GRAAFILINE LINAARPLANEERIMINE

1. SISSEJUHATUS

Matemaatikateadmised võimaldavad lahendada paljusid igapäevaeluga seotud ülesandeid. Nende ülesannete ühiseks omaduseks on tavaliselt üheainsa lahendi olemasolu. Kuid sageli tuleb lahendada ka selliseid ülesandeid, millel on palju erinevaid lahendeid. Vahel võib lahendeid olla ka lõpmatu hulk.

Kui kavatseme jõuda suurlinna ühest servast teise, siis on meil palju võimalusi. Võib kasutada trammi, busse, trolle, sõita marsruuttaksoga või minna jalgsi. On vaja otsustada, kuidas sõita, kus ümber istuda jne. Otsus sõltub sellest, kas me tahame jõuda kohale võimalikult kiiresti või hoopis võimalikult odavalt või hoopis tahame jõuda kohale nii, et oleks võimalikult vähe ümberistumisi. Parima lahenduse leidmine ei ole sugugi lihtne. Tuleb arvestada *lisatingimusi*, mida me sellelt lahenduselt ootame. Kõigi lahendite hulgas leidub tavaliselt üks või mitu sellist lahendit, mis mingit täiendavalt püstitatud lisatingimust (näiteks odavust) kõige paremini rahuldab. Sellist lahendit nimetatakse ***optimaalseks lahendiks***.

Optimaalseid lahendeid otsitakse paljudes situatsioonides. Näiteks:

1. Kuidas korraldada tehases tootmist nii, et kasum oleks suurim?
2. Kuidas peab juurdelõikaja märkima kangale lõiked, et jäägid oleksid vähimad?
3. Kuidas koostada nädala menüüd nii, et toit oleks tervislik ja odav?
4. Kuidas koostada koolis tunniplaani?
5. Kuidas katta mingi maakoht bussiliinidega?
6. Ühtede ja samade algkomponentide baasil on keemiakombinaat võimeline tootma mitmeid erinevaid aineid. On teada algkomponentide hinnad ja erinevate lõpp-produktide hinnad. Kulutused tööjõule on samuti teada. Mida on kasulikum toota?
7. Kuidas valida erinevate automarkide vahel ostjale kõige sobivamat?
8. Orienteeruja peab läbima metsas olevad kontrollpunktid, mille asukohad ja omavahelised kaugused on teada. Kontrollpunktide läbimise järjekord ei ole tähtis. Millise marsruudi peab valima orienteeruja, et läbitava trassi pikkus oleks minimaalne?

Kõik need on küsimused, kus tuleb valida paljude erinevate võimaluste hulgast optimaalne, s.o. kõige parem, kõige ökonoomsem lahend. Teadust, mis tegeleb optimaalsete lahendite otsimisega ja kasutab selleks matemaatilisi meetodeid nimetatakse **operatsioonianalüüsiks**. Operatsioonianalüüs tekkis Teise maailmasõja päevil sõjalistel vajadustel. Pärast sõja lõppu hakati operatsioonianalüüsi meetodeid rakendama majanduses, transpordis, tootmise juhtimises, kaubanduses ja mitmel pool mujal. Operatsioonianalüüsi abil töötatakse välja parimate lahenduste leidmise viisid, operatsioonianalüüs aitab otsustada.

Operatsioonianalüüsi alla kuulub ka matemaatiline planeerimine, mille üheks lihtsamaks osaks on **lineaarne planeerimine**.

Järgnevas tutvume lineaarse planeerimise mõnede lihtsamate ülesannetega.

Näide: Tisleritöökoda teeb kirjutuslaudu ja puhvetikappe. Puhvetikapi valmistamiseks kulub 0,3 m^3 puitu, 0,8 m^2 klaasi ja 6 tundi tisleri tööaega. Kirjutuslaua valmistamiseks kulub 0,25 m^3 puitu ja 10 tundi tisleri tööaega. Töökojas on ühe kuu varu puitu — 30 m^3 ja ühe kuu varu klaasi — 60 m^2. Selles kuus võib arvestada 900 tisleritöö tunniga. Ühe puhvetikapi eest teenib tisleritöökoda 300$, ühe kirjutuslaua eest 400$. Kui palju puhvetikappe ja kirjutuslaudu tuleks valmistada, et töökoja tulud oleksid maksimaalsed?

Koondame ülesande andmed tabelisse, tähistades otsitavad tähtedega x ja y (ilmselt $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$).

Tooted	Valmistada (tk.)	Puidu kulu (m^3)	Klaasi kulu (m^2)	Tööaeg (h)	Tulu ($)
Puhvetikapp	x	0,3	0,8	6	300
Kirjutuslaud	y	0,25	—	10	400
Varud		30	60	900	

Tootmist piiravad varud. Esitame need kitsendused matemaatiliselt. Kui toota x puhvetikappi ja y kirjutuslauda, siis kulub puitu $0{,}3x + 0{,}25y$. See kulu ei saa olla suurem varudest, seega

$$0{,}3x + 0{,}25y \leqslant 30.$$

Ka klaasi ei saa kulutada rohkem, kui seda on, seega

$$0{,}8x \leqslant 60.$$

Toota ei saa rohkem, kui tislerid jõuavad antud aja piires tööd teha, seega

$$6x + 10y \leqslant 900.$$

Et need kitsendused kehtivad üheaegselt, siis võime vaadelda neid süsteemina

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}25y \leqslant 30 \\ 0{,}8x \leqslant 60 \\ 6x + 10y \leqslant 900. \end{cases}$$

Tootmisest saadakse tulu $300x + 400y$ $, mille tähistame c-ga:

$$c = 300x + 400y.$$

Nüüd oleme taandanud majandusliku planeerimisülesande matemaatiliseks. Sõnastame selle:

Leia lineaarvõrratuste süsteemi

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}25y \leqslant 30 \\ 0{,}8x \leqslant 60 \\ 6x + 10y \leqslant 900, \end{cases}$$

kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$, lahendite hulgast selline, mis annab suurima väärtuse avaldisele $c = 300x + 400y$.

See matemaatikaülesanne on eespool sõnastatud tootmise planeerimisülesande ***matemaatiline mudel***. Miks kasutatakse matemaatilisi mudeleid?

Esiteks, matemaatilise mudeli abil on lihtsam leida optimaalset tegevusviisi kui ilma matemaatilise mudelita. Matemaatiline mudel aitab välja tuua peamise antud ülesandes, vältida üleliigset informatsiooni.

Teiseks, matemaatilise mudeli abil „katsetamine” on suhteliselt odav ja kiire. Katse ja eksituse meetodil praktikas proovimine (ühes kuus toodame näiteks 20 kirjutuslauda ja70 puhvetikappi, teises 40 kirjutuslauda ja 60 puhvetikappi) on aeganõudev ja ka majanduslikult kahjumittoov. Seega on mõistlik seal, kus võimalik, kasutada praktiliste katsetuste asemel matemaatilisi mudeleid. Suurtes matemaatilistes mudelites kasutatakse sadu võrrandeid ja võrratusi.

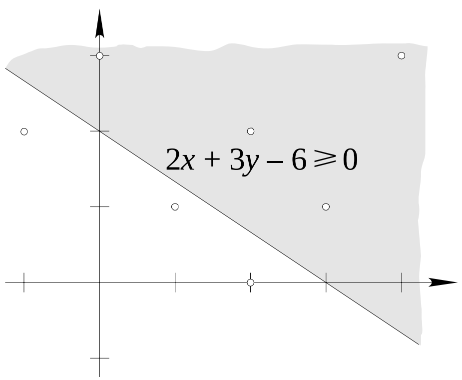
Selle ja analoogiliste ülesannete lahendamiseks peab oskama lahendada lineaarvõrratuste süsteeme ja teadma, kuidas leida süsteemi lahendite hulgast maksimumi (või miinimumi) andvat lahendit.

2. KAHE MUUTUJAGA LINEAARVÕRRATUS. SELLE GRAAFILINE LAHENDAMINE

Seost $ax + by + c \geqslant 0$ (või $ax + by + c \leqslant 0$), milles a, b ja c on reaalarvud, nimetatakse **kahe muutujaga lineaarvõrratuseks**. Tema lahenditeks on muutujate x ja y väärtuste sellised paarid, mille korral võrratus kehtib. Võrratuse *graafiliseks* lahendamiseks selgitame kõigepealt, kuidas sellist võrratust geomeetriliselt ette kujutada.

Vaatleme näiteks võrratust

$2x + 3y - 6 \geqslant 0.$



Sirge $2x + 3y - 6 = 0$ jaotab tasandi kaheks **pooltasandiks**, kusjuures seda sirget nimetatakse pooltasandite **rajasirgeks**. Tekkinud pooltasandeid võib nimetada tinglikult „ülemiseks” ja „alumiseks” (või „parempoolseks” ja „vasakpoolseks”). Võtame mõlemal pooltasandil mõned punktid, näiteks nn. „ülemisel” pooltasandil punktid (0; 3), (2; 2), (4; 3) ja (3; 1); „alumisel” pooltasandil võtame punktid (0; 0), (– 1; 2), (1; 1), (2; 0) ja (3; – 1).

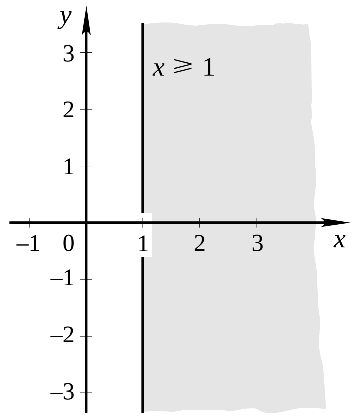
Asendades nende punktide koordinaadid võrratusse $2x + 3y - 6 \geqslant 0$, saame ülemise pooltasandi punktide korral tõese võrratuse, alumise pooltasandi punktide korral aga väära võrratuse.

Saadud tulemus kehtib ka üldisemalt, nimelt:

Võrratuse $ax + by + c \geqslant 0$ (või $ax + by + c \leqslant 0$) lahenditeks on ühe pooltasandi punktide koordinaadid. Pooltasandi rajasirge $ax + by + c = 0$ kuulub ka võrratuse lahendite hulka.

Võrratuse $ax + by + c \geqslant 0$ (või $ax + by + c \leqslant 0$) graafiliseks lahendamiseks joonestame sirge $ax + by + c = 0$, mis eraldab kahte pooltasandit. Lahendite pooltasandi leidmiseks valime ühel pooltasandil väljaspool rajasirget mingi punkti $P(x_0; y_0)$ ja kontrollime, kas selle punkti koordinaadid rahuldavad võrratust. Kui jah, siis on lahendite pooltasandiks see pooltasand, millelt valisime punkti P. Kui ei, siis on lahendite pooltasandiks see pooltasand, millel punkt P ei asu. Sagedasti võetakse kontrollitavaks punktiks koordinaatide alguspunkt. Kui me teame lahendite pooltasandit, siis tähistame selle rajasirgest algava viirutusega.

Näide 1. Lahendame võrratuse $x \geqslant 1$.



Kui seda võrratust vaadelda ühe tundmatuga võrratusena, siis saame me võrratuse lahendihulgaks piirkonna x-teljel (sirgel) $L = [1; \infty[$. Nüüd lahendame selle võrratuse kahe tundmatuga võrratusena. Sel juhul saame lahendihulgaks piirkonna tasandil. Et y suhtes pole antud mingit kitsendavat tingimust, siis kehtib võrratus iga y puhul, mille korral $x \geqslant 1$. Järelikult on lahendite pooltasandiks piirkond, mis jääb sirgest $x = 1$ paremale.

Näide 2. Lahendame võrratuse

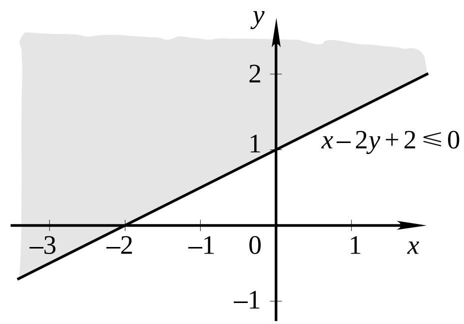
$x - 2y + 2 \leqslant 0.$

Joonestame sirge $x - 2y + 2 = 0$. Et punkt $O(0; 0)$ võrratust ei rahulda, sest

$0 - 2{\cdot}0 + 2 > 0,$

siis on lahendite pooltasand ülemine.

x	0	–2
y	1	0



1325. Lahenda järgmised võrratused graafiliselt.

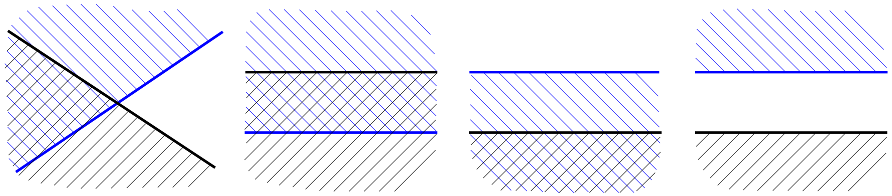
a) $y \leqslant 0$ b) $x + y - 1 \leqslant 0$ c) $2x + y - 2 \geqslant 0$ d) $2x - 3y \geqslant -6$
e) $x + 2y \geqslant 0$ f) $5y + 15 \geqslant 0$ g) $3x + 4y - 12 \geqslant 0$ h) $36x + 50y + 900 \geqslant 0$

3. KAHE MUUTUJAGA VÕRRATUSESÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE

Sissejuhatuses toodud tisleritöökoja näites saime kahe muutujaga võrratusesüsteemi. Kuidas selliseid võrratusesüsteeme lahendada?

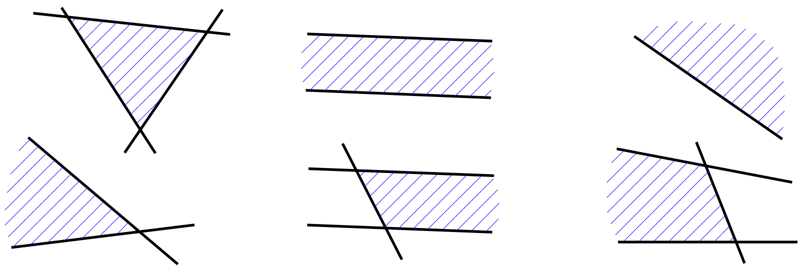
Võrratusesüsteemi lahendiks on selliste arvude hulk, mis rahuldab samaaegselt süsteemi iga võrratust. Järelikult koosneb süsteemi lahendite hulk süsteemi *kõikide võrratuste ühiste lahendite* hulgast. Kui lahendame võrratusesüsteemi, peame leidma kõigi võrratuste lahendihulgad ja seejärel nende hulkade ühisosa.

Kahest võrratusest koosneva süsteemi lahendamisel võib esineda kokku 4 võimalust. Esitame need joonisel.



Piirkond, milles olevad punktid rahuldavad ühte võrratust kahest, on ühekordse viirutusega. Piirkond, milles olevad punktid ei ole kummagi võrratuse lahendid, on viirutamata. Piirkond, mille punktid on süsteemi lahendid, on viirutatud kahekordselt. Kahest võrratusest koosneva süsteemi lahendihulgaks võib olla nurk, riba, pooltasand või tühi hulk. Viimasel juhul on võrratused *vastuolulised*. Kolmandal juhul on üks võrratus *liigne*.

Kui meil on rohkem võrratusi, siis leitakse süsteemi lahendeid samal viisil kui kahe võrratusega võrratusesüsteemi korral. Lahendihulga kuju võib olla aga keerulisem. Näiteks, kolmest lineaarvõrratusest koosneva süsteemi lahendihulk võib moodustada järgmisi kujundeid:



Edaspidi nimetame süsteemi lahendite hulga poolt moodustatud kujundit (nii lõplikku kui ka lõpmatut) *lahendite piirkonnaks*.

Vaatleme neid lahendite piirkondi. Võttes suvalisest piirkonnast kaks vabalt valitud punkti, saame need punktid ühendada sirglõiguga, mis tervikuna kuulub samasse piirkonda. Kõiki selliseid piirkondi nimetatakse *kumerateks* piirkondadeks.

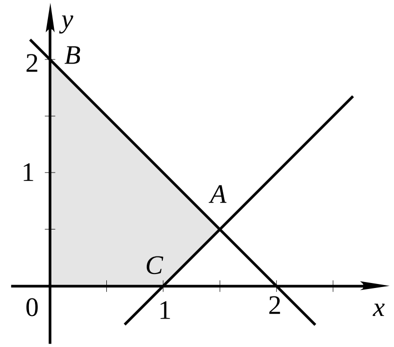
Punktihulka nimetatakse **kumeraks hulgaks**, kui selle hulga iga kahte punkti saab ühendada sirglõiguga, mis tervenisti kuulub samasse hulka. Kumerad hulgad on näiteks ring, pooltasand, kolmnurk. Ruumilistest kehadest püramiid, kera, korrapärane prisma. Kumerad hulgad ei ole näiteks rõngas, tähtviisnurk, 180° suurema kesknurgaga sektor jmt. Saab näidata, et iga kahe tundmatuga lineaarvõrratusesüsteemi lahendihulk on kumer.

Näide 1. Lahendame võrratusesüsteemi

$\begin{cases} x + y \leqslant 2 \\ x - y \leqslant 1 \end{cases}$, kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$. Leiame lahendite piirkonna tipud.

Sisuliselt koosneb see võrratusesüsteem neljast võrratusest. Võrratustest $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$ järeldub, et lahendite piirkond paikneb ainult I veerandis ja x-telje ning y-telje mittenegatiivsel osal. Joonestame sirged $x + y = 2$ ja $x - y = 1$.

$x + y = 2$ $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$ ja $x - y = 1$ $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$



Need sirged lõikuvad punktis $A(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$.

Leiame võrratusesüsteemi lahendite piirkonna I veerandis. See on nelinurk *ABOC*. Selle nelinurga ülejäänud tipud on $B(0; 2)$, $O(0; 0)$ ja $C(1; 0)$.

1326. Leia xy-tasapinnal see piirkond, mille iga punkti koordinaadid rahuldaksid antud tingimusi.

a) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \leqslant -x + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \geqslant 2x - 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x - y - 1 \leqslant 0 \\ 3x + y - 11 \leqslant 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \leqslant 2x + 4 \\ 10x + y + 10 \geqslant 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + 2y - 8 \leqslant 0 \\ 3x + 2y - 12 \leqslant 0 \end{cases}$

1327. Lahenda graafiliselt järgmised võrrandisüsteemid, kui $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$. Leia lahendite piirkonna tipud.

a) $\begin{cases} x+y-5 \geqslant 0 \\ x+3y-18 \leqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y-300 \leqslant 0 \\ 5x+3y-750 \geqslant 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+4y-4 \geqslant 0 \\ 2x+3y-6 \geqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y-5 \geqslant 0 \\ y \leqslant 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-2y-2 \leqslant 0 \\ x+2y-6 \leqslant 0 \\ x+y-5 \leqslant 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y-10 \leqslant 0 \\ x-y-4 \leqslant 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-3y+13 \leqslant 0 \\ x+y-6 \leqslant 0 \\ 4x-y-19 \geqslant 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x-3y+6 \geqslant 0 \\ 3x-2y-18 \leqslant 0 \\ 2x+5y-20 \leqslant 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 3x+y-8 \geqslant 0 \\ x+2y-6 \geqslant 0 \\ x-y-3 \leqslant 0 \end{cases}$

4. GRAAFILINE LINEAARPLANEERIMINE

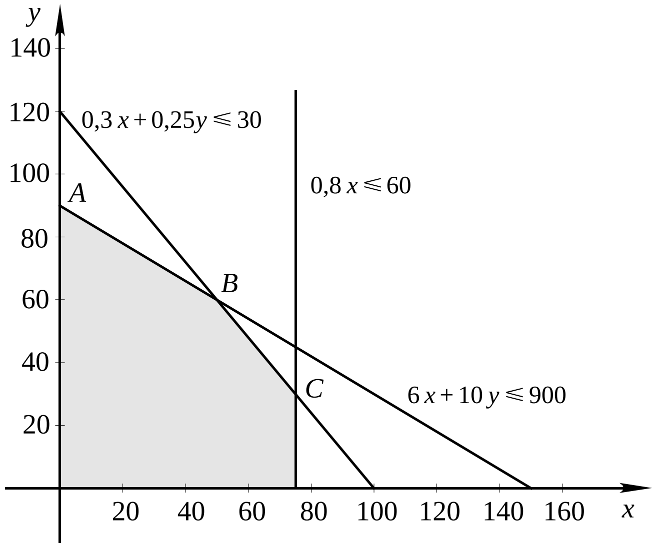
Vaatleme kõigepealt sissejuhatuses toodud näidet tisleritöökoja kohta. Majanduslik planeerimisülesanne taandus järgmisele matemaatilisele ülesandele:

Leia lineaarvõrratuste süsteemi

$$\begin{cases} 0{,}3x+0{,}25y \leqslant 30 \\ 0{,}8x \leqslant 60 \\ 6x+10y \leqslant 900, \end{cases}$$

kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$, lahendite hulgast selline, mis annab suurima väärtuse avaldisele $c = 300x + 400y$.

Leiame graafiliselt selle võrratusesüsteemi lahendite piirkonna:



Nüüd tuleb leida, millise x ja y korral saadud piirkonnast on avaldise $c = 300x + 400y$ väärtus suurim.

Teame, et $ax + by = c$ kujutab endast sirge võrrandit.
Avaldame sellest võrrandist y:

$by = -ax + c$,

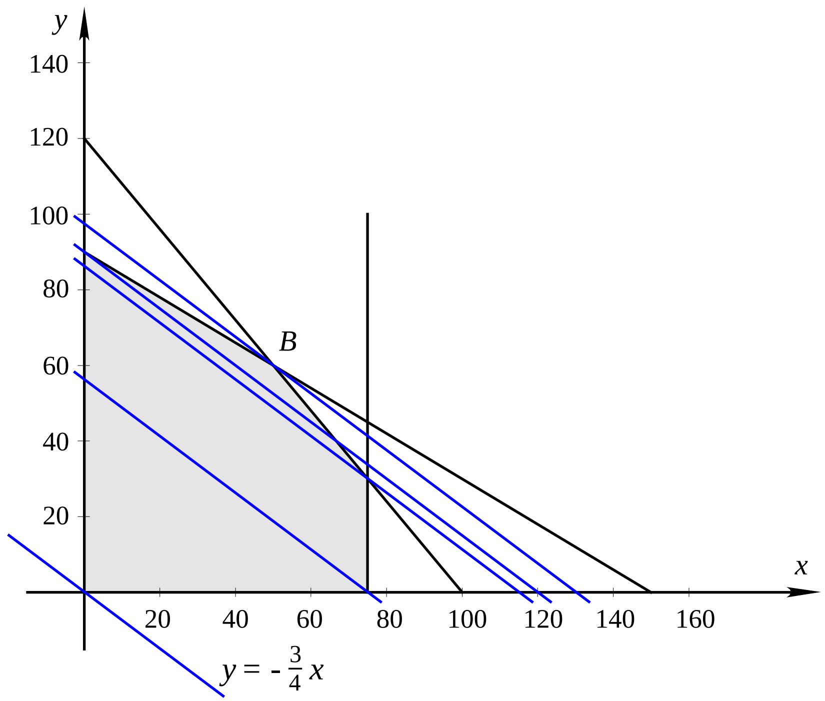
$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Võtame $c = 0$, saame sirge $y = -\frac{a}{b}x$. Joonestame selle sirge läbi lahendite piirkonna.

Meie näite korral $y = -\frac{300}{400}x = -\frac{3}{4}x$.

Seejärel joonestame läbi lahendite piirkonna kõigi tippude antud sirgega paralleelsed sirged. Avaldise $c = 300x + 400y$ väärtus on maksimaalne selles punktis, mida läbiva sirge algordinaat on suurim. Lihtne on veenduda, et selliseks punktiks on $B(50; 60)$.

Selles punktis $c = 300x + 400y = 300 \cdot 50 + 400 \cdot 60 = 39\ 000$.



Avaldist, mille maksimumi (või miinimumi) me lahendite piirkonnas otsime, nimetatakse **sihifunktsiooniks**. Antud ülesandes oli sihifunktsiooniks müügihind $c = 300x + 400y$. Meie otsisime x ja y väärtusi, mille korral sihifunktsioon oleks maksimaalne. Lahendit, mille korral sihifunktsioon on maksimaalne (teatud ülesannete korral minimaalne), nimetatakse ***optimaalseks lahendiks***.

Seega optimaalne lahend on (50; 60). Võime öelda, et antud materjalist on tisleritöökojal mõistlik teha 50 puhvetikappi ja 60 kirjutuslauda.

Näide. Väike keemiatehas „Smell" toodab kahte liiki värve: sisetöödeks (S) ja välistöödeks (V). Mõlemad värvid segatakse kokku kahest lähteainest *A* ja *B*. Ööpäevas võib tuua lattu 7 t komponenti *A* ja 8 t komponenti *B*. Sisetööde värv koosneb ühest osast *A*-st ja kahest osast *B*-st. Välistööde värv koosneb kahest osast *A*-st ja ühest osast *B*-st. Tonni sisetööde värvi müügi pealt saab tehas 2000$ kasumit. Tonn välistööde värvi annab 4000$ kasumit. On teada, et välistööde värvi ei osteta kunagi sisetööde värvist päevas üle 2 tonni rohkem. Kui palju tuleks toota sisetööde värvi ja kui palju välistööde värvi, et kogukasum oleks suurim? Esitame osa ülesande tingimustest tabelina.

Lähteaine	Lähteaine kulu		Lähteaine varud (t)
	Värv S	Värv V	
A	1	2	7
B	2	1	8
Kasum 1 t värvi tootmisel	2000 $	4000 $	

Kui sisetööde värvi toota *x* tonni päevas ja välistööde värvi *y* tonni päevas, siis peavad kehtima võrratused:

$$\begin{cases} x+2y\le 7 \\ 2x+y\le 8. \end{cases}$$

Et välistööde värvi ei osteta kunagi päevas üle kahe tonni sisetööde värvist rohkem, siis kehtib ka võrratus

$$y-x\leqslant 2$$

Toodang annab kasumit $2000x + 4000y$ \$.

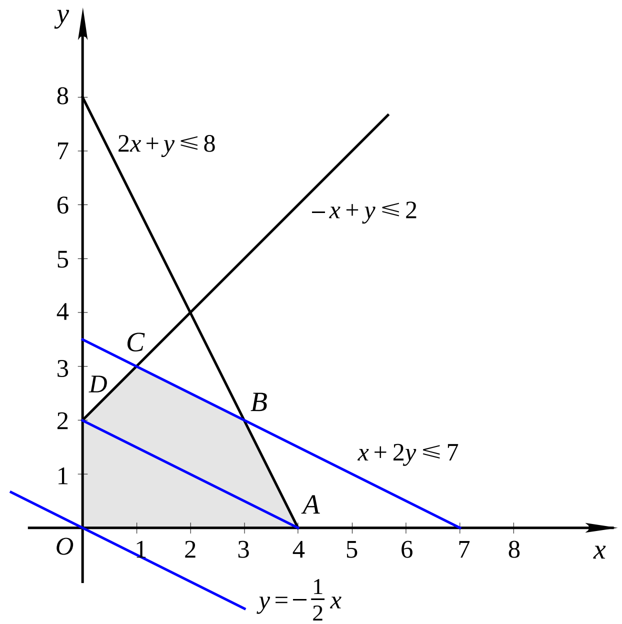
Seega peame leidma lineaarvõrratuste süsteemi

$$\begin{cases} x+2y\le 7 \\ 2x+y\le 8 \\ -x+y\le 2, \end{cases}$$

kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$, lahendite hulgast sellise arvupaari, mille korral avaldisel $c = 2000x + 4000y$ on maksimaalne väärtus.

Joonestades lahendite piirkonna, saame järgmisel leheküljel toodud joonise.

Nüüd leiame lahendite piirkonnas sellise punkti, kus avaldisel $c = 2000x + 4000y$ oleks maksimaalne väärtus. Võttes $c = 0$, saame sirge $y = -\frac{1}{2}x$ võrrandi. Kanname joonisele selle sirge ja läbi punktide *A*, *B*, *C* ja *D* temaga paralleelsed sirged. Kõige suurem algordinaat on sirgel, mis läbib *kahte tippu*, punkte *B*(3; 2) ja *C*(1; 3).



Leiame sihifunktsiooni väärtused neis punktides:

$c_1 = 2000 \cdot 3 + 4000 \cdot 2 = 14\,000$ \$ ja

$c_2 = 2000 \cdot 1 + 4000 \cdot 3 = 14\,000$ \$.

Sihifunktsiooni väärtused neis punktides on võrdsed. Seega, kui tehas toodab sisetööde värvi 3 t ja välistööde värvi 2 t, siis saadakse niisama palju kasumit kui siis, kui toodetakse sisetööde värvi 1 t, aga välistööde värvi 3 t.

Leia iseseisvalt sihifunktsiooni väärtused punktide *A*, *D* ja *O* korral, samuti mõne piirkonna sisepunkti (näiteks (2; 2)) korral. Kontrolliks: kõik need tulemused peaksid olema alla 14 000 $.

Võttes mõne muu punkti lõigult *BC* saame ikka sihifunktsiooni väärtuseks 14 000 $. (Näiteks punkti (2; 2,5) korral $c = 2000 \cdot 2 + 2{,}5 \cdot 4000 = 14\,000$ \$.) Seega, antud ülesandel on üle ühe lahendi.

Saab näidata, et kui lineaarplaneerimisülesande lahendihulk eksisteerib ja on otsitavas suunas *tõkestatud* (ei moodusta lõpmatusse ulatuvat piirkonda), siis on planeerimisülesanne lahenduv ja optimaalsete lahendite arvu kohta võib öelda järgmist:

a) kui sihifunktsiooniga määratud sirged ei ole paralleelsed piirkonna ühegi rajajoone lõiguga, siis on ainult üks optimaalne lahend;

b) kui sihifunktsiooniga määratud sirged on paralleelsed piirkonna optimaalset tippu läbiva lõiguga, siis on lahendeid lõpmata palju ja lahenditeks sobivad kõik selle rajajoone lõigu punktid.

Keemiatehase näites on piirkonna üheks rajasirgeks $x + 2y = 7$. See sirge on paralleelne sirgega $y = -\frac{1}{2}x$.

Seega saab keemiatehas maksimaalse kasumi 14 000 $, kui toodetavad sisetööde ja välistööde värvi kogused x ja y on seotud võrdusega $x + 2y = 7$ ja võrratusega $1 \leqslant x \leqslant 3$. (Need kaks tingimust koos annavad meile lõigu BC punktid.)

Kuidas peaks toimima tehase direktor, kui tal on valida lõpmatu hulga optimaalsete variantide hulgast? Kas valima juhuslikult ühe punkti sellest lõigust? Ei, sugugi mitte.

Kogenud tehasedirektor mõistab kohe, et see mudel, mille meie koostasime, ei ole küllalt põhjalik, sest see mudel arvestab ainult värvi müügist saadavat tulu. Tootmises on aga palju muid piiravaid tingimusi: erinev tööviljakus erinevate toodete valmistamisel, kulutused töötasule, kuidas toota nii, et tooraine kulu oleks vähim jne.

Kui direktor seab eesmärgiks toota nii, et komponente A ja B jääks võimalikult palju järele, siis ta näeb, et kui toota 3 t sisetööde värvi ja 2 t välistööde värvi, siis kulutame me ära kogu lähtetooraine hulga:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8. \end{cases}$$

Kui aga toota 1 t sisetööde värvi ja 3 t välistööde värvi, siis jääb 3 t lähteainet B üle:

$$\begin{cases} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5 < 8. \end{cases}$$

Saab näidata, et sellise lahenduse korral (1 t sisetöödeks ja 3 t välistöödeks) on lähteainete ülejääk suurim. Seega — seni kuni turg ei ole „üle küllastatud” välistööde värvist ja nõudlus püsib, on kasulik toota 1 t sisetööde värvi ja 3 t välistööde värvi päevas.

Planeerimisülesande lahendite piirkond võib olla ka tõkestamata hulk ning vahel on vaja leida ka sihifunktsiooni minimaalset väärtust.

Näide: Broileritibu vajab iga päev vähemalt 15 ühikut vitamiini B_1 ja vähemalt 15 ühikut vitamiini B_2. Ta saab neid segudest H ja K. Segu H 1 g sisaldab 1 ühiku B_1, 5 ühikut B_2 ja maksab 1 sent. Segu K 1 g sisaldab 5 ühikut B_1, 1 ühiku B_2 ja maksab 3 senti. Koostame päevase toiduratsiooni segudest H ja K nii, et broileri vitamiinivajadus oleks rahuldatud ja kulutused oleksid minimaalsed.

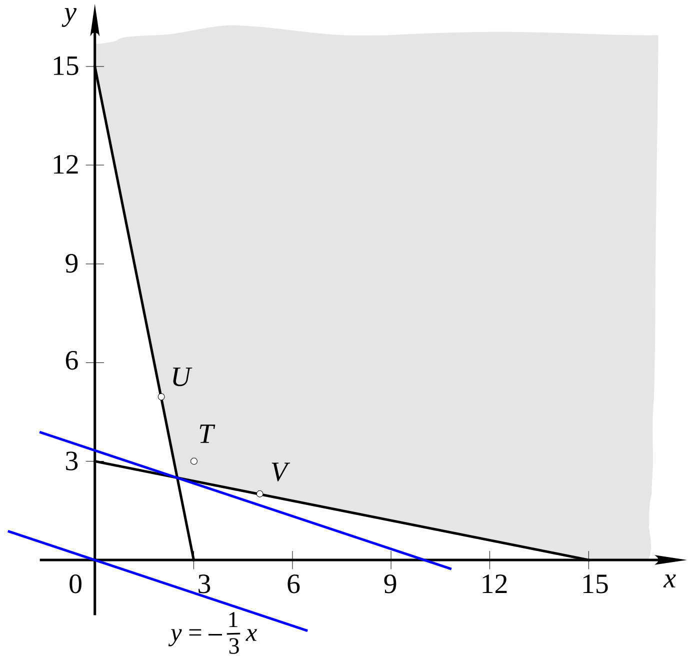
Tähistame otsitavad ainehulgad x ja y-ga (loomulik on, et $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$). Ülesande tingimused märgime tabelisse:

Segu	B1	B2	Hind (sentides)	Kasutame (g)
H	1	5	1	x
K	5	1	3	y
Vajadus	15	15	min	

Vitamiinivajaduse rahuldamiseks peab kehtima võrratusesüsteem

$$\begin{cases} x + 5y \geq 15 \\ 5x + y \geq 15. \end{cases}$$

Selleks, et kulud oleksid vähimad, leiame selle võrratusesüsteemi need lahendid, mille korral avaldise $c = x + 3y$ väärtus oleks vähim.



Süsteemi lahendite hulk on tõkestamata hulk, sest pole määratud vajaliku vitamiinikoguse ülemmäära.

Kulud $x + 3y$ on minimaalsed punktis $S(2{,}5;\ 2{,}5)$. Siis on kulutused ühele broileritibule $c = 1 \cdot 2{,}5 + 3 \cdot 2{,}5 = 10$ senti.

Seega, broiler peab saama mõlemat segu 2,5 g. Ülesanne on lahendatud, kui segusid saab eraldada poolegrammise täpsusega.

Aga mida teha siis, kui segud H ja K on ühegrammistes graanulites, mida poolitama ei ole mõtet hakata? Siis tuleb see planeerimisülesanne *lahendada täisarvudes*. Seega peame leidma lahendihulgast sellised täisarvud x ja y, mille korral $c = x + 3y$ on vähim.

Leiame punkti $S(2{,}5;\ 2{,}5)$ ümbrusest veel selliseid punkte, mille koordinaadid on täisarvud ja mis kuuluvad lahendite piirkonda. Need punktid on $T(3;\ 3)$, $U(2;\ 5)$ ja $V(5;\ 2)$. Leiame avaldise $x + 3y$ väärtuse neis punktides:

punktis T: $c = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 12$, punktis U: $c = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 17$,
punktis V: $c = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 11$.

Joonestame sirgega $x + 3y = 0$ paralleelseid sirgeid läbi nende punktide. Näeme, et algordinaat on vähim sellel sirgel, mis läbib punkti (5; 2). Seega, juhul, kui segud on antud ühegrammistes graanulites, on mõistlik anda broilerile 5 grammi segu H ja 2 grammi segu K.

Üheks tuntud lineaarplaneerimise ülesande tüübiks on nn. *transpordiülesanne*. Järgmine näide ongi üks tüüpiline transpordiülesanne.

Näide: Tammesalu ja Viljaanni jahuveskid jahvatavad 250 ja 350 tonni jahu kuus. Neist veskitest veetakse jahu kolme leivatehasesse. Rukkivere tehas vajab 150 tonni, Ahjusaare tehas 240 tonni ja Leivamäe tehas 210 tonni jahu kuus. Kuidas korraldada jahu vedu veskitest nii, et kõik tehased saaksid oma koguse jahu kätte ja veokulud oleksid minimaalsed? Kaugused veskite ja tehaste vahel on järgnevas tabelis olevate arvude kordsed.

	Rukkivere	Ahjusaare	Leivamäe
Tammesalu	4	3	5
Viljaanni	5	6	4

Veetagu Tammesalust Rukkiverre x tonni ja Ahjusaarde y tonni jahu. Et Rukkivere vajab 150 t, siis Viljaannilt peab ta saama $(150 – x)$ t jahu. Et Ahjusaare vajab 240 tonni, siis Viljaannilt peab ta saama veel juurde $(240 – y)$ tonni jahu. Et Tammesalu suudab toota 250 tonni jahu kuus ja Rukkiverre ning Ahjusaarde kokku veetakse sellest $x + y$ tonni, siis Tammesalust veetakse Leivamäele
$(250 – x – y)$ t jahu. Ülejäänud $210 – (250 – x – y) = x + y – 40$ tonni saab Leivamäe Viljaannilt.

Seega näeks vedude plaan välja nii:

	Rukkivere	Ahjusaare	Leivamäe
Tammesalu	x	y	$250 – x – y$
Viljaanni	$150 – x$	$240 – y$	$x + y – 40$

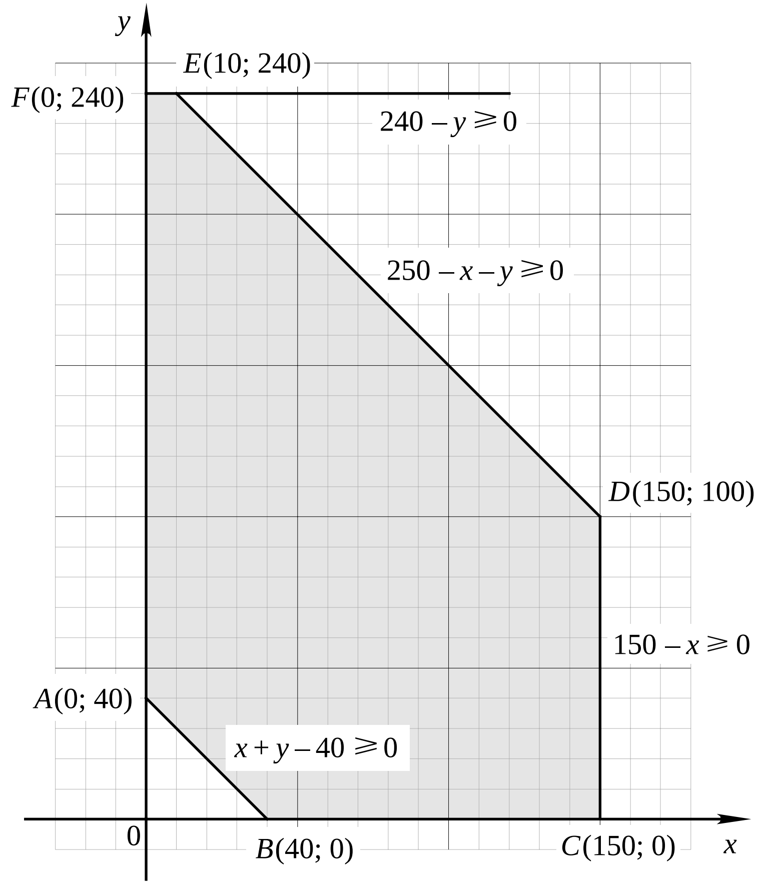
Et leida vedude kogumaksumust, selleks tuleb korrutada selles tabelis olevad arvud eelmises tabelis olevate vastavate arvudega ja tulemused liita. Saame avaldise

$$c = 4x + 3y + 5(250 – x – y) + 5(150 – x) + 6(240 – y) + 4(x + y – 40) =$$
$$= – 2x – 4y + 3280.$$

Selle avaldise minimaalseid väärtusi otsime lahendite piirkonnast. Et veskist leivatehasesse veetava vilja kogus ei saa olla negatiivne, siis saame võrratused:

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 250-x-y \geqslant 0,\ 150-x \geqslant 0,\ 240-y \geqslant 0,\ x+y-40 \geqslant 0.$$

Nende võrratuste poolt määratud tasandiosa ongi selle ülesande lahendihulgaks:



Arvutades avaldise $– 2x – 4y + 3280$ väärtuse selle piirkonna tippudes, saame

$c(0; 40) = 3120$, $c(40; 0) = 3200$, $c(0; 240) = 2320$,
$c(150; 0) = 2980$, $c(150; 100) = 2580$, $c(10; 240) = 2300$.

Saadud väärtustest on vähim 2300, see saadakse, kui $x = 10$ ja $y = 240$. Asendades x ja y väärtused viimasesse tabelisse, saame optimaalse vedude korralduse plaani:

	Rukkivere	Ahjusaare	Leivamäe
Tammesalu	10	240	0
Viljaanni	140	0	210

1328. Talumees peab lehmi ja kitsi. Tal on 4 ha karjamaad. Üks lehm vajab 25 a karjamaad, kits 10 a. Loomalaut on 18 lehma ja 30 kitse jaoks mõeldud. Mitu lehma ja mitu kitse peab talumees pidama, kui aastane kasum lehmalt on 500 kr ja kitselt 50 kr?

1329. Tehas toodab kingi ja sandalette. Tuhande kingapaari valmistamiseks peavad töötama tehase kolm tsehhi vastavalt 3 tundi, 3 tundi ja 2 tundi. Tuhande sandaletipaari valmistamiseks peavad töötama esimene tsehh 2 tundi ja teine tsehh 1,5 tundi. Esimene tsehh võib ööpäevas töötada 18 tundi, teine tsehh 15 tundi ja kolmas tsehh 8 tundi. Mitu paari sandalette tuleb tehases päevas valmistada, et

1) jalanõupaaride koguarv oleks maksimaalne;

2) jalanõupaaride koguarv oleks maksimaalne tingimusel, et kingi toodetaks vähemalt 4000;

3) jalanõupaaride koguarv oleks maksimaalne tingimusel, et sandalette ei toodetakse üle kahe korra kingadest rohkem?

1330. Saeveskis saetakse palke kahel erineva võimsusega saeraamil. Järgnevas tabelis on antud tunnis keskmiselt saetavate palkide arv sõltuvalt nende jämedusest.

Materjal	Hulk	Tunnis saetakse	
		I saeraam	II saeraam
Jämedad palgid	120	4	3
Peened palgid	240	6	12

Mõlema saeraami kasutamise tund maksab 5 kr. Kui kaua tuleks kumbagi saeraami kasutada, et palkide saagimise eest tuleks vähem maksta?

1331. Vanaemal on kolme värvi villast lõnga. Halli lõnga on 4,0 kg, musta lõnga on 2,4 kg ja kollast lõnga on 600 g. Ühe kampsuni kudumisel läheb vaja 500 g halli ja 200 g musta lõnga. Ühe kindapaari jaoks läheb vaja 50 g halli, 60 g musta ja 20 g kollast lõnga. Ühe kampsuni kudumiseks kulub vanaemal 5 päeva, kindapaari teeb ta valmis ühe päevaga. Vanaema tahab kudumistööga teenida pensionilisa. Et õpiku kirjutamise ja ülesande lahendamise vahel on muutunud hinnad ja ka rahaühikud, siis kampsuni hinda ja kindapaari hinda me siinkohal märkima ei hakka, oletame ainult, et kampsun maksab kindapaarist 6 korda rohkem. Mitu kampsunit ja mitu paari kindaid peab kuduma sellest lõngast vanaema, et saada suuremat tulu?

1332. Ühes kilos kirssides ja aprikoosides on järgmisel hulgal A- ja C-vitamiini:

	A (mg)	C (mg)
Kirsid	3	150
Aprikoosid	24	75

Mitu grammi kirsse ja aprikoose peaks olema päevases ratsioonis, et seal oleks vähemalt 6 mg A-vitamiini ja 75 mg C-vitamiini? Kirsside ja aprikooside kilogrammi hind on 2 rbl.

(Ülesanne on venekeelse ajakirja „KVANT” 1989. a. juuninumbrist.)

1333. Vabrik toodab pesumasinaid ja kuivatusmasinaid, kus kasutatakse ühesuguseid mootoreid ja trumleid. Tabelis on toodud vajalike mootorite ja trumlite arvud ning toodete müügihind.

	Pesumasin	Kuivatusmasin
Mootor (tk.)	2	1
Trummel (tk.)	1	3
Hind (kr.)	100	75

Vabrik saab päevas 200 mootorit ja 300 trumlit. Missugune peaks olema päevas toodetavate pesumasinate ja kuivatusmasinate arv, et saada suurimat müügihinda? Kui suur on see müügihind?

1334. Tsehhis toodetakse kahte liiki elektrimootoreid. Üht liiki mootori tegemiseks kulub 4 kg vasktraati ja 30 töötundi. Teist liiki mootori valmistamiseks kulub 2 kg vasktraati ja 50 töötundi. Mootorite tootmiseks on kasutada 12 000 töötundi ja 1320 kg vasktraati kuus. Mootorite hinnad on vastavalt 300 ja 250 kr. Mitu kumbagi liiki mootorit tuleks valmistada, et sissetulek müügist oleks maksimaalne?

1335. Põllu ühele hektarile külvatav väetis peab sisaldama elemente A, B, C ja D mitte vähem kui tabelis toodud arvud. Väetist saab valmistada kahe lähteaine abil, mille elementidesisaldus on ka tabelis.

Element	Elementidesisaldus lähteaines		Vaja 1 ha jaoks
	I	II	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	—	4	4
D	6	—	9

Esimese lähteaine ühik maksab 5 kr., teisel 6 kr. Kuidas koostada nõuetele vastav, kuid sealjuures võimalikult odav segu?

1336. Puidutöökotta toodi 130 m^2 vineeri ja 20 tihumeetrit laudu. Töökoda teeb riiuleid ja köögikappe. Andmed puidu kulu kohta on järgmised:

Tooted	Vineer (m^2)	Lauad (tm)
10 riiulit	9	0,6
10 köögikappi	50	0,9

Ühe riiuli müügist saab töökoda 32 kr. ja köögikapi müügist 45 kr. tulu. Kui palju peab töökoda kumbagi toodet valmistama, et saadav tulu oleks suurim? Seejuures on nõutud valmistada vähemalt 5 köögikappi ja vähemalt 20 riiulit.

1337. Linna raamatukogu täiendatakse aastas vähemalt 200 raamatu võrra. Lugejate soovide põhjal ostab raamatukogu romaane vähemalt 2 korda rohkem kui erialast kirjandust. Samas on otsustatud, et aastas ei osteta üle 400 romaani.

Ühe romaani hind on keskmiselt 12 kr ja erialase käsiraamatu hind 15 kr. Mitu romaani ja mitu erialast raamatut ostetakse, kui raha on 6000 kr? Eesmärk on osta võimalikult palju raamatuid.

1338. Karusloomafarmis kasutatakse loomade söötmisel kahte liiki sööta. Esimest liiki sööda kilogramm sisaldab 2 ühikut ainet A, 2 ühikut ainet B ja 4 ühikut ainet C (näiteks valku, rasva ja süsivesikuid) ja maksab 3 kr. Teist liiki sööda kilogramm sisaldab 3 ühikut ainet A, 2 ühikut ainet B ja 1 ühiku ainet C ja maksab 2 kr. On teada, et karusloomale on vaja ööpäevas 6 ühikut ainet A, 8 ühikut ainet B ja 12 ühikut ainet C. Koosta ratsioon, mille korral karusloom saaks kõiki talle vajalikke aineid ja mis oleks odavaim.

1339. Melhior koosneb 1 osast niklist ja 5 osast vasest, uushõbe koosneb 3 osast niklist, 4 osast tsingist ja 13 osast vasest. Juveliiritöökoda teeb neist metallidest 100 g raskuseid lusikaid. Laos on 12 kg niklit, 65 kg vaske ja 12 kg tsinki. Uushõbedast lusikas maksab neli korda rohkem, kui melhiorist lusikas. Kui palju tuleb teha melhiorist ja kui palju uushõbedast lusikaid, et toodangu maksumus oleks võimalikult suur?

1340. Kaks sauna — Kalamaja saun ja Kivimäe saun on leppinud kokku sõjaväega, et nendes saunades saab iga nädal pesta end vastavalt 600 ja 400 sõdurpoissi. Sõjaväelased, kes neis saunades pesemas hakkavad käima, teenivad kolmes väeosas: Tondil 500 meest, Juhkentalis 200 meest ja Paljassaarel 300 meest. Toome ära tabeli, kus on kirjas see, kui palju maksab ühe sõduri sõit oma sõjaväeosast sauna ja tagasi (hinnad sentides):

Sõjaväeosa	Kalamaja saun	Kivimäe saun
Tondil	40	30
Juhkentalis	20	15
Paljassaarel	25	45

Kui palju sõdureid peab igast sõjaväeosast minema Kalamaja sauna, kui palju Kivimäe sauna, et sõidukulud oleksid minimaalsed?

1341. General Motorsi autotehased asuvad Los Angelesis, Detroidis ja New Orleansis. Toodangu jaotuspunktid on Denveris ja Miamis. Tehased toodavad vastavalt 1000, 1500 ja 1200 autot kvartalis. Müügi-jaotuspunktid vajavad vastavalt 2300 ja 1400 autot kvartalis. Autosid veetakse mööda raudteed, kusjuures ühe miili veokulu on 8 senti. Tehaste ja jaotuskeskuste vahekaugused miilides on toodud järgmises tabelis:

	Los Angeles	Detroit	New Orleans
Denver	1000	1250	1275
Miami	2690	1350	850

Kuidas tuleb korraldada autode vedu tehastest müügi-jaotuskeskustesse, et veokulud oleksid minimaalsed?

1342. Talumehel on kaks maatükki, 8 ha ja 9 ha. Nisu hektarisaak on esimesel maatükil 24 ts, teisel 21 ts. Odra hektarisaak on vastavalt 35 ts ja 30 ts. Ühe tsentneri nisu müügist saaks talumees 16 kr. ja ühe tsentneri odra müügist 9 kr. Kui palju tuleb külvata kummalegi maatükile nisu ja otra, et saada võimalikult palju raha? Oletame täiendavalt, et talunik tahab saada vähemalt 225 ts nisu ja 220 ts otra. Kui suurele pinnale tuleks nüüd külvata neil maatükkidel nisu ja otra?

1343. Vabrik vajab 300 2 meetri pikkust ja 200 3 m pikkust lauda. Need lõigatakse 7,5 m pikkustest laudadest. Kuidas tuleks laudu tükeldada, et lähtematerjali kuluks võimalikult vähe?

1344. 20 cm pikkustest varrastest tuleb valmistada 5 cm, 7 cm ja 9 cm pikkusi polte vastavalt 150, 200 ja 300 tk. Polte saab tükkideks lõigata kuuel viisil. Tabelis on saadav poltide arv ja tekkivad jäägid.

	1	2	3	4	5	6	Vajalik poltide arv
9	1	0	1	0	0	2	300
7	1	1	0	0	2	0	200
5	0	2	2	4	1	0	150
Jäägid	4	3	1	0	1	2	

Kuidas tuleks vardaid tükeldada, et neid kuluks võimalikult vähe?

1345. Paberirulle laiusega 80 cm tuleb lõigata 20 cm, 30 cm ja 35 cm laiusteks rullideks. Neid rulle on vaja saada vastavalt 1000, 1600 ja 740 tükki. Kuidas tuleb rulle tükeldada, et jäätmete koguhulk oleks minimaalne?

1346. Suurtest metall-lehtedest mõõtmetega 6×13 meetrit lõigatakse kahesuguse suurusega toorikuid: mõõtmetega 5×4 meetrit ja 2×3 meetrit. Vaja on 300 suuremat toorikut ja 1500 väiksemat toorikut. Kuidas tuleb neid suuri metall-lehti lõigata toorikuteks, et toorikuid oleks võimalikult palju ja jäätmeid võimalikult vähe?

Järgnev arvutiprogramm võimaldab lahendada graafilise lineaarplaneerimise ülesandeid. Sisestada tuleb võrratusesüsteemi kordajad a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 jne. Et programm oleks lühike ja kergesti loetav, siis on eeldatud, et lahendite piirkonna võrratused tuleb enne kordajate sisestamist viia kujule $A_i x + B_i y \leqslant C_i$ (kus $i = 0; 1; 2; \dots; n$).

Programm otsib sihifunktsiooni maksimaalseid väärtusi ühe ristküliku seest ja teeb kõigepealt kindlaks, kas kontrollitav punkt on lahendite piirkonnas. Ristküliku kaks külge on koordinaatteljed. Pikkuse ja laiuse sisestab aga programmi kasutaja.

Peab ütlema, et sihifunktsiooni maksimaalseid ja minimaalseid väärtusi leiab see programm aeglaselt ja vahel ka ligikaudselt. Eesmärgiks oli programmi lühidus. Juhul, kui *x*-i või *y*-i muutumise samm on liiga väike, siis programm töötab liiga kaua.

```
10 INPUT ”Mitu võrratust? ”,N
20 DIM A(N), B(N), C(N)
30 PRINT ”Vii võrratused enne kordajate sisestamist kujule”,
40 PRINT ”Ax+By<C”
50 MAX=-32767:MIN=32767 ’MAX saab võimalikult väikese, MIN suure väärtuse.
60 FOR I=1 TO N
70 PRINT ”Anna A(”;I;”) ”;:INPUT A(I)
80 PRINT ”Anna B(”;I;”) ”;:INPUT B(I)
90 PRINT ”Anna C(”;I;”) ”;:INPUT C(I)
100 NEXT I
110 PRINT ”Sisesta sihifunktsiooni kordaja A ”;:INPUT A
120 PRINT ”Sisesta sihifunktsiooni kordaja B ”;:INPUT B
130 PRINT ”Sisesta piirkonna parem äär ”;:INPUT K
140 PRINT ”Sisesta piirkonna ülemine äär ”;:INPUT L
150 PRINT ”Sisesta x-i muutumise samm ”;:INPUT DX
160 PRINT ”Sisesta y-i muutumise samm ”;:INPUT DY
170 FOR X=-DX TO K STEP DX
180 FOR Y=0 TO L STEP DY
190 I=1
200 IF A(I)*X+B(I)*Y>C(I) THEN 310
210 I=I+1:IF I<N+1 THEN 200
220 C=A*X+B*Y
230 IF C<> MAX THEN 250
240 MAX2=C:XMAX2=X:YMAX2=Y:GOTO 310 ’Kui c = MAX
250 IF C<MAX THEN 270
260 MAX=C:XMAX=X:YMAX=Y:GOTO 310 ’Kui c > MAX
270 IF C<>MIN THEN 290
280 MIN2=C:XMIN2=X:YMIN2=Y:GOTO 310 ’Kui c = MIN
290 IF C>MIN THEN 310
300 MIN=C:XMIN=X:YMIN=Y:GOTO 310 ’Kui c < MIN
310 NEXT Y
320 NEXT X
330 IF MAX=MAX2 THEN 360 ’Kui maksimaalne väärtus on kahes punktis
340 PRINT ”Sihifunktsioon on suurim punktis (”;XMAX;”;”;YMAX;”)”;
345 PRINT ”Väärtusega ”;MAX
350 GOTO 380
360 PRINT ”Sihifunktsioon on suurim lõigus (”;XMAX;”;”;YMAX;
370 PRINT ”) kuni (”;XMAX2;”;”;YMAX2;”) väärtusega ”;MAX
380 IF MIN=MIN2 THEN 410 ’Kui minimaalne väärtus on kahes punktis
390 PRINT ”Sihifunktsioon on vähim punktis (”;XMIN;”;”;YMIN;”)”;
395 PRINT ”väärtusega ”;MIN
400 GOTO 430
410 PRINT ”Sihifunktsioon on vähim lõigus (”;XMIN;”;”;YMIN;
420 PRINT ”) kuni (”;XMIN2;”;”;YMIN2;”) väärtusega ”;MIN
430 END
```

Kasutame seda programmi meie poolt õpitud broileritibude näites saadud võrratusesüsteemi $\begin{cases} x+5y \geq 15 \\ 5x+y \geq 15 \end{cases}$ nende lahendite leidmiseks, mille korral oli avaldise $c = x + 3y$ väärtus minimaalne:

RUN

Mitu võrratust? <u>2</u>

Vii võrratused enne kordajate sisestamist kujule

Ax + By < C

Anna A(1)? <u>– 1</u>
Anna B(1)? <u>– 5</u>
Anna C(1)? <u>– 15</u>
Anna A(2)? <u>– 5</u>
Anna B(2)? <u>– 1</u>
Anna C(2)? <u>– 15</u>

Sisesta sihifunktsiooni kordaja A? <u>1</u>
Sisesta sihifunktsiooni kordaja B? <u>3</u>
Sisesta piirkonna parem äär? <u>20</u>
Sisesta piirkonna ülemine äär? <u>20</u>
Sisesta muutuja x muutumise samm? <u>0.5</u>
Sisesta muutuja y muutumise samm? <u>0.5</u>

Sihifunktsioon on suurim punktis (20; 20) väärtusega 80
Sihifunktsioon on vähim punktis (2.5; 2.5) väärtusega 10

Kui me oleksime *x*-i ja *y*-i muutumise sammudeks sisestanud ühed (täisarvuline planeerimisülesanne 1 g graanulitega), siis oleksime saanud tulemuseks, et sihifunktsioon on vähim punktis (5; 2) väärtusega 11.

Püüa selle programmi abil kontrollida seni lahendatud lineaarplaneerimise ülesannete tulemusi. Kuidas muuta programmi, kui me tahame leida ainult sihifunktsiooni maksimumi (miinimumi)?

1327. a) (0; 6), (0; 5), (5; 0), (0; 18); **c)** (2,4; 0,4), (4; 0), (0; 2). **1328.** 16 lehma, 0 kitse. Miks ei ole kitsepidamine kasulik? **1330.** Kõik jämedad palgid saagida esimesel saeraamil, kõik peened palgid saagida teisel saeraamil. **1331.** 6 kampsunit ja 20 paari kindaid. Millist tingimust ei olnud vaja kasutada ülesande lahendamisel? **1332.** 400 g kirsse ja 200 g aprikoose. **1331.** 60 pesumasinat ja 80 kuivatusmasinat. 12000 kr. **1335.** Mõlemat lähteainet tuleb võtta ühepalju. **1337.** 400 ja 80. **1339.** 180 ja 600 **1340.** Juhkentalist ja Paljassaarelt peavad minema kõik Kalamaja sauna. Tondilt 100 meest Kalamaja ja 400 meest Kivimäe sauna. **1341.** Los Angeles’ist kõik Denverisse, New Orleansist kõik Miamisse. Detroidist 1300 Denverisse ja 200 Miamisse. **1346.** Toome siinkohal ära kaks kõige ratsionaalsemat lõikamisviisi: Üldse lõigatakse lahti 200 lehte, neist pooled ühel, pooled teisel viisil. Vt. ka V. Abtšuk „Suurte väejuhtide saladus”, Tln, „Valgus”, 1984.