# **Tabletalk** (vers 1.09)

Autor: Viggo Sadolin, vs@mail.inet.dlh.dk Eestindatud versioon: Peedu Põld, peedu@ut.ee,
täiendused, parandused ja lisaülesanded Tõnu Tõnso, tonu@tlu.ee

Tabletalk on programm, mis võimaldab luua tabelitega rekurrentseid mudeleid ning nende graafilisi esitusi.

Tabeli kirjeldamiseks tuleb anda veerule nimi, algväärtus ning eeskiri järgmise väärtuse saamiseks. Avaldises "Järgmise rea kirjeldus" viitab muutuja nimi väärtusele eelnevas reas samanimelises veerus.

**Süntaks:**

**<veeru nimi> | <algväärtus> | <järgmise rea kirjeldus>**

Alljärgneva kirjelduse:

x | 3 | x+2
y | 1 | 2*y+x

tulemuseks on tabel:

| t | x | y |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 |
| 1 | 5 | 4 |
| 2 | 7 | 9 |
| 3 | 9 | 16 |

Veerg t tekitatakse automaatselt.

Oluline on teada, et **uue rea loomisel on võimalik kasutada väärtusi <u>ainult</u> eelnevast reast !**

Mõned näited kirjeldustest koos vastavate tabelitega:

a) saldo | 0 | saldo + saldo*0.10 + 500

| t | saldo |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 500 |
| 2 | 1050 |
| 3 | 1655 |

b)
x | 1 | fibo
fibo | 0 | x+fibo

| t | x | fibo |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 3 |
| 5 | 3 | 5 |

Kasutada saab "passiivset" veergu:

x | 0 | x+5
y | 1 | 1.1*y
z | - | x+y

Antud juhul on passiivne z, näidates avaldise x+y väärtust. Kui z ei esine parempoolsetes avaldistes, nimetame z passiivseks veeruks (muutujaks). Passiivne veerg ei vaja algväärtustamist. Eespool on algväärtuse puudumist tähistatud "-". Tegelikul kasutamisel tuleb vastav positisioon tühjaks jätta.

| t | x | y | z |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | - |
| 1 | 5 | 1.1 | 1 |
| 2 | 10 | 1.21 | 6.1 |

Selleks, et z-veerg tabelis näitaks sama rea x ja y summat, tuleb z-veergu kirjutada:

z | - | (x+5) + 1.1 * y

## Mõned konkreetsemad näited erinevatest valdkondadest.

***Majandus***

Olgu antud funktsioonid:

f(x)=k*(1+r)^x ja g(x)=y*((1+r)^x - 1)/r

Tabletalk'i kasutades saab neid kirja panna palju lihtsamalt :

f | k | f+f*r või f | k | f*(1+r)

g | 0 | g+g*r+y või g | 0 | g*(1+r)+y

Avaldised:

g=y*(1-(1+r)^-n)/r või y=g*r/(1-(1+r)^-n)

saab asendada järgneva kirjeldusega:

saldo | g | saldo + saldo*r - y

Antud juhul on tegemist laenusumma g tagasimaksmisega igas kuus võrdsetes kogustes y protsendimääraga r.

***Auto pidurdustee pikkus.***

Olgu

v: kiirus m/s
s: teepikkus m

Olemas on automaatne muutuja t aja jaoks (sek)
Auto alustab pidurdamist kiirusel 20 m/s.
Mudeli loomiseks tuleb sageli kasutada täiendavaid eeldusi.
Oletame, et kogu pidurdusteekonna vältel kiirus väheneb 5m/s võrra igas sekundis.

Seega, kiirus väheneb 2.5 m/s võrra 0.5 sekundiga, 0.5 m/s võrra 0.1 sekundiga j.n.e.

Tabeltalk sisaldab sisemist parameetrit *dt*. Väärtuse omistamine sellele toimub analoogiliselt teiste parameetritega. Väärtus, mis on omistatud parameetrile *dt*, kantakse automaatselt üle tabeli t-veergu.

Kiiruse v muutumise kirjeldamiseks:

| Parameeter | Tabeli kirjeldus |
|---|---|
| dt \| 0.1<br>b \| 5 | v \| 20 \| v-b*dt |

Tulemuseks on tabel:

| t | v |
|---|---|
| 0 | 20 |
| 0.1 | 19.5 |
| 0.2 | 19.0 |
| 0.3 | 18.5 |

Teepikkuse muutumise kirjeldamiseks tuleb lisada veel:

s | 0 | s + v * dt

Mudeli huvitavamaks muutmiseks on võimalik sisse tuua reaktsiooniaeg ja pidurite rakendumisaeg.

***<u>Laen.</u>***

Oletame, et te olete võtnud laenu 100000 krooni ja peate selle tagasi maksma 60 kuu jooksul, 3000 krooni kuus. Protsendimäär r pole teada.

Parameetrid:

Start | 100000
r | ????
kogus | 3000

Tabeli kirjeldus:

volg | start | volg + volg * r - kogus
protsent | - | volg * r
makstud | - | kogus - volg * r

Kui võtta protsendimääraks r = 0.02, saab laen tagasi makstud 56 kuuga.
Milline peaks olema protsendimäär r, et võlg saaks tasutud 60 kuu pärast?

Paremaks võrdlemiseks säilitage uue joonistamisel ka eelmine graafik.

Et näha gaafikul ainult "protsendi" ning "makstud" veeru esitust, tuleb teha klõps tabeli kirjelduse aknas "võlg" rea ees (sinna tekib märk "-"), kustutada vana graafik ning joonistada uus.
Hiireklõps graafiku mingis punktis näitab tabelis selle väärtuse.
Kui teha tabeli t-veerus mingil väärtusel klõps, näidatakse tulemust püstjoonena graafikul.
Teistes veergudes klõps hiire vasakul või paremal nupul muudab kohtade arvu pärast koma.

***Vee jahtumine.***

On tavaline, et pärast mõnda aega töösse süvenemist, leiame just äsja keedetud kohvi jahtunud olevat. Kuidas saaks sellist temperatuuri langemist kirjeldada?

Antud näide on teostatav andmetega tegelikust elust. Mõõtes temperatuuri ning kandes tulemused tabelisse ("Vaatlused"), on Tabletalk'i abil võimalik kohe graafikus vastavat temperatuuri muutuse kõverat vaadelda.
Hiljem kirjeldame seda kõverat ka matemaatilise mudeli abil.

*Esimene oletus*: temperatuur muutub lineaarselt

temp | 100 |  temp - 2

Märkus: Pärast 50 minuti möödumist vesi jäätub !!!

*Teine oletus*: temperatuur muutub liitprotsendiliselt.

temp | 100 |  temp-c*temp

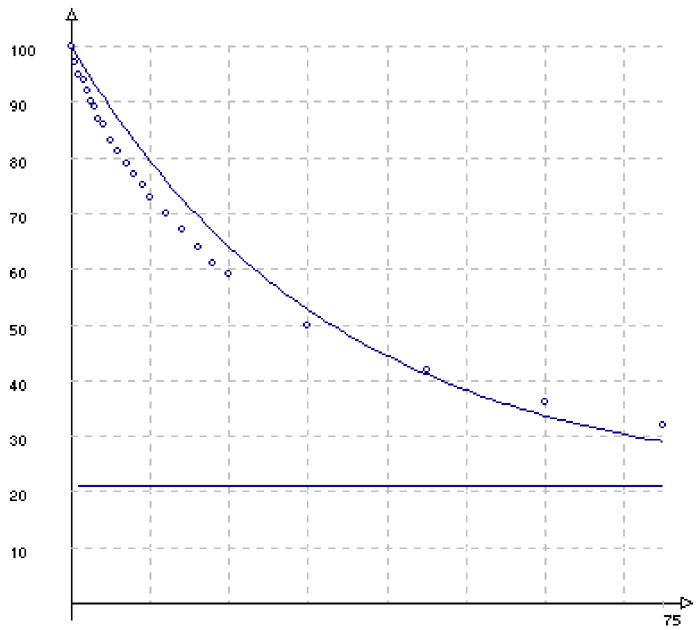
Milline oleks parim c väärtus?

Märkus: Temperatuur langeb allapoole toatemperatuurist!!!

*Kolmas oletus:* Temperatuur langeb liitprotsendiliselt vahemikus, kus ta on suurem toatemperatuurist või võrdne sellega.

temp | 100 | temp-k*(temp-room)

Milline oleks parim k väärtus?
Märkus: Isegi parima k valiku korral ei ole võimalik saada mõõtmistulemustele vastava kõvera graafikut. Põhjuseks on soojuse kadu eksperimendi alguses - osa energiast kulub tassi soojendamiseks.




***Haiguste levik.***

Mudel kirjeldab gripi levikut.

Olgu vaadeldavas mudelis elanikkonna suurus 1000 innimest, kellest vaatluse alguses 20 on juba haigestunud grippi ning 980 veel mitte

*Esimene katse*:

Iga päev haigestub 10% tervetest inimestest.

u  : terved (uninfected)
d : haiged (deceased)

1. Mudel

u | 980 | u-0.10*u
d |  20 | d+0.10*u

Märkus:  Lõpptulemusena haigestuvad kõik inimesed ning haigestunud inimesed ei saa iialgi terveks.

*Teine katse*:

Gripp kestab kom päeva - iga päev kandub haigete inimeste hulgast 30% inimesi uude gruppi, nimetame neid immuunseteks.

2. Mudel

u | 980 | u-0.10*u
d |  20 | d+0.10*u-0.30*d
i |   0 | i+0.30*d

Märkus:

Haigestunute hulk on küll maksimaalne, kuid pärast seda haigus kaob.
NB! Kõik peavad vähemalt ühe korra haiged olema.
Mudelil 2 on siiski veel üks puudus. Haigestunute arv kasvab 0.10*u võrra.
See sõltub ainult mittehaigestunud inimeste arvust. Tegelikult peaks see sõltuma ka juba haigestunud inimeste arvust.

*Kolmas katse*:

Oletame, et iga inimene suhtleb päevas veel 9 inimesega ning kui mittehaigestunud isik kohtab haigestunut, on tõenäosus, et haigus kandub talle 8%.

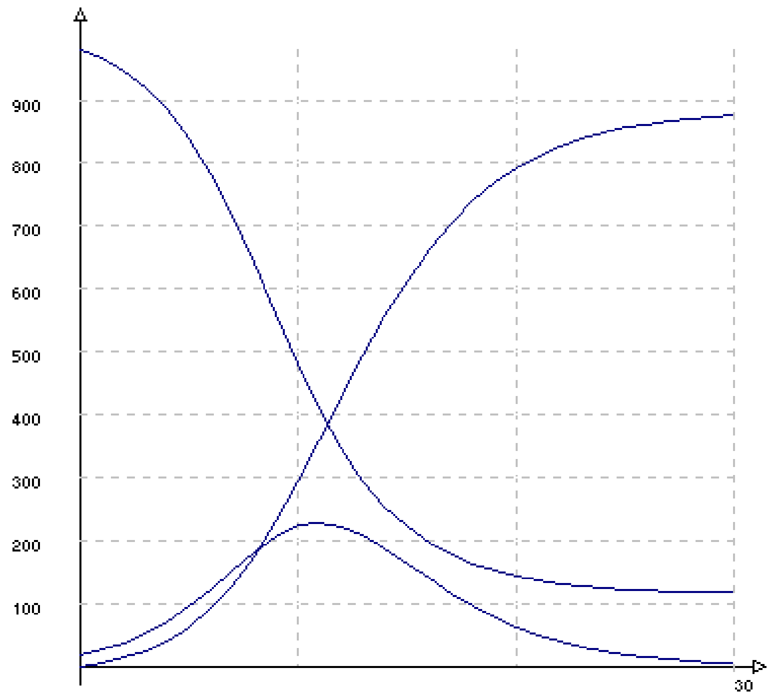
Olgu Peeter selle elanikkonna üks, veel mittehaigestunud isik. Peeter kohtub inimestega iga päev.
Tõenäosus, et ta kohtub haigestunud inimesega on d/999.
Tõenäosus, et Peeter saab nakkuse sellelt kohtumiselt on d/999*0.08.
Tõenäosus, et Peeter ei saa nakkust sellelt inimeselt on (1-d/999*0.08)
Oletame, et Peeteril on 9 kohtumist päevas.
Tõenäosus, et Peeter ei haigestu pärast ühtki sellist kohtumist on (1-d/999*0.08)^9.
Tõenäosus, et Peeter saab nakkuse vähemalt ühelt 9-st kohtumisest, on (1-(1-d/999*0.08)^9)
Peeter pole ainus mittehaigestunud inimene

Seega kasvab haigestunud inimeste arv u*(1-(1-d/999*0.08)^9) võrra.

3. Mudel

u | 980 | u-u*(1-(1-d/999*0.08)^9)
d |  20 | d+u*(1-(1-d/999*0.08)^9)-0.30*d
i |   0 | i+0.30*d

See on juba täpsem mudel gripi leviku kirjeldamiseks.




Harjutusülesandeid:

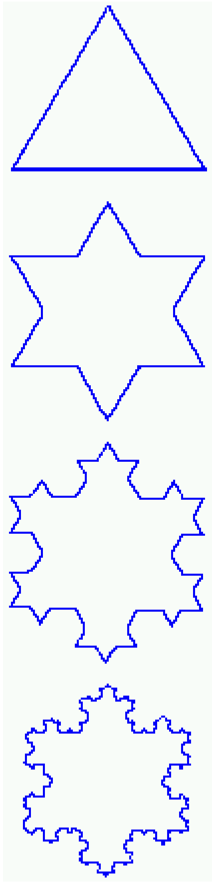
1. **Kalapüük.** Järves on alghetkel 10000 särge. Kui särgi välja ei püüta, suureneb särgede arv aastas 15 % võrra.
a) Igas aastas tahetakse püüda 2000 särge. Kuidas hakkab muutuma särgede arv?
b) Kui suure särgede esialgse arvu puhul jääks igaaastase 2000-se väljapüügi puhul särgede arv muutumatuks?
c) Alghetkel on järves 5000 ahvenat. Igal aastal püütakse välja 750 ahvenat, aga ahvenate arv jääb püsima samal tasemel. Kui suur on ahvenate juurdekasvu protsent?

2. **Saastamine.** Järves on 100000 $m^3$ vett, milles alghetkel on 5000 $m^3$ roiskvett. Iga päev voolab järve juurde 1000 $m^3$ puhast vett, järvest voolab välja samapalju järvevett, mis on osaliselt roiskunud. Kui mitme päeva pärast on roiskvett järves esialgsest 5 korda vähem?
Oletame täiendavalt, et iga lastakse järve 5 $m^3$ roiskvett. Kui mitme päeva pärast on sel juhul järves roiskvett esialgsest 5korda vähem?

3. **Valla ehituslaen** (ülesanne 1934.a. õpikust "Väike matemaatik"- tööraamat algkooli VI klassile).
Vallavalitsus sai oma algkooli hoone ehitamiseks 30 000 krooni riiklikku ehituslaenu. Laenu kustutamine algas 01.jaan.1928.a. ja peab lõppema 25 aasta pärast, kusjuures igal aastal tasutakse ühesugune osa. Laenult arvutatakse 4% intresssi. Mitu krooni oli tagsimakstav summa? Kui palju tuli maksta intressi viiendal aastal? Kui suur summa tuli maksta laenu kustutamiseks?

**4. Hoiustamine**. Peres sünnib poeg. Isa lubab suure rõõmuga teha pojale 20. sünnipäevaks 100000-kroonise kingituse.
a) Kui suur algkapital tuleb hoiustada intressimääraga 4% eeldusel, et sellele vahepeal juurdemakseid ei tehta?
b) Kui palju oli poisil raha  5-aastaselt?
c) Millal oli poisil üle 5 000 krooni?
d) Kui palju pidanuks isa poisi sündides raha panka viima, et poiss saaks 30-ks sünnipäevaks 100000 krooni?
e) Vanaisa  paneb panka 1 krooni. Kui mitme aasta pärast saavad tema järeletulijad pärida 100000 krooni?
f) Kui suur peab olema intressimäär, et 100 aasta pärast saaks 1 kroonist 100 krooni?
g) Kui suur peab olema intressimäär, et 1000 aasta pärast saaks 1 kroonist 1000 krooni?

3. **Kochi lumehelbe ümbermõõt ja pindala.** Võrdkülgse kolmnurga külg on 1m pikk. Jaotame selle kolmnurga iga külje kolmeks võrdseks osaks ning ehitame iga külje keskmisele osale võrdkülgse kolmnurga. Saame joonisel kujutatud “tähtkuusnurga”. Saadud tähtkuusnurga iga külje jaotame kolmeks võrdseks osaks ning ehitame keskmisele osale neist võrdkülgse kolmnurga. Tulemusena saame hulknurga, millel on 48 külge. Jätkame sellist protsessi lõpmatuseni. Leiame nii tekkiva lumehelbe kujulise kujundi (Kochi lumehelbe) ümbermõõdu ning pindala.



$Ü_1 = 3 \qquad K_1 = 3$

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

---

$Ü_2 = \frac{4}{3}Ü_1 = 4 \qquad K_2 = 4K_1 = 12$

$$S_2 = S_1 + \frac{K_1}{9}S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

---

$Ü_3 = \frac{4}{3}Ü_2 = \frac{16}{3} \qquad K_3 = 4K_2 = 3\cdot 4^2 = 48$

$$S_3 = S_2 + \frac{K_2}{9^2}S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{12}{9^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3^3} = \frac{10\sqrt{3}}{27}$$

---

$Ü_4 = \frac{4}{3}Ü_3 = \frac{64}{9} \qquad K_4 = 4K_3 = 3\cdot 4^3 = 192$

$$S_4 = S_3 + \frac{K_3}{9^3}S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3^3} + \frac{48}{9^3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{4\sqrt{3}}{243} = \frac{94\sqrt{3}}{243}.$$

---

$Ü_n = \frac{4}{3}Ü_{n-1} = \ldots = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \qquad K_n = 4K_{n-1} = 3\cdot 4^{n-1}$

$$S_n = S_1 + \frac{3}{9}S_1 + \frac{4\cdot 3}{9^2}S_1 + \frac{4^2\cdot 3}{9^3}S_1 + \frac{4^3\cdot 3}{9^4}S_1 + \ldots + \frac{4^{n-2}\cdot 3}{9^{n-1}}S_1 = S_2 + \frac{\sqrt{3}}{3^3}[1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \ldots + \frac{4^{n-3}}{9^{n-3}}] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{27}\,\frac{\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right]}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 + \frac{9^{n-2}-4^{n-2}}{9^{n-2}\cdot 5}\right).$$

4. **Fibonacci jada üldvalem.** Tõestada, et Fibonacci jada üldliige on $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Alustame sellest, et $a_1 = 1$ ja $a_2 = 1$. Tingimust $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ võib tõestada nii:

Olgu $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ning $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Arvud $\alpha$ ja $\beta$ on ruutvõrrandi $x^2 - x - 1 = 0$ lahendid. Seega nad rahuldavad tingimust $x^2 = x + 1$ ehk $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$. Siis saame

$$a_{n+1} + a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\alpha^{n+1} + \alpha^n\right) - \left(\beta^{n+1} + \beta^n\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}\right) = a_{n+2}.$$

5. **Kaos.** Vaatame mittelineaarset diferentsvõrrandit $X_{n+1} = aX_n(1 - X_n)$ kus $a$ on konstant ja $0 < X_0 < 1$.
Andes $a$-le erinevaid väärtusi, ilmnevad erinevad protsessid.
1) Kui $0 < a < 1$, siis $X_n$ läheneb nullile.
2) Kui $1 < a < 3$, siis $X_n$ läheneb (olenevalt $X_0$ väärtusest) piirväärtusele $1 - 1/a$.
3) Kui $3 < a < 3{,}449$ siis $X_n$ hakkab võnkuma kahe väärtuse vahel. Võnkeperiood on 2.
4) Kui $3{,}449 < a < 3{,}544$ siis $X_n$ hakkab võnkuma nelja väärtuse vahel. Võnkeperiood on seega 4.
5) Kui $3{,}544 < a < 3{,}564$ siis $X_n$ hakkab võnkuma 8 väärtuse vahel. Võnkeperiood on seega 8.
Nii jätkates toimub võnkeperioodi kahekordistumine seni, kui jõuame väärtuseni 3,57. Tekib kaos.