Marek Kolk, Tartu Ülikool, 2013

2 Newtoni jahtumisseadus

Esimene seadus kehade jahtumise kohta konvektsiooni teel avaldati Isaac Newtoni poolt 28. mail 1701, mis lihtsustatult kõlas „keha soojushulga muutumise kiirus keha pinnaühiku kohta on võrdeline keha pinna ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega.“ Sellele seadusele vastav diferentsiaalvõrrand on üks lihtsamaid ja populaarsemaid näiteid harilike diferentsiaalvõrrandite kohta.

Sisukord

2.1 Diferentsiaalvõrrand

Newton sõnastatud seadusest saab tuletada esimest järku hariliku lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\boxed{T'(t) = -\beta\left[T(t) - T_*\right], \quad t \geq 0,} \tag{2.1}$$

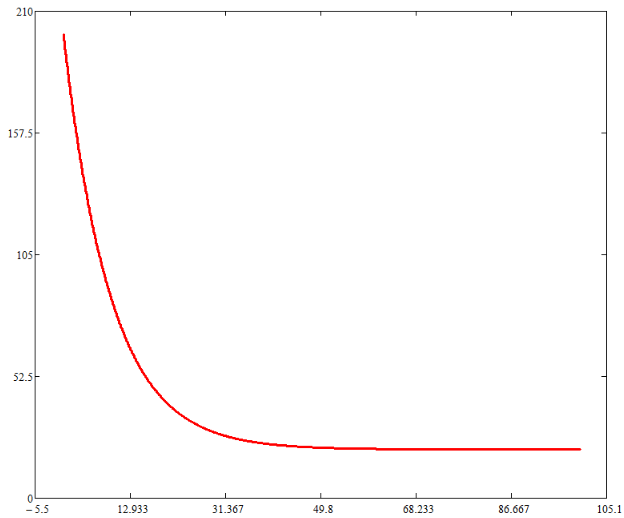
kus

- otsitav $T(t)$ on keha (pinna) temperatuur ajahetkel t,
- T_* on ajas muutumatu väliskeskkonna temperatuur,
- $\beta > 0$ on süsteemi iseloomustav konstant (ühikuks on $1/s$).

Täpsustav info on toodud järgnevates kommentaarides. Andes ette ka keha temperatuuri T_0 alghetkel $t = 0$, saame algtingimusega ülesande,

$$\left\{\begin{aligned} &T'(t) = -\beta \Big[T(t) - T_*\Big], \quad t \geq 0, \\ &T(0) = T_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Märgime, et kui välistemperatuur $T_* < T_0$, siis $T(t) - T_* > 0$ ja temperatuuri muutumise kiirus $T'(t)$ on negatiivne ning keha hakkab jahtuma. Kui välistemperatuur $T_* > T_0$, siis $T(t) - T_* < 0$ ja temperatuuri muutumise kiirus $T'(t)$ on positiivne ning keha hakkab soojenema. Iseloomulik jahtumisseaduse kõver kõrgematel temperatuuridel.



2.2 Soojusvahetus

Selleks, et natukene paremini aru saada, millal Newtoni jahtumisseadus toimib ja mis olukorras võib see olla ebatäpne, anname skemaatilise ülevaate soojusvahetusest. Üldjuhul toimub soojuse ülekanne vähemalt kolmel erineval moel.

1. **Soojusjuhtivus** ehk **konduktsioon**. Soojusenergia levib aine mikroosakeste soojusliikumise tulemusena. Gaaside ja vedelike korral toimub molekulide liikumine, tahketes kehades kristallvõre võnkumine, metallides vabade elektronide difusioon. Konduktsioon on peamine soojuse levimise viis tahketes kehades.

2. **Soojusülekanne** ehk **konvektsioon** toimub gaasides ja vedelikes makroskoopiliste osade liikumisel (erineva temperatuuriga osakesed segunevad omavahel andes üle ka vastava soojuse). Selliselt toimub soojusvahetus ka tahkete kehade ning gaaside (või vedelike) vahel. Just selle olukorra kohta kehtib Newtoni jahtumisseadus.

3. **Soojuskiirgus** on soojuse ülekanne ühelt kehalt teisele soojusliku ehk infrapuna kiirgusega. Antud kiirguse liik ei vaja levimiseks keskkonda. Selliselt saab näiteks Maa ja teised planeedid soojust Päikese käest. Kui infrapuna kiirguse mõju on oluline, siis Newtoni jahtumisseaduse mudel ei tööta ja selle asemel tuleks kasutada täiustatud mudeleid nagu näiteks Newton-Stefani mudelit.

2.3 Võrrandi tuletamine

Lähtudes Newtoni formuleeringust „keha soojushulga muutumise kiirus keha pinnaühiku kohta on võrdeline keha pinna ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega," saame kirja panna seose (vt. [1, 5, 7])

$$\frac{1}{A}\frac{dQ}{dt} = h\left[T(t) - T_*\right], \tag{2.3}$$

kus T_* on väliskeskkonna (enamasti õhu) temperatuur, $T(t)$ on keha pinnatemperatuur hetkel t, h on soojusülekandetegur (ühik $W/(m^2 \cdot K)$), A on keha keskkonnaga kontaktis oleva pinna suurus (pindala) ja Q on kehasse salvestunud soojushulk dzaulides (seega $Q'(t)$ on soojushulga muutumise kiirus).

Siinjuures on kitsendus, et keha temperatuur on homogeenne (kõikjal ühesugune ja võrdselt jaotatud, ei ole erineva temperatuuriga kihte ning ka soojusülekanne toimub kõikidele osadele momentaalselt). Füüsikast on teada, et $Q = C\,T$, kus C on keha soojusmahtuvus (soojushulk, mis on vajalik antud ainekoguse temperatuuri tõstmiseks 1 kraadi võrra). Arvestades, et soojusmahtuvus C on konstant ja Q ning temperatuur T on ajast sõltuvad funktsioonid, siis võrdusest $Q(t) = C\,T(t)$ tuleb seos

$$dQ(t) = C\,dT(t). \tag{2.4}$$

Asetame viimase võrrandisse (2.3),

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{h\,A}{C}\left[T(t) - T_*\right]. \tag{2.5}$$

Kui leppida kokku, et konstandid h, A, C on positiivsed, siis peame arvestama veel süsteemi märki. Kui $T - T_* > 0$, siis tähendab see, et keha on keskkonnast soojem ja peab algama jahtumine. Seega temperatuuri jahtumiskiirus $T'(t)$ peaks olema negatiivne. Analoogiliselt, kui $T - T_* < 0$, siis keha on keskkonnast jahedam ja peab algama keha soojenemine ($T'(t)$ peab olema positiivne). Kokkuvõtteks näeme, et peame võrrandi (2.5) paremasse poolde lisama miinusmärgi.

Tähistame

$$\beta = \frac{h\,A}{C}. \tag{2.6}$$

Viimast saab kirjutada ka teisiti. Arvestades, et soojusmahtuvus massiühiku kohta on keha erisoojus c, siis seostest

$$c = \frac{C}{\rho\,V}, \quad \rho = \frac{m}{V}, \tag{2.7}$$

saab välja kirjutada

$$\boxed{\beta = \frac{h\,A}{C} = \frac{h\,A}{c\,\rho\,V} = \frac{h\,A}{c\,m}} \tag{2.8}$$

Siin ρ on keha (aine) tihedus, V on keha ruumala ja m on keha mass. Erisoojuse c ühikuks on $J/(kg \cdot K)$. Võttes arvesse kõike eelnevat, oleme jõudnud võrrandini (2.1).

2.4 Täpne lahend

Cauchy teoreemi järgi on algtingimustega ülesandel (2.2) ühene lahend, mis läbib punkti $T(0) = T_0$. Täpse lahendi saab leida näiteks muutujate eraldamise võttega,

$$\frac{d(T(t) - T_*)}{T(t) - T_*} = -\beta\,dt. \tag{2.9}$$

Integreerime võrrandi mõlemat poolt

$$\ln|T(t) - T_*| = -\beta\,t + C \quad \Rightarrow \quad |T(t) - T_*| = e^{-\beta\,t}\,e^C. \tag{2.10}$$

Algtingimusest $T(0) = T_0$ saab leida tundmatu konstandi C,

$$|T_0 - T_*| = e^C \quad \Rightarrow \quad C = \ln|T_0 - T_*|. \tag{2.11}$$

Saame

$$|T(t) - T_*| = |T_0 - T_*|\,e^{-\beta\,t}. \tag{2.12}$$

Mudeli järgi on $T(t) - T_*$ ja $T_0 - T_*$ sama märgiga. Kokkuvõtteks võime välja kirjutada ülesande (2.2) täpse lahendi

$$\boxed{T(t) = T_* + (T_0 - T_*)\,e^{-\beta\,t}, \quad t \geq 0} \tag{2.13}$$

Siinjuures ei tohi ära unustada, et keha temperatuur $T(t)$ saab võrdseks välistemperatuuriga T_* ainult protsessis $t \to \infty$, mis tähendab, et ei ole mõtet üritada täpselt lahendada, kui pika ajaga $T(t) = T_*$ (pigem tuleks lahendada probleemi $T(t) = T_* + \varepsilon$, kus ε on aktsepteeritav temperatuuride erinevus, näiteks $\varepsilon = 1$ kraad keha jahtumise korral).

2.5 Bioti arv

Soojuse leviku mudeli sobivust saab hinnata nn. Bioti arvuga (Jean-Baptiste Biot - prantsuse füüsik ja astronoom),

$$Bi = \frac{konvektsioon\ keha\ pinnal}{konduktsioon\ keha\ sees} := \frac{h\,V}{k\,A}, \tag{2.14}$$

kus k on materjali soojuserijuhtivus (*Thermal Conductivity*), ühik $W/(m \cdot K)$.

Newtoni jahtumisseaduse mudel (2.1) on täpne, kui $Bi = 0$ (sisemine soojusvahetus, s.t. konduktsioon keha sees toimub lõpmata palju kiiremini kui väline soojusvahetus). Reaalelus sellist olukorda muidugi ette ei tule. Kui $Bi > 1$, siis väline soojusvahetus toimub kiiremini (keha pind soojeneb/jahtub kiiresti), kuid keha sees konvektsiooni on väike (soojus levib aeglaselt). Kui $Bi < 0.1$, siis Newtoni jahtumisseaduse mudelit loetakse väga heaks ligikaudseks mudeliks, [1, 7].

Näiteks soojustatud majaseinte jaoks $Bi >> 1$ ja lihtne konvektsioonimudel (2.1) ei tööta. Väikeste metallobjektide korral on tavaliselt tingimus $Bi < 0.1$ täidetud, samuti näiteks karastusjookide korral (nii plastik kui metallpakendis).

2.6 Soojuskiirgus ja Newton-Stefani mudel

Keskkonnast kuumemate kehade jahtumisel peab arvestama, et soojus eraldub ka infrapuna kiirguse teel (soojuskiirgus). Stefan-Boltzmanni seadus ütleb, et absoluutselt musta keha soojuskiirguse intensiivsus (võimsus) ühikulise pindala kohta kasvab võrdeliselt temperatuuri neljanda astmega, millest saame soojushulga muutumise kiiruse kohta seose

$$\frac{1}{A}\frac{dQ(t)}{dt} = \epsilon\,\sigma\Big[T^4(t) - T_r^4\Big]. \tag{2.15}$$

Koos konvektsiooniga võrrandist (2.3) saame soojushulga muutumise kiiruse avaldada **Newton-Stefani seaduse** näol:

$$\frac{1}{A}\frac{dQ(t)}{dt} = h\Big[T(t) - T_*\Big] + \epsilon\,\sigma\Big[T^4(t) - T_r^4\Big], \tag{2.16}$$

kus lisaks varem vaadeldud suurustele $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ W/(m^2 \cdot K^4)$ on universaalne Stefan-Boltzmanni konstant, $\epsilon \in (0, 1)$ on keha kiirgustegur (absoluutselt musta keha korral $\epsilon = 1$) ja T_r on kogu süsteemis kiirgavate esemete keskmine temperatuur (jämeda hinnanguna $T_r = T_*$, kuid selline lihtsustamine võib olla ka väär). Võrrandi (2.16) saab analoogiliselt Newtoni jahtumisseadusega (2.1) kirjutada kujul

$$\boxed{T'(t) = -\beta \Big[T(t) - T_*\Big] - r \Big[T^4(t) - T_r^4\Big]} \tag{2.17}$$

Kordajad β ja r on defineeritud järgmiselt:

$$\beta = \frac{h\, A}{c\, \rho\, V}, \quad r = \frac{\epsilon\, \sigma\, A}{c\, \rho\, V}. \tag{2.18}$$

2.7 Praktiline kasutamine

Nagu ennist mainitud, töötab Newtoni seadus homogeense keha korral, kui soojuskiirguse osa on väike ja Bioti number $Bi < 0.1$. Soojuskiirguse lisandumisel peaks kasutama täiustatud mudeleid (eriti, kui keha ja väliskeskkonna temperatuuride vahe on suur), nagu näiteks Newton-Stefani mudel (2.17). Väga oluline on, et süsteem oleks võimalikult homogeenne.

Üks levinud näide õpikutes on mõrva aja määramine Newtoni jahtumisseaduse (2.1) abil. Antud probleemi korral Bioti arv $Bi > 0.5 \ldots 0.6$ (vt. [1], kus hinnanguliselt saadakse see koguni $Bi = 0.89$), kuid kasutades inimkeha sisetemperatuure, muutub Newtoni jahtumisseadus (2.1) kohati kasutatavaks, kuna nn. jahtumise hilinemine keha sees kompenseerib soojuskiirguse mõju mittearvestamise (samas mittehomogeensus ei ole liialt suur), [2, 3].

Veel üks klassikaline näide on kuuma kohvi või vee jahtumine. Siin aga peab arvestama, et lisaks toimub kohvi aurustumine (kui just anum ei ole suletud) ja soojuskiirguse mõju on samuti olemas.

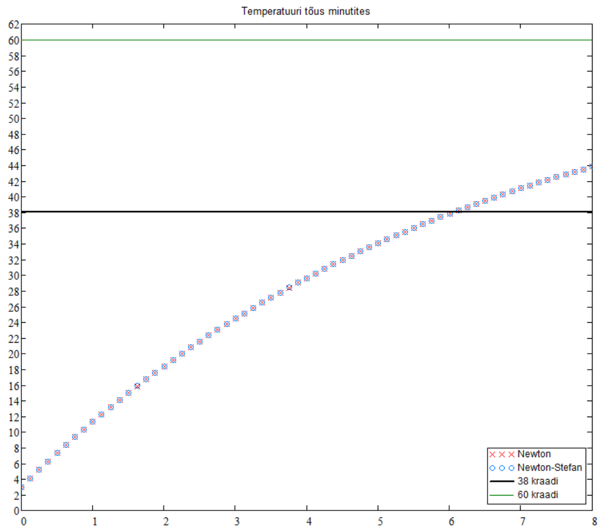
Newtoni seaduse kasutamine sobib hästi juhtudel, kus soojuskiiguse mõju on väike ja kus $Bi < 0.1$.

Märgime veel, et kordajat β saab ligikaudu määrata, kui teha mitu mõõtmist (erinevatel aegadel).

2.8 Näidisülesanded

1. Ema tahab lapsele soojendada piima klaasis, mille läbimõõt on 6 cm ja kõrgus 7 cm. Ta asetab klaasi 60-kraadise veega täidetud suurde potti. Piima segatakse piisavalt ühtlaselt soojendamise käigus. Soojusülekandetegur $h = 120\ W/(m^2 \cdot {}^\circ C)$. Kui palju kulub aega külmkapist võetud 3-kraadise piima soojendamine 38 kraadini?

Piima jaoks võib kasutada veele omaseid parameetreid, näiteks vee soojuserijuhtivus $k = 0.617\ W/(m \cdot °C)$, tihedus $\rho = 996\ kg/m^3$, erisoojus $c = 4178\ J/(kg \cdot °C)$. Sellel ülesandel Bioti number $Bi \approx 2.14 > 0.1$, kuid Newtoni jahtumisseadust võib kasutada küll. Keskkonnad on omavahel sarnased ja näiteks Newton-Stefani mudel ei anna olulist juurde (kõrgete soojusülekandeteguri h väärtuste korral võib erinevus minna väikeseks, [5]).



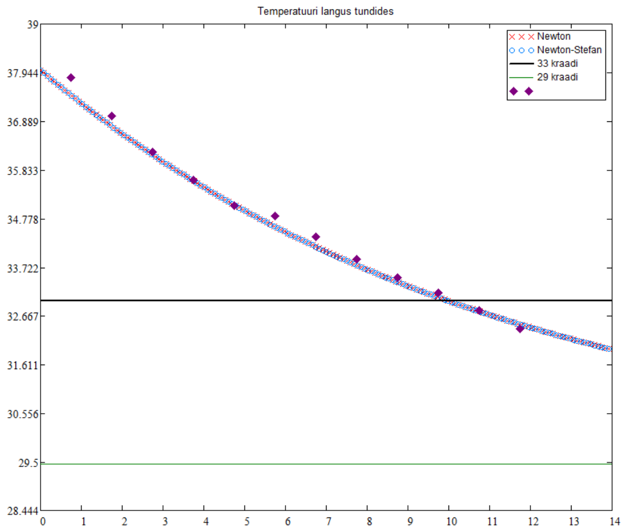
2. Spetsialist-kriminalist Säde leiab Torni pagariäri omaniku mõrvatuna laoruumist kell 18:00. Uurimise käigus tekib hüpotees, et omanik mõrvati u. kell 05:48 varahommikul. Antud kellaajast järeldab süüdistaja, et peamine kahtlusalune on postiljon Petskin, kes tõi pagariärisse homikused lehed alati kell 05:45 ja keda eelmisel hommikul pagari koer olla kannast näksanud.

   Kohtuvaidlusesse kaasatakse ka teid kui spetsialisti ja palutakse versiooni kontrollida matemaatiliselt. Te saate teada, et laoruumi temperatuuri hoitakse stabiilselt 20 kraadi juures, kell 18:00 mõõdeti surnukeha temperatuuriks 25 kraadi, pagar oli eelmisel päeval terve (seega $T_0 \approx 37$ kraadi). Soojusülekandetegur h hinnati väärtusele 7 $W/(m^2 \cdot °C)$. Keha modelleeriti ligikaudselt kui 1.7 meetri pikkust ja 30 cm läbimõõduga silindrit.

   Lisaks, inimese keha koosneb 72% ulatuses veest ja seega võib kasutada vee omadusi. Siit keskmisel temperatuuril $(37 + 25)/2 = 31$ kraadi juures on vee näitajad (vt. [1]): vee soojuserijuhtivus $k = 0.617\ W/(m \cdot °C)$, tihedus $\rho = 996\ kg/m^3$, erisoojus $c = 4178\ J/(kg \cdot °C)$.

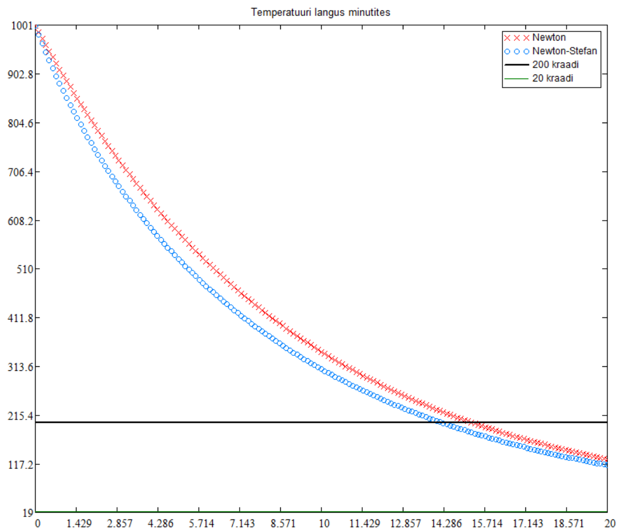
Kontrollida tulemust nii Newtoni kui Newton-Stefani mudeliga, arvestades kiirgusteguriks $\epsilon \approx 0.85$ (vt. [6], vee korral on see 0.67).

Märgime, et siin $Bi = 0.78$ ja loomulikult sisaldab antud ülesanne endast väga palju olulisi lihtsustusi (näiteks, kuidas mõõta keha sisemist või pindmist temperatuuri, riiete mõju jne), kuid stabiilsete keskkondade korral mudel töötab talutavalt (nt. [2, 3]).



Joonisel on andmete komplekt 32 artiklist [3], $T_* = 29.4\,°C$, $T_0 = 38\,°C$, $V/A = 0.0688$ m, $h = 7\,W/(m^2 \cdot °C)$.

3. Suuri 4 millimeetrise paksusega metallplaate kuumutatakse sulatusahjus 1000 kraadini. Kui palju võtab aega plaatide jahtumine 200 kraadini 20 kraadise välisõhu käes? Soojusülekandetegur $h = 120\,W/(m^2 \cdot °C)$, soojuserijuhtivus $k = 110\,W/(m^2 \cdot °C)$, tihedus $\rho = 8530\,kg/m^3$, erisoojus $c = 380\,J/(kg \cdot °C)$ (siin peaks tulema $\beta \approx 0.111 \cdot 1/min$, vt. [1]).



4. Kuum kohvi jahtub 23 kraadise õhu käes. Mõõtmisel saadakse andmed (aeg minutites ja kohvi temperatuur Celsiuse kraadides)

0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
81	64	59	55	50.5	48	45	42.5	40	38	37	35.5	34.5

Koostada Newtoni jahtumiseaduse (2.1) mudel, s.t. määrata β (ilma täpset lahendit teadmata).

Võimalik lahendus. Me võime iga viie minuti kohta arvutada temperatuuri jahtumise keskmise kiiruse (temperatuuri muut jagatud aja muut)

$$v(t_2) \approx T'(t_2) \approx \frac{T(t_1) - T(t_2)}{t_1 - t_2}.$$

Näiteks $T'(40) = \frac{42.5-40}{35-40} = -\frac{2.5}{5} = -\frac{1}{2}$. Võrrandist (2.1) saame avaldada

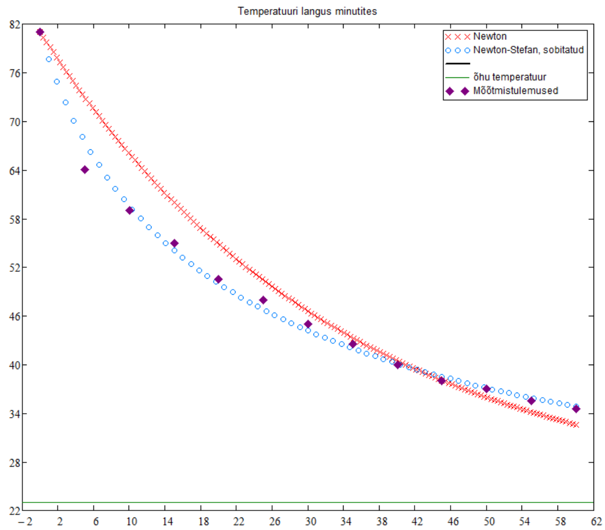
$$\beta = -\frac{T'(40)}{40 - 23} = \frac{1}{34} \approx 0.0294.$$

Põhimõtteliselt β peaks olema ajast ja temperatuurist sõltumatu konstant, aga on selge, et erinevatel põhjustel saaksime iga ajavahemiku jaoks erineva β väärtuse. Selliselt tuleks arvutada võimalikult palju β väärtusi ja näiteks võtta nendest keskmine. Antud juhul tuleb keskmiseks $\beta \approx 0.03$ (1/min) ja otsitavaks mudeliks

$$T'(t) = -0.03\Big[T(t) - 23\Big], \quad t \geq 0.$$

Temperatuuride mõõtmine ja aja määramine on väga tähtsad, antud graafiku järgi võib oletada, et mõõtmine võib olla ei ole päris täpne. Teisalt, kuuma vedeliku puhul toimub ka aurustumine ja intensiivsemalt just alguses. Toome lisaks Newton-Stefani sobitatud mudeli koos joonisega

$$T'(t) = -0.01\Big[T(t) - 23\Big] - 7.50 \cdot 10^{-8}\Big[T^4(t) - 23^4\Big], \quad t \geq 0.$$



Viited

[1] Y. A. Cengel. Introduction to Thermodynamics and Heat Transfer. USA, McGraw-Hill, 2008.

[2] C. Henssge, B. Madea. Estimation of the time since death in the early post-mortem period. Forensic Science International 144, 167-175, 2004.

[3] G. S. W. de Saram, G. Webster, N. Kathirgamatamby. Post-mortem temperature and the time of death. 46 J. Crim. L. Criminology & Police Sci. 562, 1955-1956.

[4] J. Sedlacek, Jiri Dolejsi. A physical description of coffee cooling in a pot.

[5] C. T. O'Sullivan. Newton's law of cooling - A critical assessment. Am. J. Phys. 58 (10), 1990.

[6] Table of total emissivity. http://www.monarchserver.com/TableofEmissivity.pdf

[7] M. Vollmer. Newton's law of cooling revisited. Eur. J. Phys. 30: 1063-1084, 2009.