

Epideemiate matemaatilisest modelleerimisest

Epideemia on kiire nakkushaiguse levik suurele hulgale inimestele lühikese aja jooksul.

Populatsioon (riigi, linna, ühe kooli, ettevõtte rahvastik) jagatakse rühmadeks (haigusele vastuvõtlikud, haigustekitajaga kokkupuutunud, haiged, haiglasolijad, terveksäänud, immuunsed). Kasutatakse erinevaid *klassijaotusi* ning uuritakse rühmade suuruse muutumist ajas.

Epideemiate modelleerimisel on mitu eesmärki:

- Mõista, kuidas epideemia levib.
- Ennustada, kui palju on mingil ajamomendil haigeid, kui palju on vaja haiglakohti ja intensiivravi kohti.
- Epideemia leviku kontrollimine (karantiin, vaksineerimine, avalike ürituste keelamine, koolide sulgemine, riigipiiride sulgemine jms.).

Kõige tuntum mudel on Kermacki ja McKendricku SIR mudel. Selle puhul jaotatakse kogu populatsioon, mille arvukus on N , kolme klassi:

- S - terved, haigusele vastuvõtlikud inimesed (**susceptible**).
- I - nakatunud, haiged (**infectious**)
- R - paranenud, immuunsed (**recovered**).

Kehtib võrdus: $N = S + I + R$, see tähendab, et kogu populatsioon on suletud, inimesi juurde ei sünni ega sure ka ära, inimesed liiguvad ühest alampopulatsioonist teise.

Sellise jaotusega mudeleid nimetatakse SIR mudeliteks.

Järgmiseks defineeritakse, kuidas toimub inimeste liikumine alampopulatsioonide vahel. Kui terve inimene haigestub, siis lihtsamate mudelite puhul liigub ta kõigepealt hulgast S hulka I . Mingi aja möödudes haiged tervenevad ja muutuvad immunseks ehk järgmine liikumine toimub hulgast I hulka R .

Leiame ühe terve inimese nakatumise tõenäosuse ajaühikus (päevas). Olgu populatsiooni terve liikme kontaktide arv päevas m . Tõenäosus, et kontakt on nakatunud, on $\frac{I}{N}$ ja tõenäosus, et terve inimene nakatunuga kohtudes nakatub, olgu p .

Tõenäosus, et terve inimene päeva jooksul nakatub, on siis

$$m \cdot \frac{I}{N} \cdot p.$$

Kordaja $\beta = mp$ väljendab seda, kui mitut inimest üks haige ühe päeva jooksul nakatab. Võtame kasutusele ka teise kordaja $\gamma > 0$, mis näitab terveksäämise kiirust. Olgu γ valitud nii, et $\frac{1}{\gamma}$ on keskmine haige oldud päevade arv.

Seega üks haige inimene nakatab keskmiselt $r = \frac{\beta}{\gamma}$ inimest.

$$\text{Kui } \frac{S}{N} > \frac{\gamma}{\beta} \text{ siis } I \text{ kasvab; Kui } \frac{S}{N} < \frac{\gamma}{\beta} \text{ siis } I \text{ kahaneb.}$$

Lihtsat SIR mudelit saab skemaatiliselt esitada nii:

$$S \xrightarrow{\beta \cdot I/N} I \xrightarrow{\gamma} R.$$

Suurus $\beta \cdot I/N$ näitab, kui suur osa tervetest satub päeva jooksul haigete hulka ja suurus γ näitab, kui suur osa haigetest satub päeva jooksul immuunsete hulka.

Meid huvitavad alampopulatsioonide S , I ja R muutumise kiirused, ehk nende tuletised aja järgi:

$$\begin{cases} S' = -\beta S \frac{I}{N}, \\ I' = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I, \\ R' = \gamma I. \end{cases}$$

Siin $S = S(t)$, $I = I(t)$ ja $R = R(t)$ on funktsioonid, mis sõltuvad ajast.

Saadud võrrandid saab kirja panna diferentsiaalvõrrandite süsteemiga:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S \frac{I}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases}$$

Kirjutame ümber selle süsteemi diskreetsele kujule. Siis olgu $S_t = S(t)$, $I_t = I(t)$ ja $R_t = R(t)$. Kuna diferentsiaalid on ligikaudu võrdsed muutudega, siis asendame dS , dI , dR ja dt vastavalt suurustega ΔS , ΔI , ΔR ja Δt -ga ning korrutame need võrrandid läbi Δt -ga:

$$\begin{cases} \Delta S = -\beta S_t \frac{I_t}{N} \Delta t, \\ \Delta I = \left(\beta S_t \frac{I_t}{N} - \gamma I_t \right) \Delta t, \\ \Delta R = \gamma I_t \Delta t. \end{cases}$$

Asendame $\Delta S = S_{t+1} - S_t$, $\Delta I = I_{t+1} - I_t$, $\Delta R = R_{t+1} - R_t$ ja $\Delta t = (t+1) - t = 1$,

$$\begin{cases} S_{t+1} - S_t = -\beta S_t \frac{I_t}{N}, \\ I_{t+1} - I_t = \beta S_t \frac{I_t}{N} - \gamma I_t, \\ R_{t+1} - R_t = \gamma I_t. \end{cases}$$

Viime suurused S_t , I_t ja R_t paremale poolele ja saame SIR mudeli diskreetsel kujul:

$$\begin{cases} S_{t+1} = S_t - \beta S_t \frac{I_t}{N}, \\ I_{t+1} = I_t + \beta S_t \frac{I_t}{N} - \gamma I_t, \\ R_{t+1} = R_t + \gamma I_t. \end{cases}$$

Andes ette suuruste S_t , I_t ja R_t väärtused alghetkel S_0 , I_0 ja R_0 ning suurused β ja γ , saame Exceli, GeoGebra või mõne muu tabelarvutussüsteemi abil sammhaaval arvutada välja, kui palju on terveid, haigestunuid ja immuunseid igal ajahetkel.

Vaktsineerimise peamine eesmärk takistada haiguse levikut, Kui $r < 1$, siis haiguse levik pidurdub.

Suurusi β ja γ me vaktsineerides muuta ei saa, aga me saame vähendada vaktsineerimisel teel nakatumisvõimeliste isikute arvu ja nii viisi tõenäosust, et nakatatud inimene kohtub nakatumisvõimelise isikuga. Olgu S_0 nakatumisvõimeliste isikute arv mingil alghetkel. Vähendame seda arvu nüüd mingi vaktsineeritud isikute arvu V_0 võrra. Seega jääb meil järele nakatumisvõimelisi isikuid $S_0 - V_0$. Vaktsineeritute protsent on aga

$$v = \frac{V_0}{S_0}.$$

Saab näidata, et selleks, et viirus ei leviks, peab kehtima võrratus: $v > 1 - \frac{1}{r}$.

Kui näiteks $r = 2$, siis tuleks viiruse pidurdamiseks vaktsineerida ära vähemalt pooled nakatumisvõimelistest, kui $r = 3$, siis vähemalt $2/3$ nakatumisvõimelistest, kui $r = 2.5$, siis 60 % nakatumisvõimelistest.