D(t) = \sqrt{(20t)^2 + (20 - 40t)^2}$ miinimum:

$$D\left(\frac{2}{5}\right) = \sqrt{\left(20\cdot\frac{2}{5}\right)^2 + \left(20 - 40\cdot\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} < 10.$$

Siit võime järeldada, et aurikult võib näha purjekat. Kõige parem peaks nähtavus olema $\frac{2}{5}$ tundi peale keskpäeva, s.o. kell 12.24.

Näide 5. Marjuline on metsa sees 3 kilomeetri kaugusel sirgest kiirteest. Kiirteel, 6 km ida pool on bussipeatus. Marjuline liigub metsas kiirusega 4 km/h, mööda asfalti kiirusega 5 km/h. Millisesse punkti tee ääres peab marjulkäija suunduma, et jõuda bussipeatusse minimaalse ajaga?

Olgu x joonisel märgitud kaugus. Pythagorase teoreemi põhjal peab marjuline liikuma metsas $\sqrt{x^2+9}$ kilomeetrit, mööda teed $6 - x$ kilomeetrit.



Kasutades valemit aeg $= \frac{\text{teepikkus}}{\text{kiirus}}$ kaks korda, saame, et koguaeg T avaldub järgmiselt:

$$T = \frac{\sqrt{x^2+9}}{4} + \frac{6-x}{5}.$$

Siit

$$T'(x) = \frac{2x}{4\cdot 2\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}.$$

Kui $T'(x) = 0$, siis

$$\frac{x}{4\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{5x - 4\sqrt{x^2+9}}{20\sqrt{x^2+9}} = 0 \Rightarrow 5x - 4\sqrt{x^2+9} = 0 \Rightarrow$$

$25x^2 = 16(x^2+9) \Rightarrow x = 4.$

Et $T'(3) < 0$ ja $T'(5) > 0$, siis kohal $x = 4$ on funktsioonil $T(x)$ miinimum.

883. Olgu ristküliku ümbermõõt 20 cm. Milliste küljepikkuste korral on sellise ristküliku pindala suurim.

884. On tarvis kraaviga piirata ristkülikukujuline maa-ala, pindalaga 10000 m^2. Kuidas valida maatüki mõõtmed, et kraav oleks lühim?

885. Märt Mäeumbaed ostis oma talu tarbeks 400 m pikkuse elektrikarjuse. Ta tahab sellega kolmest küljest piirata ristkülikukujulise karjamaa tüki, mille üheks küljeks on jõekallas. Millised tuleks valida ristküliku mõõtmed, et pind, millelt loomad saaksid süüa rohtu, oleks suurim. (100 m, 200 m, 100 m)

886. Ristküliku kujulisest papitükist 30x50 cm^2, on vaja nurkadest välja lõigata ruudud nii, et tekiks suurima külgpinnaga karp. Milline peab olema väljalõigatava ruudu külg? (10 cm)

887. Ruudukujulisest plekitahvlist külje pikkusega 60 cm tuleb valmistada pealt lahtine karp, lõigates nurkadest ära ruudud. Kui suured ruudud tuleb ära lõigata, et karbi ruumala oleks suurim? Kui suur on selle karbi ruumala?

888. Mõõda mõne ümmarguse konservikarbi või õllepurgi kõrgus ja põhja läbimõõt. Leia kui palju oleks saanud plekki kokku hoida

a) ühe sama ruumalaga silindrilise nõu valmistamisel;

b) miljoni sellise plekknõu valmistamisel?

889. Milline parabooli $y = x^2$ punkt on kõige lähemal sirgele $y = x - 1$? (0,5; 0.25)

890. Tõesta, et antud ringi sisse joonestatud ristkülikutest on ruudul suurim pindala ja ümbermõõt.

891. Tõesta, et kõigist antud ringi sisse joonestatud võrdhaarsetest kolmnurkadest on võrdkülgsel kolmnurgal suurim ümbermõõt.

892. Missugused peavad olema risttahuka mõõtmed, et antud ruumala korral oleks ta täispindala vähim?

893. Leia antud hüpotenuusiga c täisnurkse kolmnurga maksimaalne pindala. ($0{,}25c^2$)

894. Staadioni muruplats kujutab endast ristkülikut, millel on poolringid otstes. Muruplatsi ümbermõõt (sisemise jooksuraja pikkus) on 400 m. Millised peavad olema staadioni mõõtmed, kui vajame maksimaalse pindalaga muruplatsi? (ringikujuline, läbimõõduga $\frac{400}{\pi}$)

895. Selleks et ümbritseda ringi sektori kujulist lillepeenart traadist piirdega on olemas 20 m traati. Milline peaks olema ringi raadius ja ringjoone kaare pikkus, et selle peenra pindala oleks maksimaalne? (r = 5 m ja l = 10 m)

896. Koonusesse, mille põhja raadius on 6 cm ja kõrgus 15 cm, on kujundatud suurima täispindalaga silinder. Arvuta silindri põhja raadius. (5 cm)

897. Katedraali aknal on ristküliku kuju, poolringiga ülaosas. Akna ümbermõõt on 12 m. Millised peavad olema akna mõõtmed, et akna pindala oleks suurim? (alus $\frac{24}{4+\pi}$, ristküliku kujulise osa kõrgus $\frac{12}{4+\pi}$)

898. On tarvis valmistada koonusekujuline lehter, moodustajaga 20 cm. Kui suur peab olema lehtri kõrgus, et tema ruumala oleks suurim? ($h = \frac{20}{\sqrt{3}}$.)

899. Kerasse, mille raadius on R, on kujundatud suurima ruumalaga silinder. Leia selle silindri kõrgus. ($\frac{2}{3}R\sqrt{3}$)

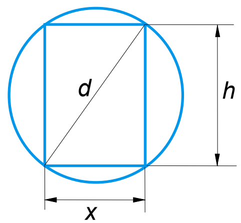
900. Pilt mille kõrgus on 1,4 m, ripub seinal nii, et ta alumine äär on 1,8 m kõrgemal vaatleja silmadest. Kui kaugel peab seisma vaatleja, et pilt oleks kõige paremini nähtav (vaatenurk oleks maksimaalne)? (2,4 m)

901. Tallinn-Tartu bussi mahub 40 reisijat. Et piletihind on 50 krooni, siis sõidab bussiga keskmiselt 10 reisijat. Piletihinna tõstmine 10 krooni võrra vähendaks reisijate arvu ühe võrra, piletihinna alandamine 10 krooni võrra suurendaks reisijate arvu 10 võrra. Kummal juhul bussifirma tulud suurenevad, kas tõstes hinda või alandades hinda? Millise piletihinna korral oleks tulu piletimüügist suurim? (Mõlemal juhul; 30 kr)

902. Auto bensiinikulutus kiiruse $v > 0$ korral on arvutatav järgmise valemi kohaselt: $W = 6 - 0{,}15v + 0{,}0025\,v^2$ (liiitrit/tunnis). Millise kiirusega on kõige odavam selle autoga sõita? (49 km/h)

903. Kerasse, mille raadius on R, on kujundatud maksimaalse ruumalaga korrapärane kolmnurkne prisma. Esita prisma kõrgus raadiuse kaudu. ($h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$)

904. Ümmargusest puutüvest läbimõõduga d tahetakse välja saagida suurima kandetugevusega ristkülikukujulise ristlõikega palk (vt. joonis). Kuidas tuleb valida ristlõike mõõtmed x ja h, kui on teada, et palgi kandetugevus on võrdeline palgi ristlõike alusega ja ristlõike kõrguse ruuduga. (Tala laius $x = \frac{\sqrt{3}}{3}d$, kõrgus $h = \frac{\sqrt{6}}{3}d$.)



905. Laev seisab ankrus kalda lähimast punktist 9 km kaugusel. Laevalt tuleb saata virgats kaldal olevasse laagrisse, mis asetseb vahetult kaldal, eespool nimetatud punktist 15 km kaugusel. Eeldades, et käskjalg liigub jalgsi kiirusega 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja aerutades kiirusega 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, leia, millises punktis kaldal peab ta maabuma, et jõuda laagrisse vähima ajakuluga? (3 km kaugusel laagrist)

924. Koogikarpide tegijal on tagavaraks kartongilehed mõõtmetega 30×14 tolli. Karbi valmistamisel lõikab ta lehe nurkadest ruudud ja painutab ülejääva osa karbiks. Kuidas peab valima eemaldatavate ruutude küljed, et karp saaks maksimaalse ruumalaga? (G.Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Analüüsi alged. 4. klassi kursus", 1930.) (3 tolli.)

925. Saadetava postipaki põhja ümbermõõdu ja kõrguse summa ei tohi olla suurem kui 100 tolli. Leia maksimaalse ruumalaga ruudukujulise põhjaga postipaki mõõtmed. (Kõrgus $\frac{100}{3}$ tolli, põhja serv $\frac{50}{3}$ tolli.)

926. Turismifirma "Tavaramatkat OY" veab 200 marga eest turiste Helsingist Tallinna ja tagasi. Kuu ajaga käis kaubareisil 8000 turisti. "Tavaramatkat OY" tahab tõsta pileti hinda ja laseb korraldada uuringu, mis selgitab kuidas piletihinna tõus mõjutab reisijate arvu. Selgub et iga piletihinna 50 margane tõus vähendab reisijate arvu 800 võrra. Leia, millise piletihinna korral oleksid "Tavaramatkat OY" sissetulekud piletimüügist suurimad?

(Tähistame x-ga 50 margaste piletihinna tõusude arvu. Kogu sissetulek y esitub nii: $y = (200+50x)(8000-800x) = 40000(4+x)(10-x) = 40000(40+6x-x^2)$. Selle funktsiooni maksimum on kohal $x = 3$. Seega: sissetulek on suurim, kui pileti hind oleks $200+3\cdot 50 = 350$ marka.)

927. Raamatu leheküljele laotakse 200 cm^2 teksti. Lehe üla- ja alaosas peavad olema 2 cm laiused servad, vasakul ja paremal äärel aga 4 cm laiused servad. Missuguste mõõtmetega peab olema trükitav lehekülg, et paberit kuluks võimalikult vähe?

928. Aurumasina katel on tavaliselt silindrikujuline. Soovitav on, et katla pind oleks minimaalne (siis kulub vähem metalli ja ka soojuskaod läbi katla seinte on väiksemad!). Väikevenna aurumasina katel oli silindri kujuline, ruumalaga 1 liiter. Karlson lubas väikevennale kinkida uue aurumasina. Milliste mõõtudega peab olema katel? ($r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$; $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$)

785. Koonusekujulisest puutüvest, mis on 24 m pikkune ja mille läbimõõt juure kohalt on 0,48 m tahetakse raiuda maksimaalse ruumalaga silindrikujuline palk. Kui pikk tükk tuleb ladvapoolsest otsast maha saagida? (16 m)

786. Ruudukujulise põhjaga püramiidikujulise telgi riie on kinnitatud nelja 3 m pikkuse vaia külge, mis on püramiidi külgservadeks. Millise telgi kõrguse korral on telgi ruumala suurim? ($h = \sqrt{3}$; $V_{max} = 4\sqrt{3}$)

787. Silindri telglõike ümbermõõt on 6 cm. Leia silindri suurim võimalik ruumala. (TÜ 1992). (π cm^3)

788. Kera sisse on paigutatud maksimaalse ruumalaga silinder, mis mahub sellesse kerasse. Leia kera ja silindri ruumalade suhe. (TÜ 1992). ($\sqrt{3}$)

789. Koonuse moodustaja on m. Leia koonuse ruumala maksimaalne väärtus. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}m^3$.

790. Koonuse kõrgus on võrdne diameetriga. Koonuse sisse on kujundatud maksimaalse ruumalaga silinder. Leia silindri ja koonuse ruumalade suhe.

791. Kera raadius on R. Kera sees on koonus. Missugused peavad olema koonuse mõõtmed, et selle

a) ruumala oleks suurim? b) külgpindala oleks suurim? (a) $V = \frac{32}{81}\pi r^3$)