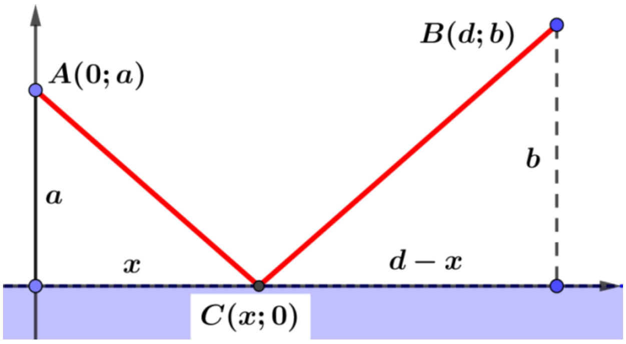
Ekstreemumülesannete lahendamine mitmel erineval viisil

Tõnu Tõnso, Tallinna Ülikool

Paljusid ekstreemumülesannete tüüpe saab lahendada mitmel erineval viisil. Tuletise nullkohtade leidmine on tavapärane tee, aga lisaks sellele saab kasutada algebralisi võrratusi ning funktsioonide omadusi. Kui aga õnnestub leida ekstreemumülesandele geomeetriline lahendus, siis on see tihtipeale kõige lihtsam ja elegantsem.

Lühima teekonna ülesanne

Kauboi on koos hobusega punktis A(0; a). Ta peab hobust jões $y = 0$ *jootma ja minema hobusega laagrisse, mis asub punktis B(d; b). Olgu a, b ja d positiivsed; me võime vaadelda neid kui kaugusi. Kauboil tuleb leida jõe kaldal punkt C(x; 0) nii, et teekond AC + CB oleks võimalikult lühike.*



Joonis 1. Lühima teekonna ülesande joonis tuletisega lahenduskäigu puhul.

Tuletisega lahenduskäik. Lõigu *AC* pikkus on $\sqrt{a^2+x^2}$, lõigu *CB* pikkus on $\sqrt{(d-x)^2+b^2}$. Kogu teekonna *AC*+*CB* saab avaldada funktsioonina:

$$D(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{(d-x)^2+b^2}.$$

Leiame selle funktsiooni tuletise:

$$D'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}.$$

Võrdsustame tuletise nulliga ja asume saadud võrrandit lahendama:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}.$$

Siit

$$x\sqrt{(d-x)^2+b^2} = (d-x)\sqrt{a^2+x^2}.$$

Tõstame selle võrduse mõlemad pooled ruutu ja saame:

$$x^2((d-x)^2+b^2)=(d-x)^2(a^2+x^2).$$

Avame sulud; lihtsustame saadud avaldise, saame *x* suhtes ruutvõrrandi:

$$(a^2-b^2)x^2-2a^2dx+a^2d^2=0.$$

Lahendades selle ruutvõrrandi, saame:

$$x_1=\frac{ad}{a+b}\quad \text{ning}\quad x_2=\frac{ad}{a-b}.$$

Otsitav lahend peab kuuluma vahemikku]0; *d*[. Et

$$\frac{ad}{a+b}<d \quad \text{aga} \quad \frac{ad}{a-b}>d \ \ (\text{kui } a>b) \ \text{ või } \frac{ad}{a-b}<0 \ \ (\text{kui } a<b),$$

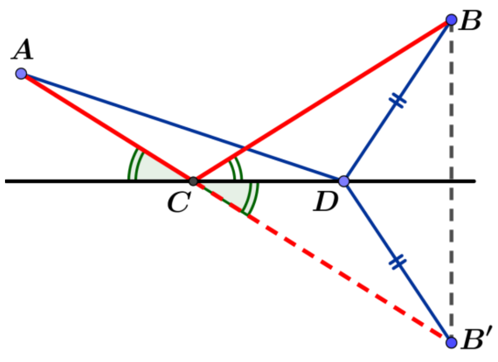
siis võime ruutu tõstmisel tekkinud võõrlahendi $x_2=\frac{ad}{a-b}$ kõrvale jätta.

Seega on *x* otsitavaks väärtuseks $\frac{ad}{a+b}$.

Et sama ülesande geomeetrilises lahenduses ei lähe tarvis koordinaate, tundmatuid ja võrrandeid, siis sõnastame ülesande veidi lihtsamalt.

On antud sirge s ning punktid A ja B, mis paiknevad sirgest s ühel pool. Tuleb leida sirgel s selline punkt C, et murdjoone ACB pikkus oleks vähim.

Heroni lahenduskäik. Võtame sirgel *s* suvalise punkti *D*. Konstrueerime punktiga *B* sirge *s* suhtes sümmeetrilise punkti *B'*. Et *BD* = *B'D* siis on murdjoone *ADB* pikkus alati võrdne murdjoone *ADB'* pikkusega. *ADB'* pikkus on aga vähim siis, kui see murdjoon muutub sirglõiguks. Seega otsitavaks punktiks sirgel *s* on punkt, kus sirge lõikub lõiguga *AB'*. Tähistame selle punkti tähega *C*.



Joonis 2. Lühima teekonna ülesande Heroni lahenduskäigu joonis.

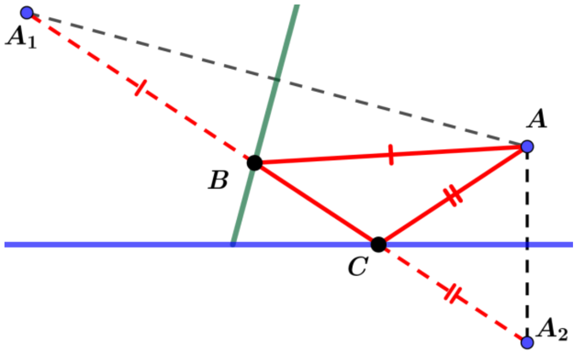
Nurkade vastavatest omadustest järeldub, et leitud punkti *C* puhul moodustavad kiired *CA* ja *CB* sirgega *s* võrdsed nurgad. Just nii toimub aga valguse peegeldumine. Kui valguskiir väljub punktist *A* ja peale peegeldumist pinnalt jõuab punkti *B*, siis läbib see valguskiir punkti *C* ja realiseerib sellesamuse lühima teekonna.

Lühima teekonna ülesannet saab edasi arendada. Näiteks nii:

Teravnurga sees on punkt A, Leida nurga haaradel punktid B ja C nii, et kolmnurga ABC ümbermõõt oleks vähim.

Teine sõnastus: *Kauboi on oma hobusega laagris punktis A. Ta peab hobust jõe kaldal jootma ja metsa servas söötma ning tulema tagasi punktis A olevasse laagrisse, tehes seda nii, et läbitud vahemaa oleks vähim.*

Selle ülesande lahendamiseks tuleb punkti A peegeldada mõlemast nurga haarast; nii saame punktid A_1 ja A_2. Punkte A_1 ja A_2 ühendav sirglõik lõikub nurga haaradega vastavalt punktides B ja C. Kolmnurk ABC ongi vähima ümbermõõduga kolmnurk.



Joonis 3. Vähima ümbermõõduga kolmnurga ülesande lahenduse joonis.

Millisesse punkti tuleks hobuse metsas söötmiseks ja jões jootmiseks minna punktist A siis, kui „metsa“ ja „jõe“ vahel on täisnurk või nürinurk?

Ül 1. *Sirgjooneliste kallastega jõel on kaks saart A ja B. Turistid alustavad süstamatka saarelt A, tahavad käia jõe mõlemal kaldal ning jõuda lõpuks saarele B. Kuidas valida marsruut, et teekond oleks lühima pikkusega?*

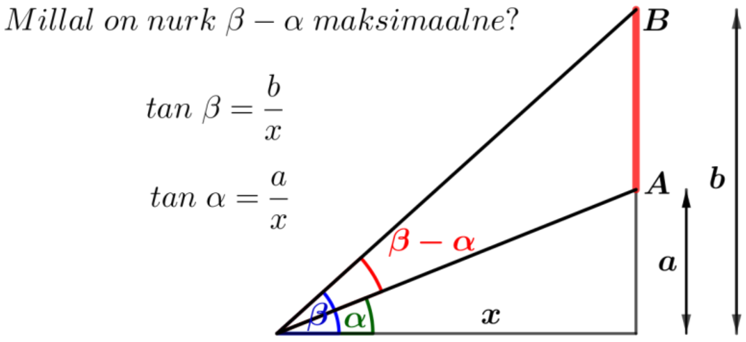
Ül 2. *Nürinurga sees on punktid S ja V. Leida nurga haaradel punktid T ja U nii, et murdjoone STUV pikkus oleks lühim.*

Ül 3. *Kolmnurga ABC sees on kaks punkti D ja E. Kuidas ühendada punktid D* ja *E lühima teega, mis puutub kõiki kolmnurga külgi?*

Maksimaalse vaatenurga ülesanded

Pilt ripub seinal nii, et selle ülemine äär on b meetrit kõrgemal vaatleja silmadest, alumine äär on aga a m kõrgemal vaatleja silmadest. Kui kaugele seinast peab seisma vaatleja, et vaatenurk oleks maksimaalne?

Olgu x vaatleja kaugus seinast. Vaatleja näeb pildi ülemist äärt nurga β all oma silmadest kõrgemal; ülemist äärt aga nurga α all oma silmadest kõrgemal. Pilti ennast näeb vaatleja nurga $\beta - \alpha$ *all.* Meid huvitab, millal on nurk $\beta - \alpha$ maksimaalne.



Joonis 4. Suurima vaatenurga ülesande lähtejoonis.

Et vahemikus [0; 90°[tangens kasvab siis, kui nurk suureneb, siis seal, kus $\beta - \alpha$ on maksimaalne, on maksimaalne ka $\tan(\beta - \alpha)$.

Arvestades seda, et $\tan\beta = \frac{b}{x}$ ja $\tan\alpha = \frac{a}{x}$, saame

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x}\cdot\frac{a}{x}} = (b - a)\frac{x}{x^2 + ab}.$$

Ekstreemumülesande klassikaline lahendus tuletisega ja Regiomontanuse lahendus kasutavad seda tulemust.

Tuletist kasutav lahendus:

Et $(b - a)$ on positiivne konstant, siis peame maksimiseerima ainult seda funktsioooni, mis avaldises sellele tegurile järgneb. Saame:

$$\left(\frac{x}{x^2 + ab}\right)' = \frac{ab - x^2}{(x^2 + ab)^2}$$

Kui $0 < x < \sqrt{ab}$, siis tuletis on positiivne; kui $x = \sqrt{ab}$, siis tuletis on 0; kui $x > \sqrt{ab}$, siis tuletis on negatiivne. Seega on otsitaval funktsioonil kohal $x = \sqrt{ab}$ maksimum ja vaatenurk on maksimaalne, kui $\boldsymbol{x = \sqrt{ab}}$.

Regiomontanuse lahendus:

15. sajandi saksa matemaatik Johannes Müller ehk Regiomontanus tundis trigonomeetriat, aga ta ei tundnud tuletist. Ta rõhutas, et avaldise $\frac{x}{x^2+ab}$ maksimumi asemel võime leida selle avaldise pöördavaldise miinimumi:

$$\frac{x^2 + ab}{x} = x + \frac{ab}{x}.$$

Viimase avaldise võime kirjutada kujul $\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{ab}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{ab}.$

Viimane avaldis on aga minimaalne siis, kui sulgusesse tõstetud ruut on võrdne nulliga. See juhtub aga siis, kui $x = \sqrt{ab}$. Vaata ka [Dörrie, 1965].

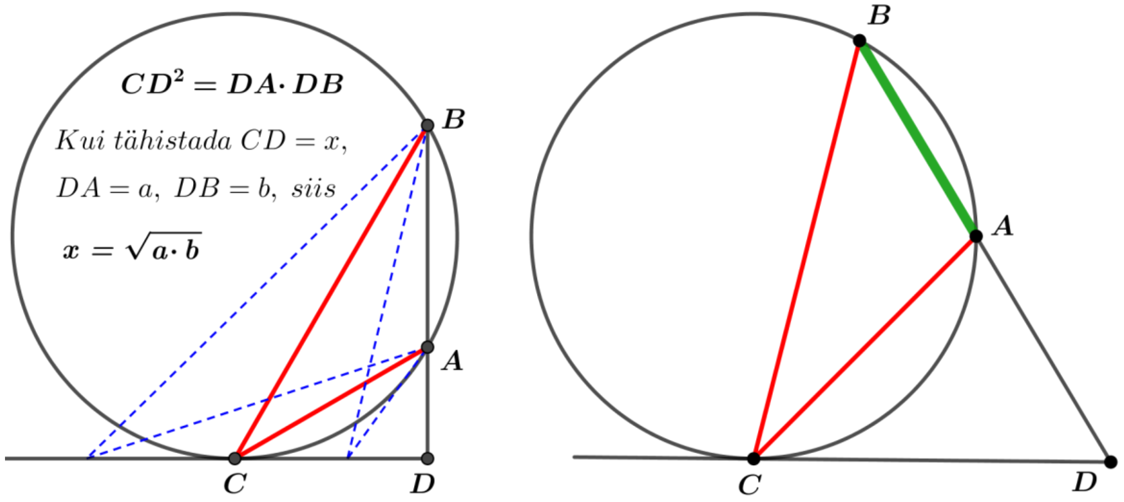
Eukleidese „Elementidele“ lahendus:

Konstrueerime ringjoone, mis läbib punkte *A* ja *B* ning puutub sirget, mida mööda liigub pildile läheneva vaatleja silm. Puutepunktiks olgu punkt *C*. Kõõlu *AB* pikendus lõikab ringjoone puutujasirget punktis *D*.

Eukleidese „Elementide“ III raamatu 36. tõestatud lause on järgmine:

Olgu meil ringjoon, mis läbib punkte A, B ja C. Punktist C joonistame ringjoonele puutuja. See puutuja lõikab kõõlu AB pikendust punktis D.

Puutujalõik CD on lõikude DA ja DB geomeetriline keskmine. Ehk kui tähistada DA = a, DB = b ja CD = x, siis $x = \sqrt{ab}$.



Joonis 5. Eukleidese lahendus ja selle rakendamisvõimalus kaldekraanide puhul.

Kui sirgel, mida mööda liigub pildile läheneva vaatleja silm, võtta mõni puutepunktist *C* erinev punkt, näiteks punkt C_1 *või* C_2, siis muutub kolme punkti läbiva ringjoone raadius suuremaks ning vaatenurk, mis on ühtlasi kaarele *AB* toetuv piirdenurk, muutub väiksemaks.

Eukleides lahendas Regiomantanusest üldisema ülesande. Pilt või ekraan, mida me vaatleme, ei pea üldse olema risti selle sirgega, mida mööda liigub vaadeldavale objetile lähenev silm. Puutujalõigu pikkus on ikka kõõlu pikendamisel puutuja ja kõõlu lõikumispunktini tekkiva kahe lõigu geomeetriline keskmine. Vt ka [Евклид, 1948, lk 118-120 ja 352].

Punkti *C* leidmiseks tuleb kas Eukleidese teoreemi või kõrguse teoreemi abil konstrueerida lõikude *DA* ja *DB* geomeetriline keskmine. Ringjoone keskpunkt asub lõigu *AB* keskristsirge ning puutujasirgele punktist *C* tõmmatud ristsirge lõikepunktis. Regiomontanuse erijuhul, kui kõõl (ehk pilt või ekraan) on risti puutujasirgega, on ringi raadiuseks aga kõõlude pikendamisel saadud lõikude aritmeetiline keskmine.

Snelliuse valguse murdumise seadus ja selle analoogid

Vaatleme kahte keskkonda, milles liikumise kiirused on erinevad. Näiteks vesi ja maapind, näiteks soo ja heinamaa, õhk ja vesi. Liikuda võib keha, aga liikuda võib ka näiteks valguskiir. Sõnastame ühe sellise ülesande.

Olgu ülevalpool x–telge heinamaa, allpool x–telge soo. Matkaja asub heinamaal punktis A(0; a). Matkaja eesmärk on jõuda heinamaal olevast punktist A soos olevasse punkti B(d, -b) lühima ajaga. Matkaja liikumis-kiirus heinamaal on v_1 m/s, *soos aga* v_2 m/s.

Seega tuleb matkajal leida heinamaa ja soo piiril olev punkt $C(x; 0)$ nii, et teekonna *AC* + *CB* läbimiseks kuluv aeg oleks vähim.

Tuletisega lahenduskäik. Lõigu *AC* pikkus on $\sqrt{a^2+x^2}$, lõigu *CB* pikkus on $\sqrt{(d-x)^2+b^2}$. Et liikumiseks kuluv aeg on teepikkuse ja kiiruse suhe, siis teekonna *AC* + *CB* läbimise aja saab esitada *x* funktsioonina:

$$T(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_2}.$$

Leiame selle funktsiooni tuletise ja võrdsustame nulliga

$$T'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}}=0.$$

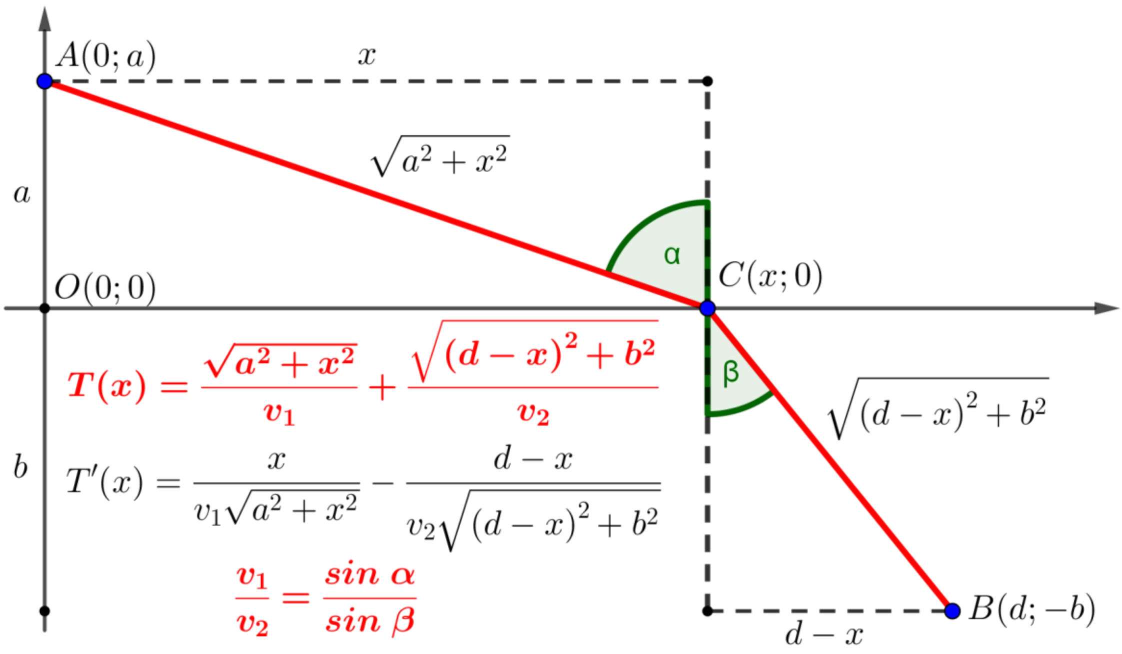
Siit saame:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}}.$$

Et $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sin\alpha$ ja $\dfrac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}=\sin\beta,$ siis $\dfrac{\sin\alpha}{v_1}=\dfrac{\sin\beta}{v_2},$

ehk vahetades võrde pooled ja siseliikmed, saame

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ .$$



Joonis 6. Snelliuse valguse murdumisseaduse tuletuskäiku selgitav joonis.

Saadud valem annab meile Snelliuse valguse murdumisseaduse: Kahes keskkonnas liikumise kiiruste suhe võrdub langemisnurga ja murdumisnurga siinuste suhtega.

Tuletisfunktsiooni nulliga võrdumise tingimusest tuletas murdumisseaduse L´Hospital, paraku ei aita see leida otsitavat punkti $C(x;\,0)$. Võrrandit

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0$$

üldkujul lahendades saame viie parameetriga (a, b, d, v_1 ja v_2) neljanda astme võrrandi, millega jäävad hätta ka võimsad arvutialgebra paketid. Nende parameetrite konkreetsete väärtuste puhul saavad arvutialgebra paketid selle võrrandi lahendamisega hakkama, paraku on siis enamasti tulemuseks mitte x-i täpne väärtus, vaid selle kümnendlähend.

Valguse murdumise seadusele sarnase seaduspärasuse saame, kui me sõnastame alljärgneva ülesande:

Eraldagu x-telg kahte erinevat keskkonda, milles raudtee rajamise kilomeetri hind on konstantne, aga erinev. Keskkonnad võivad olla näiteks kõva pinnas ja soo, tasane maa ja mäed vms. Raudtee ehitaja asub ühes keskkonnas (näiteks tasasel maal) punktis $A(0;\,a)$. *Ta peab punktist A ehitama raudtee teises keskkonnas (mägedes) olevasse punkti* $B(d,\,-b)$ *nii, et ehituskulud oleksid võimalikult väikesed. Raudtee rajamise kulud keskkondades olgu vastavalt* n_1 €/km, ja n_2 €/km.

Seega otsime leida tasase maa ja mägise maa piiril olevat punkti *C(x; 0)* nii, et tee *AC* + *CB* rajamise kulud oleksid minimaalsed. Need kulud saab esitada funktsiooniga:

$$R(x) = n_1 \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \cdot \sqrt{(d-x)^2 + b^2}$$

Leiame selle funktsiooni tuletise; võrdsustame nulliga, saame võrrandi:

$$R'(x) = \frac{n_1 \cdot x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n_2 \cdot (d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0.$$

Siit saame:

$$\frac{n_1 \cdot x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{n_2 \cdot (d-x)}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}.$$

Kasutades võrdusi $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin\alpha$ ja $\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = \sin\beta$ ning vahetades võrde pooled ja siseliikmed, saame

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Täpselt samasuguse valemi saaksime, kui asendaksime Snelliuse valguse murdumisseaduses kiiruste v_1 ja v_2 suhte keskkondade absoluutsete murdumisnäitajate $n_1 = \frac{c}{v_1}$ ja $n_2 = \frac{c}{v_2}$ suhtega…

Leidsime valguse murdumisseaduse tuletise abil. Sama seadust tundsid ka Pärsia matemaatik ja füüsik ibn Sahl (984), Thomas Harriot (1602), Willebrord Snellius (1621) ja Rene Descartes (1637). Nemad tuletist ei tundnud.

Suurima pindalaga rööpkülik kolmnurga sees

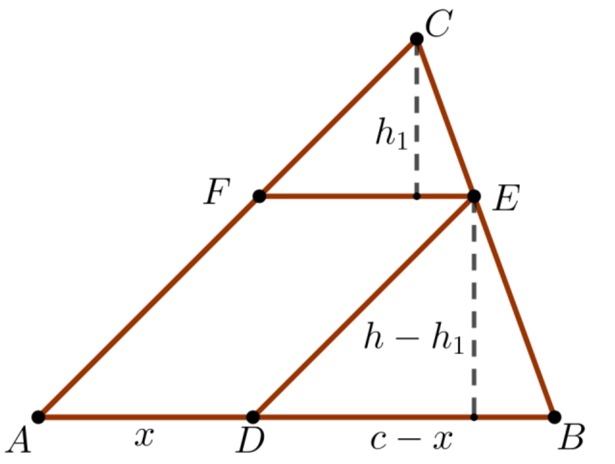
Ülesanne: *konstrueerida kolmnurga sisse suurima pindalaga rööpkülik.*

Alustame sellest, et ilmselt peab rööpküliku üks nurk ühtima kolmnurga ühe nurgaga ning rööpküliku kaks külge paiknema kolmnurga külgedel.

Joonestame kolmnurga *ABC,* mille aluse *AB* pikkus olgu *c* ja tipust *C* tõmmatud kõrgus olgu *h*. Selle kolmnurga sisse joonestame mingi rööpküliku *ADEF*, nii et rööpküliku küljed *AD* ja *AF* paiknevad vastavalt kolmnurga külgedel *AB* ja *AC* ning tipu *A* vastastipp *E* asub küljel *BC*.

Selle rööpküliku aluse *AD* pikkus olgu *x*. Rööpkülik eraldab kolmnurgast *ABC* selle kolmnurgaga sarnased kolmnurgad *FEC* ja *DBE*.

Kolmnurga *FEC* aluse pikkus on x ja kõrgus olgu h_1. Kolmnurga *DBE* aluse pikkus on seega c - x ja kõrguse pikkus on seega h - h_1. Paneme tähele, et rööküliku kõrgus on samuti h - h_1.



Joonis 7. Suurima pindalaga rööpküliku ülesande tuletisega lahendust selgitav joonis.

Rööpküliku *ADEF* pindala

$$S_{ADEF} = x \cdot (h - h_1).$$

Sarnaste kolmnurkade *FEC* ja *ABC* kõrgused ja alused on võrdelised:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{x}{c}.$$

Avaldame siit h_1 ja asendame selle rööpküliku pindala valemisse, saame

$$S_{ADEF}(x) = x \cdot \left(h - \frac{xh}{c}\right) = hx - \frac{h}{c}x^2.$$

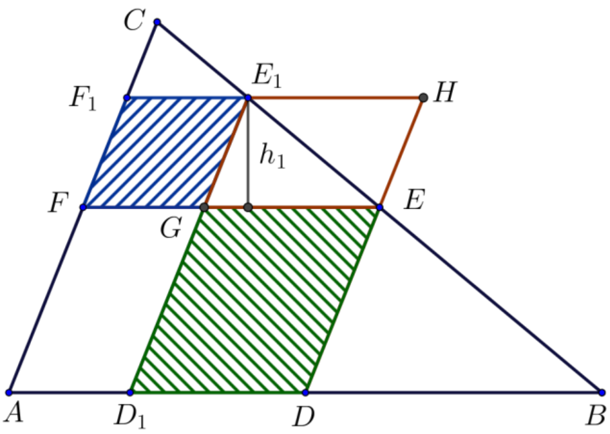
Leiame selle funktsiooni tuletise ja võrdsustame nulliga, saame

$$S'(x) = h - \frac{2h}{c}x = 0 \Rightarrow h\left(1 - \frac{2x}{c}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{c}{2}.$$

Seega on suurima pindalaga rööpküliku külgedeks kolmnurga kesklõigud.

Eukleides lahendas sama ülesande ilma tuletiseta. Ta näitas „Elementide VI raamatu 28. lauset põhjendades. et kui me konstrueerime kolmnurga sisse erinevaid rööpkülikuid nii, et nende rööpkülikute tipud on kolmnurga külgedel, siis suurima pindalaga rööpkülik on neist see, mille külgedeks on kesklõigud. Vaata ka [Евклид, 1948, lk 209-211 ja 435-437]

Eukleides tegi järgmise joonise, millel kujutas lisaks kolmnurgale *ABC* ja kesklõikudele toetuvale rööpkülikule *ADEF* veel mingit muud rööpkülikut $AD_1E_1F_1$ mille tipud on kolmnurga *ABC* külgedel. Lisaks sellele märkis ta joonisele rööpküliku $GEHE_1$ ja kolmnurga GEE_1. Olgu kolmnurga *ABC* alus c ja kõrgus h, rööpküliku $GEHE_1$ ja kolmnurga GEE_1 kõrgus olgu h_1.



Joonis 8. Suurima pindalaga rööpküliku ülesande Eukleidese lahendust abistav joonis.

Kolmnurgad GEE_1 ja FEC on sarnased. Nende sarnaste kolmnurkade alused ja kõrgused on võrdelised, seega

$$\frac{GE}{\frac{a}{2}} = \frac{h_1}{\frac{h}{2}}.$$

Võrde põhiomaduse põhjal saame siit, et

$$\frac{a}{2} \cdot h_1 = \frac{h}{2} \cdot GE.$$

Kuna $\frac{a}{2} \cdot h_1$ on rööpküliku $FEHF_1$ pindala ja $\frac{h}{2} \cdot GE$ on rööpküliku D_1DEG pindala, siis nende rööpkülikute pindalad on võrdsed:

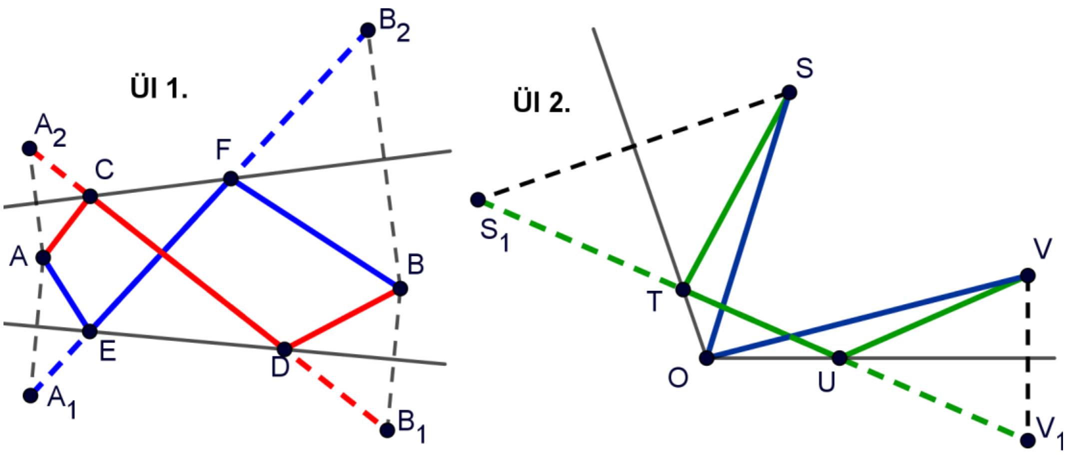
$$S_{D_1DEG} = S_{FEHF_1}.$$

Seega on rööpküliku D_1DEG pindala rööpküliku FGE_1F_1 pindalast suurem rööpküliku $GEHE_1$ pindala võrra. Seepärast on kesklõikudele toetuv rööpkülik kõige suurem rööpkülik, mille saab kolmnurga sisse joonistada.

Maksimumide ja miinimumide leidmine tuletise nullkohtade abil on universaalne ekstreemumülesannete lahendusmeetod. Teatud ülesandeid ongi mõistlik just nii lahendada. Aga samas, iga ülesande puhul tasuks veidi mõelda, kuidas seda ülesannet on lihtsam lahendada. Inimene, kes valdab universaalmeetodi kõrval ka teisi lahendusmeetodeid, on oma otsustustes vaba inimene, ta ei ole universaalmeetodi ori.

Ülesannete vastused.

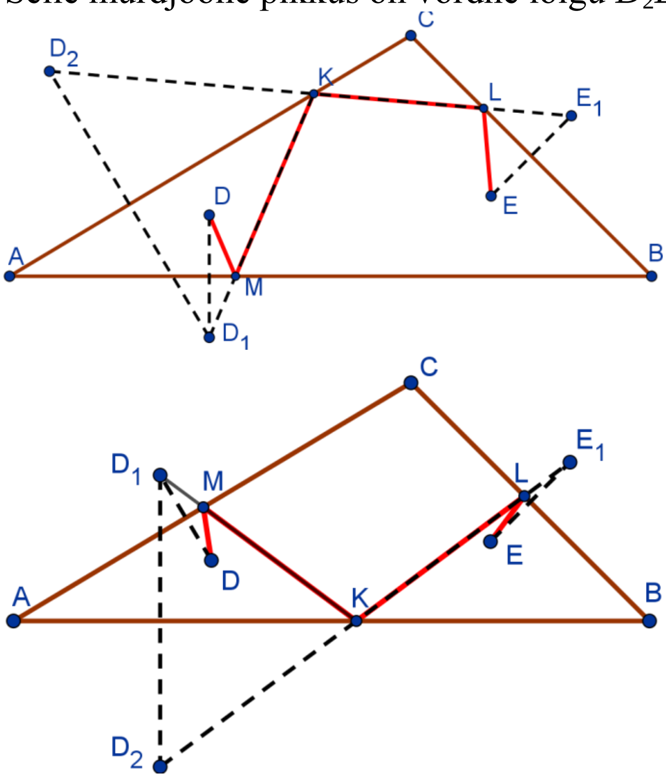
Ül 1. Peegeldame punkte A ja B kallaste suhtes, saame punktid A_1, A_2, B_1 ja B_2. Ühendame sirglõiguga vastaskallastel olevad punktid A_1 ja B_2 ning A_2 ja B_1. Saame lõigud A_1B_2 ja A_2B_1. Lühima tee saame, kui valime jõekallastel punktid, mis tekivad lõikumisel lühemaga neist kahest lõigust. Joonisel on lühemaks lõiguks A_2B_1 ja lühimaks teeks $ACDB$.



Joonis 9. Ülesannete 1 ja 2 lahendusi selgitavad joonised.

Ül 2. Peegeldame punkte S ja V neile punktidele lähimatest nürinurga haaradest. Peegelduspunkte S_1 ja V_1 ühendava lõigu lõikepunktid nurga haaradega annavadki otsitavad punktid T ja U. Kui peegelduspunkte ühendav lõik ei lõiku nurga haaradega, siis tuleb punktid S ja V ühendada nürinurga tipuga O.

Ül 3. Konstrueerime punktid D_1 ja E_1 mis on sümmeetrilised punktidega D ja E sirgete AC ja BC suhtes. Konstrueerime ka punkti D_2, mis on sümmeetriline D_1-ga AB suhtes. Joonistame lõigu D_2E_1 ja konstrueerime murdjoone $DMKLE$. Selle murdjoone pikkus on võrdne lõigu D_2E_1 pikkusega.



Joon. 10. Ülesande 3 lahendust selgitav joonis.

Lihtne on näidata, et iga muu tee punktist D punkti E mis käib kolmnurga külgedel samas järjekorras, on sellest teest pikem. Et me võime muuta kolmnurga külgedel käimise järjekorda (samamoodi peegeldusi tehes), siis ilmneb, et erinevaid selliseid murdjooni nagu DMKLE võib olla kuni kuus. Nende hulgast valime välja selle, mis on lühim. Lühim on aga see, mille puhul sirgestatud teekond (joonisel lõik D_2E_1) on kõige lühem.

Kirjandus

1. Евклид (1948). *Начала. Книги I-VI. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского*, Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, Ленинград.

2. Dörrie,H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History And Solution*, Dover, 1965, pp. 369–370.

3. Heron´s problem, URL https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/HeronsProblem.shtml (17.07.2021)

4. Regiomontanus angle maximization problem, URL https://en.wikipedia.org/wiki/Regiomontanus%27_angle_maximization_problem (17.07.2021)

5. Snell´s law, URL https://en.wikipedia.org/wiki/Snell%27s_law (17.07.2021)

Solving extremum problems by several alternative methods

Tõnu Tõnso, Tallinn University

Summary

There exist subclasses of extremum problem which can be solved by several alternative methods. In addition to the trivial method – finding the zeros of derivative function – it is possible to use inequalities, properties of functions and geometric methods. Geometric solutions are often the simplest and most elegant. In this paper the following extremum problems are considered: Heron's shortest path problem together with its further developments, Regiomontanus's angle maximization problem, Snell's law of refraction and its counterparts, and finally a problem studied by Euclid: constructing the largest parallelogram inside a triangle.