Lotka – Volterra mudel (kahe liigi kooslus)

Probleemi püstitus: Olgu $x(t)$ jäneste ja $y(t)$ huntide arv ajamomendil t. Jäneste toidulaual pole praktilisi piiranguid, sest hundid ei lase neil liialt paljuneda. Huntide toidulaud sõltub jäneste arvukus- est. Teeme lihtsustava eelduse, et jänestel pole teisi looduslikke vaenlasi peale huntide, ning jänesed on huntide ainsaks toiduks. Kui poleks hunte, alluks jäneste arvukus Malthuse seadusele:

$x'(t) = a\,x(t)$, kus $a > 0$;

Kui poleks jäneseid,alluks huntide arvukus seadusele

$y'(t) = -b\,y(t)$, kus $b > 0$.

Jäneste ja huntide kooseksisteerimist võib kirjeldada lihtsa diferentsiaalvõrrandite süsteemiga

$$\frac{dx}{dt} = ax - a_1\,xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = -by + b_1\,xy,$$

kus a, b, a_1 ja b_1 on positiivsed konstandid. Siin liige $x(t)y(t)$ on proportsionaalne jänese ja hundi kohtumise tõenäosusele ning sellised kohtumised mõjuvad negatiivselt jäneste arvukusele ning positiivselt huntide arvukusele.

Siin $x(t)$ ja $y(t)$ on liikide arvukused, seega probleemi lahendamisel vaatleme neid võrrandeid mitte kogu xy tasandil vaid selle esimeses veerandis, s.t. $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.

Jagades teise võrrandi esimesega, saame ühe hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by + b_1\,xy}{ax - a_1\,xy}$$

ehk

$$y\,(-b + b_1\,x)\,dx = x\,(a - a_1\,y)\,dy.$$

See on eralduvate muutujatega võrrand. Eraldame muutujad

$$xy\left[\frac{-b + b_1\,x}{x}\,dx - \frac{a - a_1\,y}{y}\,dy\right] = 0.$$

Lahendid $x = 0$ ja $y = 0$ jätame kõrvale kui ülesande sisust lähtudes ebahuvitavad. Arvutame

$$\int \frac{-b + b_1\,x}{x}\,dx + \int \frac{-a + a_1\,y}{y}\,dy = C,$$

$$-b\ln x + b_1\,x - a\ln y + a_1\,y = C$$

$$\ln\left(x^{-b}\,e^{b_1 x}\,y^{-a}\,e^{a_1 y}\right) = \ln C_1, \quad \text{kus } \ln C_1 = C.$$

Siit

$$\frac{e^{b_1\,x}}{x^b} \cdot \frac{e^{a_1\,y}}{y^a} = C_1.$$

Viimane seos esitabki lahendeid ilmutamata kujul. Selle lähemal uurimisel ilmneb, et lahendid kujutavad endast kinnisi kõveraid ümber punkti, mille koordinaatideks on

$$x = \frac{b}{b_1}, \quad y = \frac{a}{a_1}.$$

Konkreetne mudel

Oletame, et ilma huntideta suureneks jäneste arvukus ühes ajavahemikus neljakordseks. Jäneste niisugust kasvu saab modelleerida diferentsiaalvõrrandi $\frac{dx}{dt} = 1.4\,x$, kui $y = 0$ abil.

Selle võrrandi täpne lahend on $x(t) = x(0)\,e^{1,4\,t}$, mis tähendab eksponentsiaalset kasvu teguriga $e^{1,4}$ mis on umbes 4,0552. Seega $a = 1,4$.

Oletame,et ilma jänesteta väheneks huntide arvukus ühes ajavahemikus umbes 10 % võrra. Huntide arvu niisugust kahanemist saab modelleerida diferentsiaalvõrrandi
$\frac{dy}{dt} = -0.1\,y$, kui $x = 0$ abil.

Selle võrrandi täpne lahend on $y(t) = y(0)\,e^{-0,1\,t}$, mis tähendab eksponentsiaalset kahanemist teguriga $e^{-0,1}$ mis on umbes 0.904837. Seega $b = 0, 1$.

Olgu $a_1 = 0.02$ katsetest võetud konstant, mis näitab, kui suur osa jänestest tapetakse ühe hundi poolt ühe ajaperioodi jooksul.

Olgu $b_1 = 0.001$ katsetest võetud konstant, mis näitab, kui palju sünnib hunte juurde ühe ajaperioodi jooksul iga ärasöödud jänese kohta.

Seega jäneste ja huntide kooseksisteerimist võib kirjeldagu diferentsiaalvõrrandite süsteem

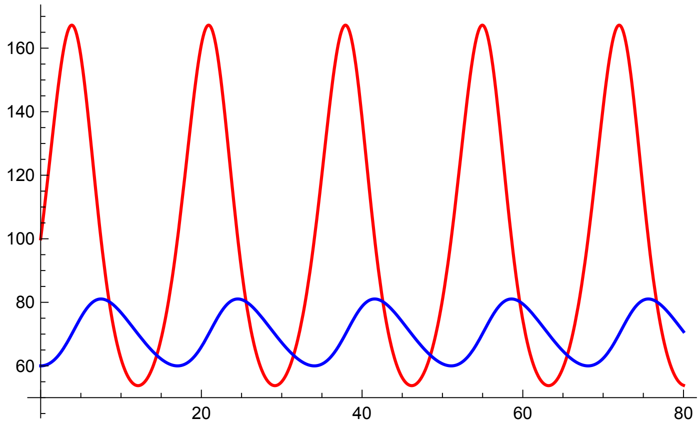
$$\frac{dx}{dt} = 1,\ 4\,x - 0,\ 02\,xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = -0,\ 1\,y + 0,\ 001\,xy,$$

Konkreetse mudeli realisatsioon programmina

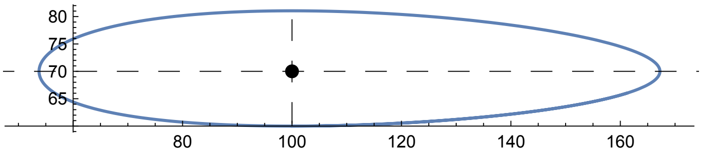
In[1]:=
```
a = 1.4;
a1 = 0.02;
b = 0.1;
b1 = 0.001;
sol = NDSolve[
{x'[t] == a x[t] - a1 x[t] y[t],
 y'[t] == - b y[t] + b1 x[t] y[t],
 x[0] == 100, y[0] == 60 }, {y, x}, {t, 0, 80} ];

 Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 0, 80}, PlotStyle -> {RGBColor[1,0,0], I
   PlotRange->All]
```

Out[7]=



In[8]:=
```
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 0, 20}, Epilog -> {Point
    Dashing[{0.03,0.03}], Line[{{b/b1, 0},{b/b1, 120}}], Line[{{0, a/a1},{420, a
```

Out[8]=



In[10]:=
```
TableForm[Table[{t, (x /. sol[[1]])[t], (y /. sol[[1]])[t]}, {t, 0, 20}],
  TableHeadings → {None, {"t", "x[t]", "y[t]"}}]
```

Out[10]//TableForm=

t	x[t]	y[t]
0	100.	60.
1	121.629	60.6381
2	144.071	62.6716
3	161.518	66.1165
4	167.107	70.5944
5	157.552	75.226
6	136.466	78.8982
7	111.682	80.8194
8	89.6642	80.8416
9	73.1392	79.3133
10	62.2017	76.7567
11	56.0197	73.6551
12	53.7999	70.3862
13	55.1177	67.2332
14	59.9603	64.4187
15	68.6595	62.1388
16	81.7153	60.5928
17	99.3942	60.0006
18	120.938	60.5989
19	143.427	62.5883
20	161.131	65.9934

Tasakaalupunkt konkreetse mudeli jaoks

Tasakaalupunkti antud algparameetrite puhul saame varemvaadeldud võrdustest:

$$x = \frac{b}{b_1} = \frac{0.1}{0.001} = 100, \quad y = \frac{a}{a_1} = \frac{1.4}{0.02} = 70.$$