

TALLINNA ÜLIKOOL  
MATEMAATIKA ja LOODUSTEADUSTE INSTITUUT  
MATEMAATIKA OSAKOND

Kairiin Kütt

**BUFFONI NÕELA- JA MÜNDIÜLESANNE**

Bakalaureusetöö

Juhendaja: lektor Tõnu Tõnso

Autor: .....” .....” .....2011

Juhendaja:.....“ .....” .....2011

Tallinn 2011

# SISUKORD

SISUKORD.....	2
SISSEJUHATUS.....	3
1. BUFFONI NÕELAÜLESANNE JA SELLE KOLM ERIJUHTUMIT .....	4
1.1. Esimene juhtum: $l = d$ .....	4
1.1.1. Eksperiment.....	6
1.2. Teine juhtum: $l < d$ .....	10
1.3. Kolmas juhtum: $l > d$ .....	11
1.4. Kokkuvõte kolmest juhtumist .....	12
2. “CLEAN TILE ” PROBLEEM .....	14
2.1. Ruutudest koosnev parkett .....	14
2.2. Võrdkülgsetest kolmnurkadest koosnev parkett .....	17
2.3. Korrapärastest kuusnurkadest koosnev parkett .....	19
2.4. Rombidest koosnev parkett .....	21
2.5. Korrapärastest kaheksanurkadest ja ruutudest koosnev parkett .....	23
2.5.1. Esimene juhtum: $d > l$ .....	24
2.5.2. Teine juhtum: $d < l$ .....	27
KOKKUVÕTE.....	30
BUFFON’S NEEDLE AND COIN PROBLEM.....	31
KASUTATUD KIRJANDUS .....	32

## SISSEJUHATUS

Käesolev bakalaureusetöö kuulub geomeetrilise tõenäosuse valdkonda. Töö eesmärgiks on anda teatav ülevaade Buffoni nõela- ja mündiülesandest. Bakalaureusetöö teoreetiline osa baseerub üksnes ingliskeelsetel materjalidel ja on põhiosas referatiivne.

Bakalaureusetöö on jaotatud kaheks paragrahviks. Esimene paragrahv annab põgusa ülevaate geomeetrilise tõenäosuse mõistest, mis on vajalik, kuna sisuliselt baseerub sellel terve bakalaureusetöö. Samuti tutvustab see paragrahv Buffoni nõelaülesannet ning kasutades mitmeid jooniseid, kirjeldab see põhjalikult nõelaülesande kolme erijuhtumit. Nõelaülesande üldjuhu kirjeldamiseks on kasutatud J.V.Uspensky raamatut [7], P. Kunkel'i veebilehekülge [1] ja Wikipedia veebientsüklopeedia lehekülge [8]. Erijuhtumite osas on abiks olnud kaks algmaterjali: P. Kunkel'i veebilehekülg [2] ning G. Reese veebilehekülg [6]. Kolmanda erijuhtumi (nõela pikkus  $l$  on suurem kui sirgetevaheline kaugus  $d$ ) puhul on töö autor valemi tuletuskäigu pikemalt kui allikas [2] lahti kirjutanud ja seda omapoolsete kommentaaridega varustanud. Selle paragrahvi osaks on ka Buffoni nõelakatsete läbiviimine töö autori poolt. Katsetulemuste analüüsimisel oli abiks Toomas Lepikult'i koostatud esitlusmaterjal [3].

Teine paragrahv tutvustab „Clean Tile“ probleemi ehk Buffoni mündiülesannet ja käsitleb selle alajuhte, mis saadakse, kui münt kukub erineva kujuga (ruut, võrdkülgne kolmnurk, korrapärase kuusnurk, romb) regulaarsetele parkettidele. Siin on algmaterjal saadud Mathworld'i leheküljelt [5]; töö autor on esitatud valemite tuletuskäigud pikemalt lahti kirjutanud ning tulemusi omapoolsete seletustega täiendanud. Selle paragrahvi originaalseks osaks on Buffoni mündiülesande lahendamine kaheksanurkadest ja ruutudest koosneva semiregulaarse parketi puhul.

Buffoni nõela- ja mündiülesande erinevate juhtumite illustreerimiseks ning katseandmete statistiliseks töötlemiseks on kasutatud tarkvarapaketti Mathematica 7.0. Vastavad joonised ja programmilõigud ning exceli katseandmete faili katse.xlsx võib leida koos bakalaureusetöö pdf-failiga (buffon\_needle\_coin\_problem.pdf) tööga kaasas oleva CD pealt.

Autor tänab lektor Tõnu Tõnsot mitmekülgsete soovitude ja sobiva eestikeelse terminoloogia leidmise eest.

# 1. BUFFONI NÕELAÜLESANNE JA SELLE KOLM ERIJUHTUMIT

Buffoni Nõel on üks vanimaid probleeme geomeetrilise tõenäosuse valdkonnas. Esimesena esitas Buffoni nõelaülesande prantsuse loodusteadlane ja matemaatik Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788). Milles seisneb Buffoni nõelaülesanne?

Kujutleme tasapinda, kuhu on tõmmatud paralleelsed sirged võrdsete vahedega, olgu sirgetevaheline kaugus  $d$ . Viskame tasapinnale nõela pikkusega  $l$ . Nõela jämedus lähenegu nullile, see tähendab, et nõela võime vaadelda sirglõiguna, mille pikkus on  $l$ . Kui suur on tõenäosus, et nõel lõikab vähemalt üht sirget?

On tähelepanuväärne, et see tõenäosus on otseselt seotud väärtusega  $\pi$ . Originaalne ülesanne sisaldas endas tingimust, et nõela pikkus  $l$  on väiksem kui sirgetevaheline kaugus  $d$  ( $l < d$ ).

Antud töös vaatleme kolme erinevat võimalust:

$$l = d,$$

$$l < d,$$

$$l > d.$$

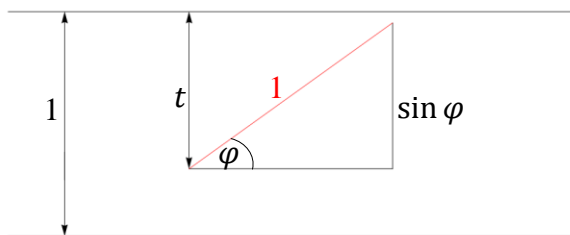
Et mõista Buffoni nõelaülesannet ja osata selle abil katseliselt määrata arvu  $\pi$  väärtust, on tarvilik teada geomeetrilise tõenäosuse mõistet. Defineerime selle järgmiselt:

Olgu  $U$  mingi tasandi piirkond pindalaga  $S$  ja  $u$  selle piirkonna mingi osapiirkond pindalaga  $s$ . Vaatleme mingi punkti nii öelda juhuslikku viskamist piirkonda  $U$ . Tõenäosus, et see juhuslik punkt satub ühtlasi piirkonda  $u$ , avaldub nende piirkondade pindalade suhtena  $p = \frac{s}{S}$ .

Geomeetrilist tõenäosust saab kasutada ainult siis, kui iga punkti tabamine on võrdtõenäoline ja iga piirkonna tabamise tõenäosus on võrdeline selle piirkonna pindalaga.

## 1.1. Esimene juhtum: $l = d$

Vaatame esimesena kõige lihtsamat juhtumit. Olgu nõela pikkus üks ühik ja sirgetevaheline kaugus samuti üks ühik. Siin on kaks muutujat, nurk  $\varphi$  ja kaugus nõela alumisest otsast lähima ülalpool asuva sirgeni. Olgu selleks  $t$ . Nurk  $\varphi$  rahuldab tingimust:  $0 \leq \varphi \leq \pi$  ja seda mõõdetakse joonest, mis on paralleelne tasandil olevate joontega. Kaugus nõela alumisest otsast lähima ülalpool asuva sirgeni ei saa kunagi olla suurem kui sirgetevaheline kaugus. Joonis 1.1 kujutabki seda olukorda.

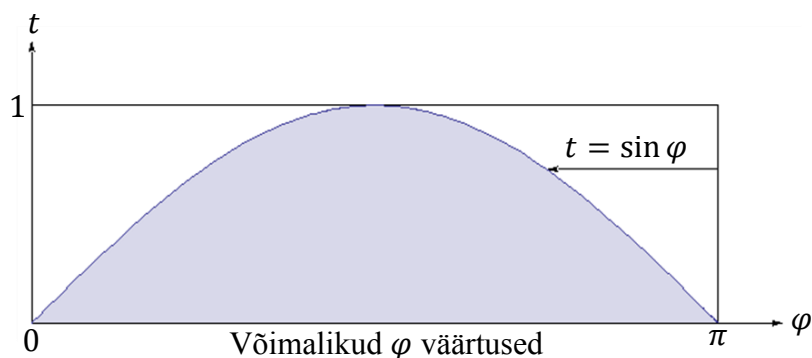


Joonis 1.1

Joonisel 1.1 nõel sirget ei lõika ega puutu; nõel lõikaks või puutuks sirget vaid juhul, kui vähim kaugus nõela alumisest otsast lähima ülalpool asuva sirgeni oleks väiksem kui  $\sin \varphi$  või sellega võrdne. Teisisõnu,  $t \leq \sin \varphi$ . Kui tihti seda juhtub?

Vaatame joonist 1.2, kus seos  $t \leq \sin \varphi$  on kujutatud  $\varphi t$ -teljestikus. Väärtused kõveral või kõverast allpool tähendavad tabamust ( $t \leq \sin \varphi$ ). Seega on tabamuse tõenäosus värvitud ala pindala suhe kogu nelinurga pindalasse:

$$p = \frac{\text{Värvitud ala pindala}}{\text{Kogu nelinurga pindala}}.$$



Joonis 1.2

Joonisel 1.2 värvitud ala pindala:

$$s = \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = -\cos \varphi \Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

Nelinurga pindala on  $S = \pi$  ja tabamise tõenäosus kui piirkondade pindalade suhe esitub kujul  $p = \frac{s}{S} = \frac{2}{\pi}$ . Kui nõelavisete arv on  $n$  ja visete arv, mille puhul nõel lõikab või puutub joont, on  $m$ , siis  $p = \frac{m}{n}$  ja me saame avaldada  $\pi$ :

$$\frac{2}{\pi} \approx \frac{m}{n} \Rightarrow \pi \approx 2 \frac{n}{m}.$$

### 1.1.1. Eksperiment

Selleks, et katseliselt kontrollida Buffoni nõelaülesande tulemusi ( $p = \frac{m}{m} = \frac{2}{\pi}$ ) sai korraldatud eksperiment. A3 mõõdus millimeetripaber jooniti paralleelsete sirgetega, mille vaheline kaugus oli 3,5 cm. Eksperimendi sooritamisel kasutati nõela, mille pikkus oli samuti 3,5 cm. Tehti 2000 katset, mille käigus töö autor lasi nõelal kukkuda umbes 30 cm kõrguselt paberile. Selleks, et nõela maandumisel ei oleks ükski suund eelistatud, lasti nõelal kukkuda teravik ees (Foto 1.1). Loeti kokku nende katsete arv, mille korral nõel lõikas või puutus sirget.

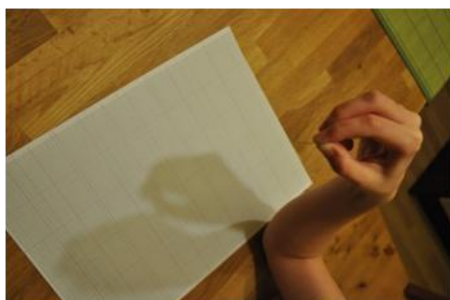


Foto 1.1

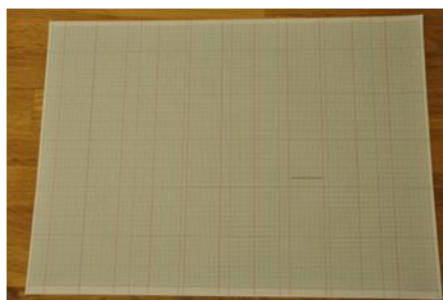


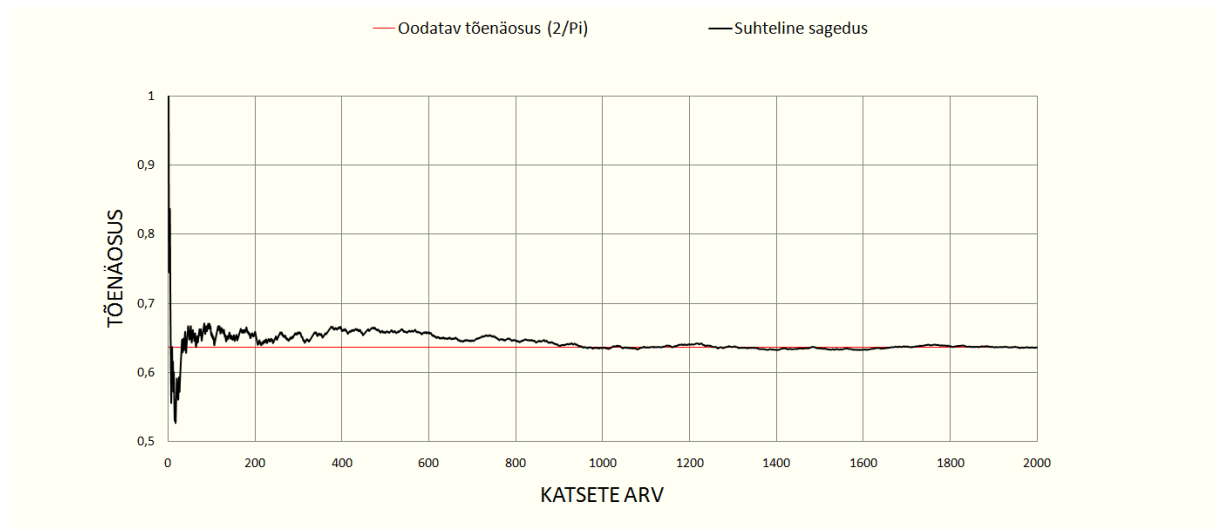
Foto 1.2

Punktis 1.1. saime, et tabamise tõenäosus on geomeetriselt  $\frac{2}{\pi} \approx 0,6366198$  ja statistiliselt ligikaudu  $\frac{m}{n}$ , kus  $n$  on kõigi katsete arv ja  $m$  nende katsete arv, mille korral nõel lõikab või puutub sirget. On ilmne, et statistiliselt on tulemus seda täpsem, mida rohkem katseid tehakse. Vaatame, milline oli tulemus 2000 katse korral.

Mitmes katse?	Lõikub või puutub = 1 Ei lõiku ega puutu = 0	Lõikumiste või puutumiste summa.	Suhteline sagedus.
1	1	1	1
2	1	2	1
3	1	3	1
4	0	3	0,75
5	1	4	0,8
6	1	5	0,833333333
7	0	5	0,714285714
...	...	...	...
1994	0	1267	0,635406219
1995	0	1267	0,635087719
1996	1	1268	0,635270541
1997	1	1269	0,63545318
1998	1	1270	0,635635636
1999	1	1271	0,635817909
2000	1	1272	0,636

Tabel 1.1 (Kogu tabel on failis katse.xlsx, mis on bakalaureusetöoga kaasas oleva CD peal)

Tabelist 1.1 näeme, et esimeste katsete korral muutub suhteline sagedus küllaltki suure vahemikus. Katsete arvu suurenedes muutub vahemik, millesse satub sündmuse „nõel löikab või puutub joont“ suhteline sagedus, kitsamaks.



Joonis 1.3

Olgu  $P(A)$  sündmuse  $A$  esinemise tõenäosus ja  $\frac{m}{n}$  selle sündmuse esinemise suhteline sagedus. Kehtib valem, mis ütleb, et vastavalt Bernoulli suurte arvude seadusele läheneb sündmuste suhteline sagedus katsete arvu kasvamisel selle sündmuse tõenäosusele:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = P(A).$$

Buffoni nõelaülesande puhul on meil tegemist binoomjaotusega, mille korral  $p = \frac{2}{\pi}$ . Katsete arv on antud eksperimendi puhul  $n = 2000$ . Üksiksündmuse tõenäosuse punkthinnanguks võtame  $p^*$ , kus  $p^* = \frac{m}{n} = \frac{1272}{2000} = 0,636$ .

Tõenäosust, millega peavad kehtima tehtud otsused, nimetatakse usaldusnivooks ja tähistatakse sümboliga  $\beta$ . Parameetri  $p$  sümmeetriliseks usalduspiirkonnaks vastavalt usaldusnivoole  $\beta$ , nimetakse juhuslikku vahemikku  $(p^* - \varepsilon; p^* + \varepsilon)$ , mis katab hinnatava parameetri  $p$  tõenäosusega  $\beta$ , kus  $P(|p^* - p| < \varepsilon) = \beta$ . Arv  $\varepsilon > 0$  iseloomustab hinnangu täpsust.

Punkthinnangu standardhälve:

$$\sigma(p^*) = \sqrt{\frac{p^*q^*}{n}}.$$

Moivre-Laplace'i valemi kohaselt võime suure valimi korral kasutada binoomjaotuse lähendina normaaljaotust ja  $P(|X - EX| < \varepsilon) = \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$ .

Seega:

$$P(|p^* - p| < \varepsilon) = P(p^* - \varepsilon < p < p^* + \varepsilon) = 2\phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p^*q^*}}\right) = \beta.$$

Leiame parameetri  $p$  sümmeetrilise usalduspiirkonna vastavalt usaldusnivoodele 95% ja 99%. Selleks läheb vaja järgmisi suurusi:

$$\sigma(p^*) = \sqrt{\frac{p^*q^*}{n}} = \sqrt{\frac{0,636(1 - 0,636)}{2000}} \approx 0,0108 \text{ ja } \sqrt{\frac{2000}{0,636(1 - 0,636)}} \approx 92,9471.$$

- **Võtame usaldusnivooks 95% ja kasutame normaaljaotuse tabelit:**

$$2\phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p^*q^*}}\right) = 0,95 \Rightarrow \phi(\varepsilon 92,9471) = 0,475.$$

$$\varepsilon 92,9471 = 1,96 \Rightarrow \varepsilon \approx 0,022.$$

Seega tõenäosusega 0,95 kuulub  $\frac{2}{\pi}$  vahemikku ] 0,614; 0,658 [.

- **Võtame usaldusnivooks 99% ja kasutame tarkvarapaketti Mathematica 7.0:**

In: Needs[HypothesisTesting`]

In: punkthin = 0.636

Out: 0.636

In:  $\sigma = 0.0108$

Out: 0.0108

In: NormalCI[punkthin,  $\sigma$ , ConfidenceLevel  $\rightarrow$  .99]

Out: {0.608287, 0.663713}

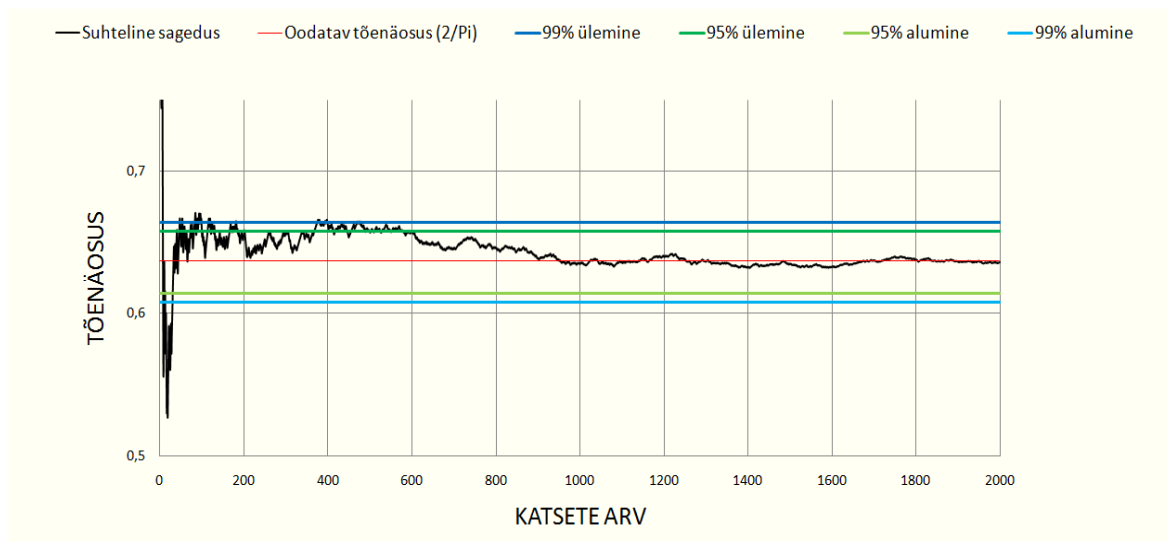
In:  $\varepsilon = 0.636 - 0.608287$

Out: 0.027713

Seega  $\varepsilon \approx 0,028$  ja tõenäosusega 0,99 kuulub  $\frac{2}{\pi}$  vahemikku ]0,608;0,664[

Võrreldes 99 % usalduspiire 95 % usalduspiiridega, näeme, et usaldusvahemik on muutunud laiemaks. Saadud tulemusi illustreerib joonis 1.4.





Joonis 1.4

Katseandmete detailsemal uurimisel exceli abiga ilmnes aga esmapilgul ootamatu tulemus. Tegelikult mahtus 99% usalduspiiridega määratud vahemikku 97,2% andmetest ning 95% usalduspiiridega määratud vahemikku ainult 82,25% andmetest, kusjuures jooniselt 1.4 on näha, et valdav enamus 95% usalduspiiridega määratud vahemikust välja jäänud andmetest jäi sellest vahemikust ülespoole. Tekkinud vastuolule õnnestus leida kaks põhjendust.

Põhjendus 1:

Et katse puhul keskvärtuse punkthinnanguks võetud arv  $p^* = \frac{m}{n} = 0,636$  on oodatavast tõenäosusest  $P(A) = \frac{2}{\pi} \approx 0,63661798$  väiksem, siis see põhjendab, miks nii palju suhtelise sageduse väärtusi jäi usalduspiirkonnast just ülespoole. Samas, katse korraldaja poolt ei ole korrektne võtta keskvärtuse punkthinnanguks teoreetiliselt teadaolevat väärtust  $\frac{2}{\pi}$ , kasutada võib ainult katseandmetest leitud väärtusi.

Põhjendus 2:

Uurides joonist 1.4 ja faili katse.xlsx, ilmnes, et kõik need vahemikust väljajäämised leidsid aset esimese 600 katse jooksul. Arvestades seda, et Buffoni nõelakatse puhul on tegemist Monte Carlo meetodi rakendamisega, ja asjaolu, et Monte Carlo meetod koondub väga aeglaselt, siis on 2000 katset ilmselt liiga väike katsete arv selleks, et jõuda tulemuseni, kus 95% (99%) andmetest jääb 95% (99%) usalduspiiridega määratud vahemikku. Kui oleksime antud eksperimendis teinud rohkem katseid (näiteks 4000 katset), siis sellise probleemi esiletuleku tõenäosus oleks olnud tunduvalt väiksem.

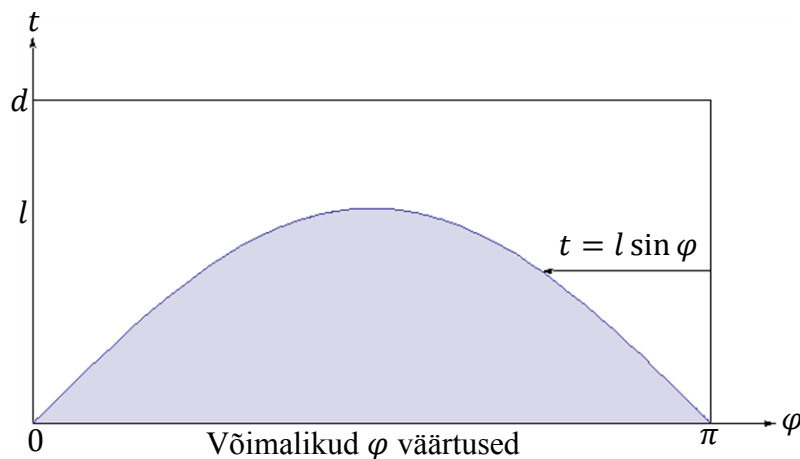
## 1.2. Teine juhtum: $l < d$

Oletame, et nõel on kukkunud juhuslikult eelpool mainitud viisil joonitud tasandile ja vaatame nõela alumist otsa. Juhul, kui nõel paikneb horisontaalselt, ei saa me alumist otsa leida - selle juhtumi tõenäosuse loeme võrdseks nulliga. Olgu  $t$  nõela alumise otsa kaugus lähimast ülalpool asuvast sirgest ning nurk, mille nõel moodustab sirgega, olgu  $\varphi$ . Selle nurga väärtus võib kellaosuti liikumisele vastupidiselt liikudes muutuda nullist  $\pi$ -ni.  $\varphi$  ei saa kunagi olla suurem kui  $\pi$ , sest siis poleks nurga tipp enam nõela alumine ots. Nõela asend on iseloomustatav kahe suuruse  $t$  ja  $\varphi$  abil, kusjuures  $t$  ja  $\varphi$  rahuldavad järgmisi tingimusi:

$$0 \leq t < d,$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Me eeldame, et  $t$  ja  $\varphi$  on teineteisest sõltumatud ja ühtlase jaotusega - mõlemad tingimused on olulised selleks, et saaks rahuldada geomeetrilise tõenäosuse mõistet. Iga ülaltoodud tingimust rahuldava arvupaari  $(\varphi, t)$  esinemine peab olema võrdvõimalik mistahes teise arvupaari esinemisega. Võrratused  $0 \leq t < d$  ja  $0 \leq \varphi \leq \pi$  määravad  $\varphi t$ -teljestikus ristküliku, mis on antud juhul kõigi võimaluste piirkond nõela kukkumiseks. Joonisel 1.5 kujutame  $\varphi t$ -teljestikus kõigi võimaluste piirkonda ja piirkonda, kus nõel lõikab või puutub joont, see on soodsate võimaluste piirkonda.



Joonis 1.5

Tabamise tõenäosus kui piirkondade pindalade suhe esitub järgmiselt:

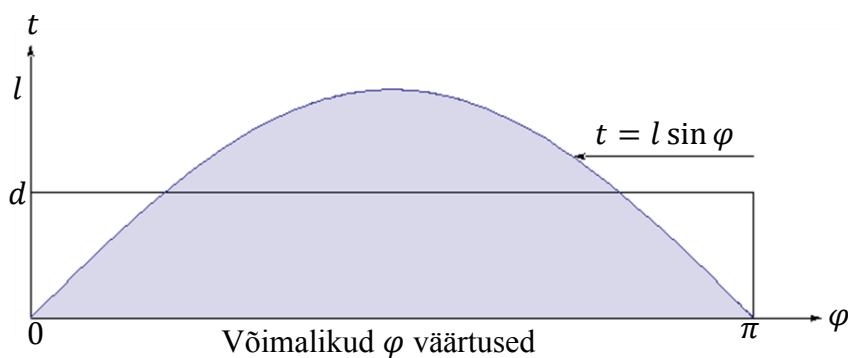
$$p = \frac{s}{S} = \frac{\int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi}{d\pi} = \frac{2l}{d\pi}.$$

Kui nõelavisete arv on  $n$  ja visete arv, mille puhul nõel lõikab või puutub joont, on  $m$ , siis  $p = \frac{m}{n}$  ja me saame avaldada  $\pi$ :

$$\frac{2l}{d\pi} \approx \frac{m}{n} \Rightarrow \pi \approx \frac{2ln}{dm}.$$

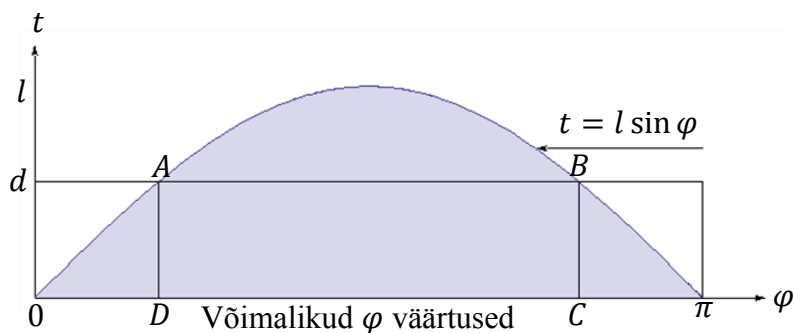
### 1.3. Kolmas juhtum: $l > d$

Ka sel juhul saab kõigi võimaluste hulka esitada võrratuste  $0 \leq t < d$  ja  $0 \leq \varphi \leq \pi$  abil, kusjuures soodsate võimaluste esitamisel saame kasutada võrratust  $0 \leq t \leq l \sin \varphi$ . Et  $d < l$ , siis paraku ei ole kogu kõvera  $t = l \sin \varphi$  alla jääv osa kõigi võimaluste hulka määrava nelinurga sees.



Joonis 1.6

Joonisel 1.7 on see ala jaotatud kolmeks osaks:



Joonis 1.7

Kõigepealt vaatame keskmist osa, ristkülikut  $ABCD$ . Selle ristküliku kõrgus on  $d$ ; aluse pikkuse leidmiseks tuleb leida lõigu  $AB$  pikkus. Selleks leiame joonte  $t = l \sin \varphi$  ja  $t = d$  lõikepunktid:

$$\begin{cases} t = l \sin \varphi \\ t = d \end{cases} \Rightarrow d = l \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{d}{l}.$$

Avaldades siit  $\varphi$ , saame piirkonnas  $0 \leq \varphi \leq \pi$  kaks võimalust:

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{d}{l} \text{ ja } \varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{d}{l}.$$

Saame lõigu  $AB$  pikkuse:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi - 2 \arcsin \frac{d}{l}.$$

Järelikult ristküliku  $ABCD$  pindala on

$$d \left( \pi - 2 \arcsin \frac{d}{l} \right).$$

Kuna kaks ülejäänud ala on kongruentsed, siis leiame kõvertrapetsi  $OAD$  pindala ja korrutame selle kahega.

$$\int_0^{\arcsin \frac{d}{l}} l \sin \varphi d\varphi = l \left[ 1 - \cos \left( \arcsin \frac{d}{l} \right) \right] = l \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} \right].$$

Seega, liites ristküliku  $ABCD$  pindalale kõvertrapetsi  $OAD$  kahekordse pindala, saame:

$$s = d \left( \pi - 2 \arcsin \frac{d}{l} \right) + 2l \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} \right).$$

Tabamise tõenäosus kui piirkondade pindalade suhe esitub järgmiselt:

$$p = \frac{d \left( \pi - 2 \arcsin \frac{d}{l} \right) + 2l \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} \right)}{\pi d}.$$

#### 1.4. Kokkuvõtte kolmest juhtumist

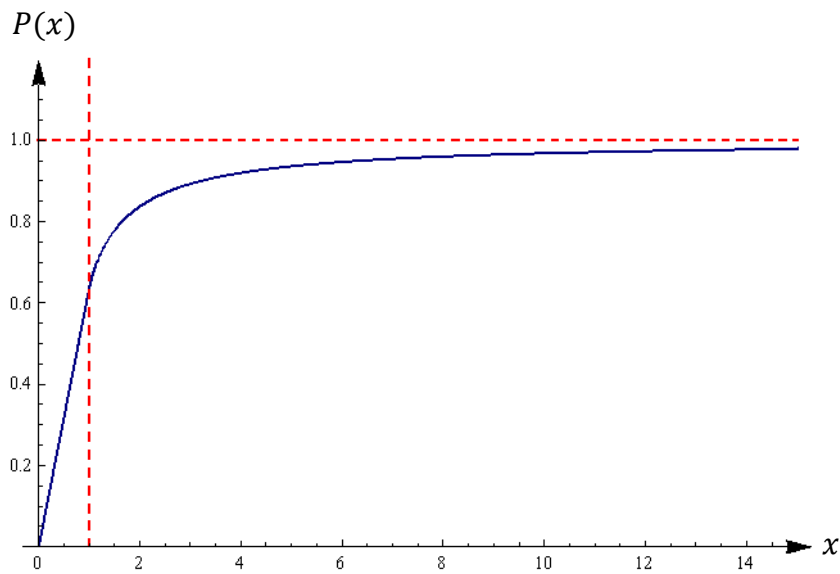
Eespool saime:

$$l \leq d \Rightarrow p = \frac{2l}{d\pi} \text{ ja } l \geq d \Rightarrow p = \frac{d \left( \pi - 2 \arcsin \frac{d}{l} \right) + 2l \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} \right)}{\pi d}.$$

Teeme asenduse  $\frac{l}{d} = x$  ja saame:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi}, & \text{kui } x \leq 1 \\ 1 - \frac{2 \arcsin \frac{1}{x}}{\pi} + \frac{2x}{\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right), & \text{kui } x > 1. \end{cases}$$

Funktsioon  $P(x)$  näitab, kuidas nõela lõikumise või puutumise tõenäosus sirgega sõltub nõela pikkusest ja sirgetevahelisest kaugusest. Saadud tulemust illustreerib joonis 1.8.

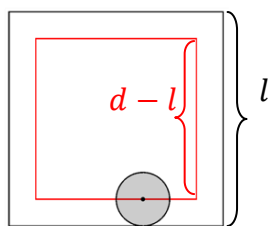


Joonis 1.8

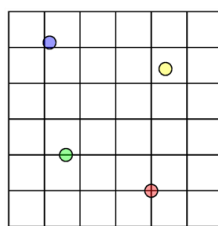
## 2. “CLEAN TILE ” PROBLEEM

“Clean Tile” ehk tühi plaat on mäng, mida uuris Buffon (1777) ja milles mängijad veavad kihla selle peale, kui mitut plaati korrapäraselt plaaditud põrandale visatud münt osaliselt katab. Eesmärk on leida selline münti diameeter, mille puhul sündmuse „münt jääb lebama ainult ühele plaadile“ tõenäosus oleks võrdne sündmuse „münt jääb lebama kahele või enamale plaadile“ tõenäosusega. Buffon uuris tõenäosusi kolmnurkadest, ruutudest, kuusnurkadest ja rombidest koosnevate regulaarsete parkettide puhul. Eeldame, et plaadi küljepikkus  $l$  on suurem kui münti läbimõõt  $d$ . Seega on ruutudest (kolmnurkadest; kuusnurkadest) koosneva parketi puhul mündil võimalus maanduda nii, et see katab osaliselt kas üks, kaks, kolm või neli (üks, kaks, kolm, neli või kuus; üks, kaks või kolm) plaati.

### 2.1. Ruutudest koosnev parkett



Joonis 2.1



Joonis 2.2

Vaatame joonist 2.1. Tõenäosus, et münt jääb lebama ainult ühele plaadile, esitub siin nende kahe ruudu pindalade suhtena:

$$P_1 = \frac{(l-d)^2}{l^2} = \left(1 - \frac{d}{l}\right)^2. \quad (1)$$

Sündmus „münt jääb lebama kahele või enamale plaadile“ on sündmuse „münt jääb lebama ainult ühele plaadile“ vastandsündmus. Järelikult saab selle sündmuse tõenäosuse leida vastandsündmuse tõenäosuse abil valemiga

$$P_{\geq 2} = 1 - P_1 = 1 - \left(1 - \frac{d}{l}\right)^2. \quad (2)$$

Selleks, et kahe mängija, kes veavad kihla münti kas ühele (juhtum 1) või kahele ja enamale (juhtum 2) plaadile langemise peale, võiduvõimalused oleksid võrdsed, peavad need

tõenäosused olema võrdsed. Münti diameetri leidmiseks võrdsustame tõenäosused (1) ja (2) ning avaldame  $d$ :

$$P_1 = P_{\geq 2},$$

$$\left(1 - \frac{d}{l}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{d}{l}\right)^2,$$

$$\frac{2d^2}{l^2} - \frac{4d}{l} = -1,$$

$$\frac{d^2 - 2ld}{l^2} = -\frac{1}{2},$$

$$2d^2 - 4ld + l^2 = 0.$$

Lahendame selle ruutvõrrandi  $d$  järgi:

$$d_{1,2} = \frac{4l \pm \sqrt{16l^2 - 8l^2}}{4} = \frac{4l \pm 2\sqrt{2}l}{4}.$$

$$d_1 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})l \text{ ja } d_2 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})l.$$

Kuna eeldame, et  $d < l$ , siis  $d_1$  lahendiks ei sobi. Saame:

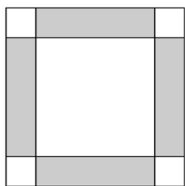
$$d_2 = d = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})l \approx 0,29289l. \quad (3)$$

Järeldus:

Ruudukujulisele parketile münti visates tuleb selleks, et mängijate võiduvõimalused oleksid võrdsed, valida niisugune münt, mille diameeter on määratud seosega

$$d = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})l.$$

Leiame ka tõenäosused, et münt jääb lebama kahele, kolmele või neljale plaadile. Vaatame joonist 2.3.

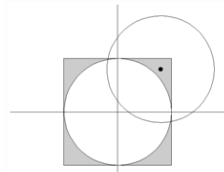


Joonis 2.3

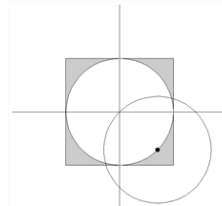
Selleks, et münt asetseks kahel plaadil, peab münti keskpunkt sattuma joonisel 2.3 värvitud piirkonda. Tõenäosus, et münt jääb lebama kahele plaadile, esitub värvitud kujundi pindala ja plaadi kogupindala suhtena.

Värvitud osa pindala on  $s = 2d(l - d)$  ja plaadi kogupindala on  $S = l^2$ . Saame tõenäosuse, et münt jääb lebama kahele plaadile:

$$P_2 = \frac{s}{S} = \frac{2d(l - d)}{l^2} = \frac{2dl - 2d^2}{l^2} = \frac{2d}{l} - \frac{2d^2}{l^2} = 2\frac{d}{l} \left(1 - \frac{d}{l}\right). \quad (4)$$



Joonis 2.4

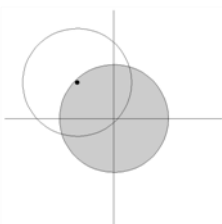


Joonis 2.5

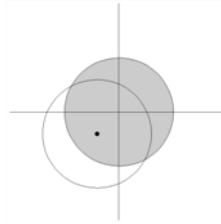
Selleks, et münt asetseks kolmel plaadil, peab münti keskpunkt sattuma joonistel 2.4 ja 2.5 värvitud piirkondadesse. Tõenäosus, et münt jääb lebama kolmele plaadile, esitub värvitud kujundi pindala ja plaadi kogupindala suhtena.

Värvitud osa pindala on  $s = d^2 - \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$  ja plaadi kogupindala on  $S = l^2$ . Saame tõenäosuse, et münt jääb lebama kolmele plaadile:

$$P_3 = \frac{s}{S} = \frac{d^2 - \pi\left(\frac{1}{2}d\right)^2}{l^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\pi\right) \frac{d^2}{l^2}. \quad (5)$$



Joonis 2.6



Joonis 2.7

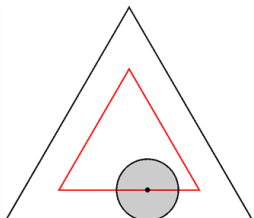
Selleks, et münt asetseks neljal plaadil, peab münt katma parkettruutude ristumiskohta ehk joonistel 2.6 ja 2.7 värvitud piirkondi. Tõenäosus, et münt jääb lebama neljale plaadile, esitub värvitud kujundi pindala ja plaadi kogupindala suhtena.

Värvitud osa pindala on  $s = \pi\frac{d^2}{4}$  ja plaadi kogupindala on  $S = l^2$ . Saame tõenäosuse, et münt jääb lebama neljale plaadile:

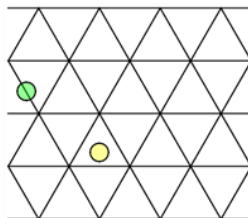


$$P_4 = \frac{s}{S} = \frac{\pi(\frac{1}{2}d)^2}{l^2} = \frac{1}{4}\pi \frac{d^2}{l^2}. \quad (6)$$

## 2.2. Võrdkülgsetest kolmnurkadest koosnev parkett

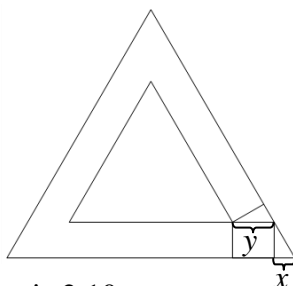


Joonis 2.8



Joonis 2.9

Et münt oleks tervenisti ühe parketiplaadi peal, peab münti keskpunkt jääma joonisel 2.8 punase kolmnurgaga tähistatud piirkonda või selle rajajoonele.



Joonis 2.10

Vaatame nüüd joonist 2.10 ja leiame otsitava tõenäosuse. Näeme, et väiksema kolmnurga külge on suurema kolmnurga küljest  $2(x + y)$  võrra lühem. Leiame, millega võrduvad  $x$  ja  $y$  ning avaldame  $2(x + y)$ :

$$\tan 60^\circ = \frac{d}{2x} \Rightarrow x = \frac{d}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}d}{6} \text{ ja } \sin 60^\circ = \frac{d}{2y} \Rightarrow y = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}d}{3},$$

$$2(x + y) = 2\left(\frac{\sqrt{3}d}{6} + \frac{\sqrt{3}d}{3}\right) = 2\left(\frac{3\sqrt{3}d}{6}\right) = \sqrt{3}d. \quad (7)$$

Võrdkülgsetest kolmnurkadest küljepikkusega  $l$  koosneva parketi puhul on tõenäosus, et münt diameetriga  $d$  jääb lebama ühele plaadile (joonisel 2.9 kollane ketas), leitav järgmisest valemist:

$$P_1 = \frac{(1 - \sqrt{3}d)^2}{l^2} = \left(1 - \sqrt{3}\frac{d}{l}\right)^2. \quad (8)$$

Sündmus „münt jääb lebama kahele või enamale plaadile“ on sündmuse „münt jääb lebama ainult ühele plaadile“ vastandsündmus. Järelikult saab selle sündmuse tõenäosuse leida vastandsündmuse tõenäosuse abil valemiga

$$P_{\geq 2} = 1 - P_1 = 1 - \left(1 - \sqrt{3} \frac{d}{l}\right)^2. \quad (9)$$

Et mäng oleks aus kahe mängija vahel, kes veavad kihla münti kas ühele (juhtum 1) või kahele ja enamale (juhtum 2) kolmnurksele plaadile langemise peale, peavad need tõenäosused olema võrdsed. Münti diameetri leidmiseks võrdsustame tõenäosused (8) ja (9) ning avaldame  $d$ :

$$P_1 = P_{\geq 2},$$

$$\left(1 - \sqrt{3} \frac{d}{l}\right)^2 = 1 - \left(1 - \sqrt{3} \frac{d}{l}\right)^2,$$

$$2\left(1 - \sqrt{3} \frac{d}{l}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{3d^2 - 2\sqrt{3}ld}{l^2} = -\frac{1}{2},$$

$$6d^2 - 4\sqrt{3}ld + l^2 = 0.$$

Lahendame selle ruutvõrrandi  $d$  järgi:

$$d_{1,2} = \frac{4\sqrt{3}l \pm \sqrt{48l^2 - 24l^2}}{12} = \frac{4\sqrt{3}l \pm 2\sqrt{6}l}{12} = \frac{1}{6}(2\sqrt{3} \pm \sqrt{6})l.$$

$$d_1 = \frac{1}{6}(2\sqrt{3} + \sqrt{6})l \text{ ja } d_2 = \frac{1}{6}(2\sqrt{3} - \sqrt{6})l.$$

Kuna eeldame, et  $d < l$ , siis  $d_1$  lahendiks ei sobi. Saame:

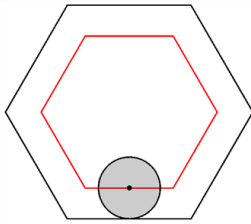
$$d_2 = d = \frac{1}{6}(2\sqrt{3} - \sqrt{6})l \approx 0,16910l. \quad (10)$$

Järeldus:

Võrdkülgetest kolmnurkadest koosnevale parketile münti visates tuleb selleks, et mängijate võiduvõimalused oleksid võrdsed, valida niisugune münt, mille diameeter on määratud seosega

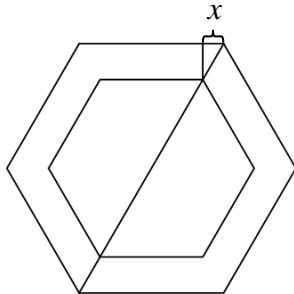
$$d = \frac{1}{6}(2\sqrt{3} - \sqrt{6})l.$$

### 2.3. Korrapärastest kuusnurkadest koosnev parkett



Joonis 2.11

Vaatame joonist 2.11. Leiame tõenäosuse, et korrapärastest kuusnurkadest moodustatud parketi puhul, kus plaadi küljepikkus on  $l$ , münt läbimõõduga  $d$  jääb lebama ainult ühele plaadile.



Joonis 2.12

Jooniselt 2.12 näeme, et väiksema kuusnurga külg on suurema kuusnurga küljest  $2x$  võrra lühem. Leiame, millega võrdub  $x$  ja avaldame  $2x$ :

$$\tan 60^\circ = \frac{d}{2x} \Rightarrow x = \frac{d}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}d}{6},$$

$$2x = \frac{\sqrt{3}d}{3}. \quad (11)$$

Tõenäosus, et münt jääb lebama ainult ühele plaadile, on leitav järgmisest valemist:

$$P_1 = \frac{(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}d)^2}{l^2} = (1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\frac{d}{l})^2. \quad (12)$$

Sündmus „münt jääb lebama kahele või enamale plaadile“ on sündmuse „münt jääb lebama ainult ühele plaadile“ vastandsündmus. Järelikult saab selle sündmuse tõenäosuse leida vastandsündmuse tõenäosuse abil valemiga

$$P_{\geq 2} = 1 - P_1 = 1 - (1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\frac{d}{l})^2. \quad (13)$$

Et mäng oleks aus kahe mängija vahel, kes veavad kihla mündi kas ühele (juhtum 1) või kahele ja enamale (juhtum 2) korrapärasele kuusnurksele plaadile langemise peale, peavad need tõenäosused olema võrdsed. Mündi diameetri leidmiseks võrdsustame tõenäosused (12) ja (13) ning avaldame  $d$ :

$$\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\frac{d}{l}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\frac{d}{l}\right)^2,$$

$$2\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\frac{d}{l}\right)^2 = 1,$$

$$1 - \frac{2\sqrt{3}d}{3l} + \frac{3d^2}{9l^2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{d^2 - 2\sqrt{3}ld}{3l^2} = -\frac{1}{2},$$

$$2d^2 - 4\sqrt{3}ld + 3l^2 = 0.$$

Lahendame selle ruutvõrrandi  $d$  järgi:

$$d_{1,2} = \frac{4\sqrt{3}l \pm \sqrt{48l^2 - 24l^2}}{4} = \frac{4\sqrt{3}l \pm 2\sqrt{6}l}{4} = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} \pm \sqrt{6})l,$$

$$d_1 = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{6})l \text{ ja } d_2 = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - \sqrt{6})l.$$

Kuna eeldame, et  $d < l$ , siis  $d_1$  lahendiks ei sobi. Saame:

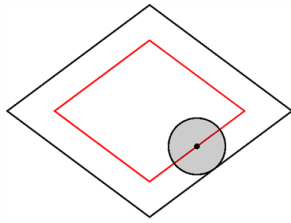
$$d_2 = d = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - \sqrt{6})l \approx 0,50730l. \tag{14}$$

Järeldus:

Võrdkülgsetest kuusnurkadest koosnevale parketile münti visates tuleb selleks, et mängijate võiduvõimalused oleksid võrdsed, valida niisugune münt, mille diameeter on määratud seosega

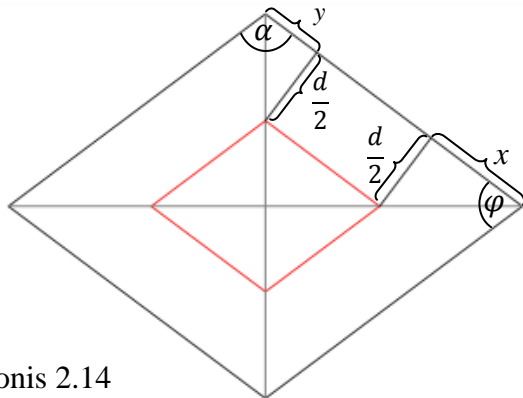
$$d = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - \sqrt{6})l.$$

## 2.4. Rombidest koosnev parkett



Joonis 2.13

Vaatame joonist 2.13. Olgu rombi külgedevaheline nürinurk  $\alpha$  ja teravnurk  $\varphi$ . Leiame tõenäosuse, et rombide moodustatud parketi puhul, kus plaadi küljepikkus on  $l$ , münt läbimõõduga  $d$  jääb lebama ainult ühele plaadile.



Joonis 2.14

Vaatame joonist 2.14 Väiksema rombi külg on suurema rombi küljest  $x + y$  võrra lühem. Leiame  $x$  ja  $y$  ning avaldame  $x + y$ :

$$x = \frac{d}{2} \cot \frac{\varphi}{2},$$

$$y = \frac{d}{2} \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2} \cot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{d}{2},$$

$$x + y = \frac{d}{2} \left( \cot \frac{\varphi}{2} + \tan \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{d}{2} \left( \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{d}{\sin \varphi}. \quad (15)$$

Tõenäosus, et münt jääb lebama ainult ühele plaadile, on leitav järgmisest valemist:

$$P_1 = \frac{\left( l - \frac{d}{\sin \varphi} \right)^2}{l^2} = \left( 1 - \frac{d}{l \sin \varphi} \right)^2. \quad (16)$$

Sündmus „münt jääb lebama kahele või enamale plaadile“ on sündmuse „münt jääb lebama ainult ühele plaadile“ vastandsündmus. Järelikult saab selle sündmuse tõenäosuse leida vastandsündmuse tõenäosuse abil valemiga

$$P_{\geq 2} = 1 - \left(1 - \frac{d}{l \sin \varphi}\right)^2. \quad (17)$$

Et mäng oleks aus kahe mängija vahel, kes veavad kihla münti kas ühele (juhtum 1) või kahele ja enamale (juhtum 2) plaadile langemise peale, peavad need tõenäosused olema võrdsed. Münti diameetri leidmiseks võrdsustame tõenäosused (16) ja (17) ning avaldame  $d$ :

$$P_1 = P_{\geq 2},$$

$$\left(1 - \frac{d}{l \sin \varphi}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{d}{l \sin \varphi}\right)^2,$$

$$2 \left(1 - \frac{d}{l \sin \varphi}\right)^2 = 1,$$

$$2 - \frac{4d}{l \sin \varphi} + \frac{2d^2}{(l \sin \varphi)^2} - 1 = 0,$$

$$2d^2 - 4d l \sin \varphi + (l \sin \varphi)^2 = 0.$$

Lahendame selle ruutvõrrandi  $d$  järgi:

$$d_{1,2} = \frac{4l \sin \varphi \pm \sqrt{16(l \sin \varphi)^2 - 8(l \sin \varphi)^2}}{4},$$

$$d_{1,2} = l \sin \varphi \pm \frac{\sqrt{2}}{2} l \sin \varphi.$$

$$d_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) l \sin \varphi \text{ ja } d_2 = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) l \sin \varphi.$$

Kuna eeldame, et  $d < l$ , siis  $d_1$  lahendiks ei sobi. Saame:

$$d_2 = d = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) l \sin \varphi. \quad (18)$$

Järeldus:

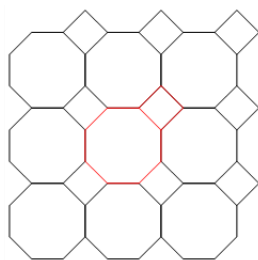
Rombidest koosnevale parketile münti visates tuleb selleks, et mängijate võiduvõimalused oleksid võrdsed, valida niisugune münt, mille diameeter on määratud seosega

$$d = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) l \sin \varphi.$$

Erijuhul, kui  $\varphi = 90^\circ$ , saame ruudu puhul leitud seaduspärasuse  $d = (2 - \sqrt{2})l$ .

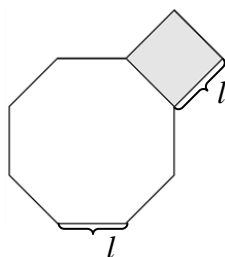
## 2.5. Korrapärastest kaheksanurkadest ja ruutudest koosnev parkett

Vaatleme semiregulaarset parketti, mille plaatideks on korrapärased kaheksanurgad ja ruudud.

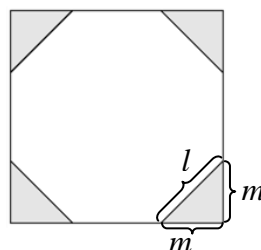


Joonis 2.15

Selleks, et arvutada Buffoni nõelaülesande puhul vaja minevaid pindalasid, vaatleme joonisel 2.16 kujutatud kaheksanurgast ja ruudust koosnevat vähimat parketi osa, millest saab laduda kogu tasandit täitva parketi.



Joonis 2.16



Joonis 2.17

Kõigepealt leiame joonisel 2.16 kujutatud plaatide pindalade summa. Kuna joonistel 2.16 ja 2.17 olevad kujundid on pindvõrdsed, siis arvutame selle pindala joonise 2.17 abil.

Pythagorase teoreemist saame:  $m = \frac{l}{\sqrt{2}}$ .

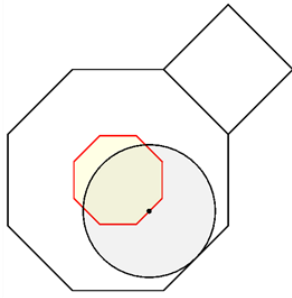
Olgu joonisel 2.16 olevate plaatide pindalade summa  $S_{\Sigma}$ . Siis  $S_{\Sigma} = (2m + l)^2$ .

$$S_{\Sigma} = l^2(1 + \sqrt{2})^2. \quad (19)$$

Meid huvitab tõenäosus, et antud parketi puhul (joonis 2.15), kus plaadi küljepikkus on  $l$ , münt läbimõõduga  $d$  jääb lebama ainult ühele plaadile. Vaatleme kahte võimalust:

$$d > l \text{ ja } d < l.$$

### 2.5.1. Esimene juhtum: $d > l$

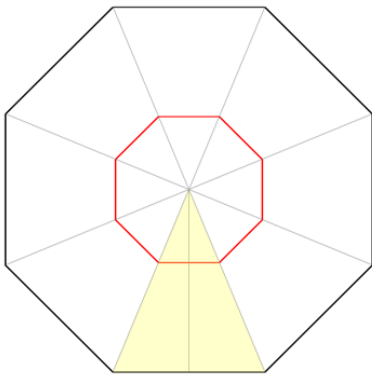


Joonis 2.18

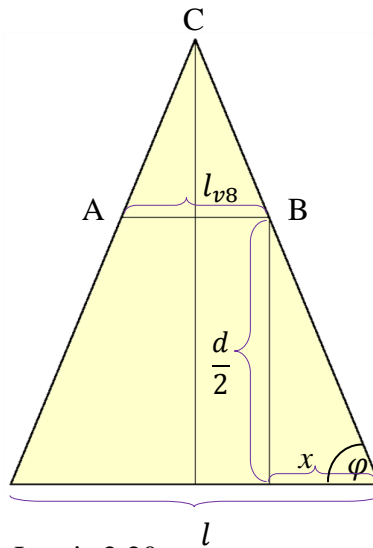
Valemis (19) saime, et plaatide pindalade summa on  $S_{\Sigma} = l^2(1 + \sqrt{2})^2$ . Lahutades sellest ruudu pindala, saame suure kaheksanurga pindala:

$$S_{s8} = l^2(1 + \sqrt{2})^2 - l^2 = 2l^2(1 + \sqrt{2}). \quad (20)$$

Selleks, et münt oleks tervenisti ühe parketiplaadi peal, peab münti keskpunkt jääma joonisel 2.18 kujutatud väiksema kaheksanurga sisse või selle rajajonele. Leiame väiksema kaheksanurga pindala. Selleks on vaja leida väikese kaheksanurga külge  $l_{v8}$  ning selle kaudu saame avaldada väikese kaheksanurga pindala  $S_{v8}$ , kui asendame valemis (20) külje  $l$  pikkuse külje  $l_{v8}$  pikkusega.



Joonis 2.19



Joonis 2.20

Leiame väikese kaheksanurga külje  $l_{v8}$  pikkuse:

$$\varphi = 67,5^\circ \Rightarrow \tan \varphi = \frac{d}{2x},$$



$$\tan \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{1 - \cos(180^\circ - 45^\circ)}{\sin(180^\circ - 45^\circ)} = \frac{1 + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2x},$$

$$2x = \frac{d\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2} = d(\sqrt{2} - 1).$$

$$l_{v8} = l - d(\sqrt{2} - 1).$$

Saame väikese kaheksanurga pindala:

$$S_{v8} = 2(l - d(\sqrt{2} - 1))^2 (1 + \sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})(l^2 - 2ld(\sqrt{2} - 1) + d^2(\sqrt{2} - 1)^2),$$

$$S_{v8} = 2(1 + \sqrt{2})l^2 - 4(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)ld + 2(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)^2 d^2,$$

$$S_{v8} = 2(1 + \sqrt{2})l^2 - 4ld + 2d^2(\sqrt{2} - 1).$$

Arvutame juhtumi „münt jääb lebama ainult ühele plaadile“ tõenäosuse:

$$P_1 = \frac{S_{v8}}{S_{\Sigma}} = \frac{2(1 + \sqrt{2})l^2 - 4ld + 2d^2(\sqrt{2} - 1)}{l^2(1 + \sqrt{2})^2}. \quad (21)$$

Leiame tõenäosuse, et münt jääb lebama kahele või enamale plaadile:

$$P_{\geq 2} = 1 - \frac{2(1 + \sqrt{2})l^2 - 4ld + 2d^2(\sqrt{2} - 1)}{l^2(1 + \sqrt{2})^2}. \quad (22)$$

Et mäng oleks aus kahe mängija vahel, kes veavad kihla münti kas ühele (juhtum 1) või kahele ja enamale (juhtum 2) plaadile langemise peale, peavad need tõenäosused olema võrdsed. Münti diameetri leidmiseks võrdsustame tõenäosused (21) ja (22) ning avaldame  $d$ :

$$P_1 = P_{\geq 2},$$

$$\frac{2(1 + \sqrt{2})l^2 - 4ld + 2d^2(\sqrt{2} - 1)}{l^2(1 + \sqrt{2})^2} = 1 - \frac{2(1 + \sqrt{2})l^2 - 4ld + 2d^2(\sqrt{2} - 1)}{l^2(1 + \sqrt{2})^2},$$

$$\frac{2(1 + \sqrt{2})l^2 - 4ld + 2d^2(\sqrt{2} - 1)}{l^2(1 + \sqrt{2})^2} = \frac{1}{2},$$

$$4l^2 + 4\sqrt{2}l^2 - 8ld + 4\sqrt{2}d^2 - 4d^2 - l^2 - 2\sqrt{2}l^2 - 2l^2 = 0,$$

$$(4\sqrt{2} - 4)d^2 - 8ld + (1 + 2\sqrt{2})l^2 = 0.$$

Lahendame saadud ruutvõrrandi  $d$  järgi:

$$d_{1,2} = \frac{8l \pm \sqrt{64l^2 - 4(4\sqrt{2} - 4)(1 + 2\sqrt{2})l^2}}{2(4\sqrt{2} - 4)},$$

$$d_{1,2} = \frac{8l \pm \sqrt{64l^2 + 16(-3 + \sqrt{2})l^2}}{2(4\sqrt{2} - 4)},$$

$$d_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2\sqrt{2} - 2} l,$$

$$d_{1,2} = \left( \sqrt{2} + 1 \pm \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \right) l.$$

$$d_1 = \left( \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \right) l \approx 4.28978l,$$

$$d_2 = \left( \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \right) l \approx 0.538642l.$$

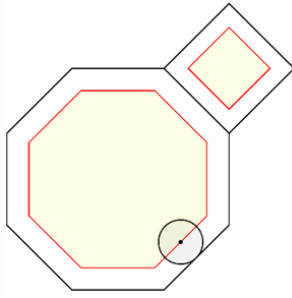
Kuna eeldame, et  $d > l$ , siis  $d_2$  lahendiks ei sobi. Paraku ei sobi lahendiks ka  $d_1$ , sest see on suurem kui kaheksanurga siseringjoone diameeter  $D_{s8}$ .

$$D_{s8} = 2 \frac{\frac{1}{2}l}{\tan \frac{\pi}{8}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}} = \frac{l}{\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2} + 1)l \approx 2.41421l$$

Järeldus:

Ei ole olemas sellise diameetriga münti ( $d > l$ ), mida saab visata korrapärastest kaheksanurkadest ja ruutudest koosnevale semiregulaarsele parketile nii, et mängijate võiduvõimalused oleksid võrdsed.

### 2.5.2. Teine juhtum: $d < l$



Joonis 2.21

Joonisel 2.21 oleva kujundi kogupindala on leitud punktis 2.5.1. ja see on  $S_{\Sigma} = l^2(1 + \sqrt{2})^2$ . Et münt oleks tervenisti ühe parketiplaadi peal, peab münti keskpunkt jääma joonisel 2.21 väiksema kaheksanurga või väiksema ruuduga tähistatud piirkonda või selle rajajoonele. Punktis 2.5.1. leidsime väiksema kaheksanurga pindala:

$$S_{v8} = 2(1 + \sqrt{2})l^2 - 4ld + 2d^2(\sqrt{2} - 1).$$

Selleks, et leida kogu soodsate võimaluste piirkonna pindala, tarvitseb meil väikese kaheksanurga pindalale liita väikese ruudu pindala.

Olgu suure ruudu külg  $l$  ja väikese ruudu külg  $l_{v4}$ . Jooniselt 2.21 saame:

$$l_{v4} = l - d.$$

Seega, väikese ruudu pindala on

$$S_{v4} = l_{v4}^2 = (l - d)^2 = l^2 - 2ld + d^2.$$

Saame soodsate võimaluste piirkonna pindala, mis on väikese kaheksanurga pindala ja väikese ruudu pindala summa:

$$S_{v8+v4} = S_{v8} + S_{v4} = 2(1 + \sqrt{2})l^2 - 4ld + 2d^2(\sqrt{2} - 1) + l^2 - 2ld + d^2,$$

$$S_{v8+v4} = (3 + 2\sqrt{2})l^2 - 6ld + (2\sqrt{2} - 1)d^2.$$

Arvutame juhtumi „münt jääb lebama ainult ühele plaadile“ tõenäosuse:

$$P_1 = \frac{S_{v8+v4}}{S_{\Sigma}} = \frac{(3 + 2\sqrt{2})l^2 - 6ld + (2\sqrt{2} - 1)d^2}{l^2(1 + \sqrt{2})^2}. \quad (23)$$

Leiame tõenäosuse, et münt jääb lebama kahele või enamale plaadile:

$$P_{\geq 2} = 1 - \frac{(3 + 2\sqrt{2})l^2 - 6ld + (2\sqrt{2} - 1)d^2}{l^2(1 + \sqrt{2})^2}. \quad (24)$$

Et mäng oleks aus kahe mängija vahel, kes veavad kihla mündi kas ühele (juhtum 1) või kahele ja enamale (juhtum 2) plaadile langemise peale, peavad need tonenosused olema võrdsed. Mündi diameetri leidmiseks võrdsustame tonenosused (23) ja (24) ning avaldame  $d$ :

$$P_1 = P_{\geq 2},$$

$$\frac{(3 + 2\sqrt{2})l^2 - 6ld + (2\sqrt{2} - 1)d^2}{l^2(1 + \sqrt{2})^2} = 1 - \frac{(3 + 2\sqrt{2})l^2 - 6ld + (2\sqrt{2} - 1)d^2}{l^2(1 + \sqrt{2})^2},$$

$$\frac{(3 + 2\sqrt{2})l^2 - 6ld + (2\sqrt{2} - 1)d^2}{l^2(1 + \sqrt{2})^2} = \frac{1}{2},$$

$$6l^2 + 4\sqrt{2}l^2 - 12ld + 4d^2\sqrt{2} - 2d^2 - l^2(1 + \sqrt{2})^2 = 0,$$

$$(4\sqrt{2} - 2)d^2 - 12ld + (3 + 2\sqrt{2})l^2 = 0.$$

Lahendame saadud ruutvorrandi  $d$  järgi:

$$d_{1,2} = \frac{12l \pm \sqrt{144l^2 - 4(4\sqrt{2} - 2)(3 + 2\sqrt{2})l^2}}{2(4\sqrt{2} - 2)},$$

$$d_{1,2} = \frac{12l \pm \sqrt{144l^2 + (-40 - 32\sqrt{2})l^2}}{2(4\sqrt{2} - 2)},$$

$$d_{1,2} = \frac{12l \pm l\sqrt{104 - 32\sqrt{2}}}{2(4\sqrt{2} - 2)},$$

$$d_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{26 - 8\sqrt{2}}}{(4\sqrt{2} - 2)}l.$$

$$d_1 = \frac{6 - \sqrt{26 - 8\sqrt{2}}}{4\sqrt{2} - 2}l \approx 0.592786l \text{ ja } d_2 = \frac{6 + \sqrt{26 - 8\sqrt{2}}}{4\sqrt{2} - 2}l \approx 2.68872l.$$

Kuna eeldame, et  $d < l$ , siis  $d_2$  lahendiks ei sobi. Saame:

$$d_1 = d = \frac{6 + \sqrt{26 - 8\sqrt{2}}}{4\sqrt{2} - 2}l.$$

Järeldus:

Kui visata münti ( $d < l$ ) semiregulaarsele parketile, mis koosneb korrapärastest

kaheksanurkadest ja ruutudest, siis selleks, et mängijate võiduvõimalused oleksid võrdsed, tuleb valida niisugune münt, mille diameeter on määratud seosega

$$d = \frac{6 + \sqrt{26 - 8\sqrt{2}}}{4\sqrt{2} - 2} l.$$

## KOKKUVÕTE

Käesolevas bakalaureusetöös sai uuritud Buffoni nõela- ja mündiülesannet.

Esimeses paragrahvis sai tutvutud Buffoni nõelaülesande kolme erijuhtumiga. Eriti huvitavaks, just lahenduskäigu, mitte tulemuse pärast, osutus kolmas juhtum, kus nõela pikkus  $l$  oli suurem kui paralleelsete sirgete vaheline kaugus  $d$ . Töös sai esitatud Buffoni nõelaülesande valemite detailsed tuletuskäigud kõigil kolmel juhul koos seletustega. Juhtumil, kus nõela pikkus  $l$  ja sirgetevaheline kaugus  $d$  olid võrdsed, sai korraldatud eksperiment, milles töö autor lasi nõelal 2000 korda kukkuda joonitud paberile. Arvestades Monte Carlo meetodi aeglast koondumist, võib öelda, et eksperimendi tulemused vastasid üldjoontes oodatule.

Teises paragrahvis sai vaadeldud „Clean Tile“ probleemi ehk Buffoni mündiülesannet, mille puhul mündil diameetriga  $d$  lastakse kukkuda regulaarsele parketile, kus parketiplaadi külje pikkus on  $l$ . Seejärel määratakse, millise mündi diameetri  $d$  korral on sündmuste „münt jääb lebama ainult ühele parketiplaadile“ ja „münt jääb lebama kahele või enamale parketiplaadile“ tõenäosused võrdsed. Buffoni mündiülesanne sai lahendatud erineva kujuga (ruut, võrdkülgne kolmnurk, korrapärase kuusnurk, romb) regulaarsete parkettide korral. Algmaterjaliks olnud Mathworldi veebileheküljel [5] on need tulemused olemas, käesolevas töös sai esitatud ka valemite detailne tuletuskäik koos selgitustega.

Selgus, et Buffoni mündiülesannet saab lahendada ka semiregulaarsete parkettide puhul, kuid töö autoril ega tema juhendajal ei õnnestunud raamatutest, artiklitest ega veebilehekülgedelt ühtegi niisugust lahendust leida. Käesolevas töös sai Buffoni mündiülesanne lahendatud ka ühe semiregulaarse parketi puhul – vaadeldi kaheksanurkadest ja ruutudest koosnevat semiregulaarset parketti.

# BUFFON'S NEEDLE AND COIN PROBLEM

Kairiin Kütt

## SUMMARY

The subject of the thesis was Buffon's needle and coin problem.

The first paragraph gives an overview of the three different cases of the Buffon needle problem. Most interesting of them turned out to be the third case, where the length of the needle  $l$  is greater than the distance  $d$  between two parallel lines, mostly because of the way the solution was reached. The solution for each case is presented with a step-by-step overview of how the final formula was derived, with detailed explanations for each step. For the case where the length of the needle is equal to the distance between the lines, an experiment was also performed by the author by letting the needle fall 2000 times on the lined paper and analyzing the results. Taking into account the Monte Carlo method's slow rate of convergence, the results were generally consistent with overall expectations.

The second paragraph deals with the „Clean Tile Problem“, or Buffon coin problem, where a coin with a diameter  $d$  is dropped on a surface covered with a regular pattern of tiles of uniform shape and size, and the length of each side of a tile is  $l$ . The problem is analyzed in several cases, for differently shaped tiles (square, equilateral triangle, regular hexagon, rhombus). In each case, the aim is to find the diameter  $d$  of the coin, so that the probabilities of the events  $A$ (coin lands on only one tile) and  $B$ (coin lands on two or more tiles) are equal. The solutions can be found on the Mathworld web page [5] that was used as a source, but the thesis also contains detailed derivation of the formulas with explanations.

It appeared that the Buffon coin problem can also be solved for semi-regular tile patterns, but neither the author nor the instructor could find any source material about such solutions from books, articles or web pages. This thesis contains a solution for one such semi-regular pattern, consisting of octagons and squares.

## KASUTATUD KIRJANDUS

1. Kunkel, Paul. *Buffon's Needle*. [WWW]  
<http://whistleralley.com/buffon/buffon.htm>  
(16.mai.2011)
2. Kunkel, Paul. *Buffon's Needle. What if  $d < l$ ?* [WWW]  
<http://whistleralley.com/buffon/solve/solution.htm>  
(16.mai.2011)
3. Lepikult, Toomas. *Vahemikhinnangud*. [PowerPoint esitlus]  
[enos.itcollege.ee/~lepikult/statistika/Vahemikhinnangud.ppt](http://enos.itcollege.ee/~lepikult/statistika/Vahemikhinnangud.ppt)  
(16.mai.2011)
4. MathWorld, Buffon's Needle [WWW]  
<http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html>  
(16.mai.2011)
5. MathWorld, *Clean Tile Problem* [WWW]  
<http://mathworld.wolfram.com/CleanTileProblem.html>  
(16.mai.2011)
6. Reese, George. *Buffon's Needle. What if  $d > l$ ? An Analysis and Simulation* [WWW]  
<http://mste.illinois.edu/reese/buffon/buffon.html>  
(16.mai.2011)
7. Uspensky, J.V. *Introduction to Mathematical Probability*, New York, London, 1937,  
251-252.
8. Wikipedia, *Buffon's Needle*. [WWW]  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Buffon%27s\\_needle](http://en.wikipedia.org/wiki/Buffon%27s_needle)  
(16.mai.2011)