

5 SIR epideemia mudel

Keskajal laastas Euroopat Must Surm (katk). Üsna selamatuks osutus katku järsk ilmumine ja seejärel niisama äkki see ka kadus. Üks matemaatilise epidemioloogia võidukäike oli avastus, et teatud mudelid ennustavadki sellist epideemia käitumist ette (loomulikult tuleb selleks peale modelleerimise ka midagi päriselus ette võtta). Viimane avas tee haiguste ja nende käitumise modelleerimiseks. Aastal 1927 esitleti W. O. Kermack'i ja A. G. McKendrick'i poolt üldisemat SIR (*Susceptible, Infective, Removed*) mudelit, mis osutub edukaks veel tänapäevalgi ja mille ühte lihtsamat alamjuhtu järgnevalt vaatame.



Paulus Furst'i graveering (1656),
Wikipedia

5.1 Modelleerimine I järku diferentsiaalvõrrandite süsteemiga

Üks võimalikke SIR mudeleid on algingimustega ülesanne (vt. nt. [1, 3, 5]):

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - r \cdot I(t) \\ R'(t) = r \cdot I(t) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{array} \right\}, \quad (5.1)$$

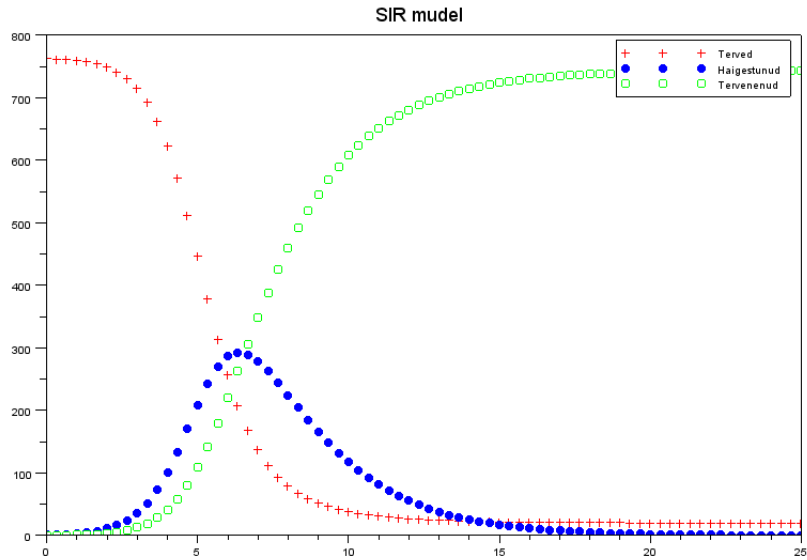
1. $S(t)$ on ajahetkel t tervete inimeste arv, nemad on aldis haigestumise suhtes (*Susceptible*).
2. $I(t)$ on nakatunud inimeste arv (*Infective*). Tervetega kohtumisel levib haigus edasi.
3. $R(t)$ on haigusest tervenenu inimeste arv (*Removed, Recovered*), kusjuures mudel kehtib olukorra kohta, kus haiguse läbipõdemisel muututakse immuunseks.
4. Kogu elanike arv

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

jääb ajas muutumatuks.

5. Konstant β iseloomustab nakkuse levimise kiirust tervete ja nakatunud isikute kohtumisel.
6. Konstant r iseloomustab haigusest tervenemise kiirust.

Mudel eeldab lihtsustuseks, et kõikide inimeste nakatumise tõenäosus on võrdne.



Viited

- [1] L. Berc. Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals. Lecture Notes. University of South Bohemia, Czech Republic.
- [2] A. Clark Jr. SIR Model of Epidemics. Basic Model and Examples Revised, 2005.
- [3] J.D. Murray. Mathematical Biology I, An Introduction. 325-326, Springer-Verlag, 2002.
- [4] News and Notes. Influenza in a boarding school. British Med. Jour., March 4, p. 587, 1978.
- [5] J. Na, L. Tsui. Epidemic modelling using SARS as a case study. North American Actuarial Journal. 9(4): 28-42, 2005.

5.2 Adams'i-Bashforth'i ilmutatud meetodid võrrandite süsteemi jaoks

1. Sisuliselt on meil I järku diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\left. \begin{array}{l} x'(t) = f_1(t, x, y, z) \\ y'(t) = f_2(t, x, y, z) \\ z'(t) = f_3(t, x, y, z) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{array} \right\},$$

mille saab vektorkujul kirjutada lihtsamalt:

$$Y'(t) = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0.$$