Ujuja trajektoori võrrand (versioon 2 diferentsiaalvõrrandite analüütilise lahendamise abil)

Järgnev valemite tuletuskäik on võetud allikast:

https://answers.yahoo.com/question/index?qid=20081023044325AAVQb0z
Kirjutasin sealoleva tuletuskäigu detailsemalt eesti keeles lahti, kõrvaldasin tähistuses olnud vastuolud ja parandasin ühe pisivea.

Ujuja ujub üle jõe laiusega *s*, ta ujumise kiirus seisvas vees on v_u, jõe voolu kiirus on v_j. Ujuja väljub punktist *A* ja suundub otse selle punkti vastas olevasse punkti *B*, mis asub punktist *A* samuti kaugusel *s*. Ujuja suundub kogu aeg punkti *B* suunas. Leida ujuja trajektoori võrrand, tema poolt läbitud tee pikkus ja trajektoori mööda ujumiseks kulunud aeg.

Selleks, et liikumise võrrandid tuleksid võimalikult lihtsad, olgu lähtepunkti *A* koordinaadid (0; s) ja ujuja liikugu punkti *B*(0; 0) suunas. Siis on suunavektor suunatud alati koordinaatide alguspunkti poole ja me saame seda esitada võimalikult lihtsal kujul. Jõgi voolaku *y*-teljega paralleelses suunas. Suvalisel ajahetkel olgu *x* ujuja asukoha *x*-koordinaat ja *y* olgu ujuja asukoha *y*-koordinaat.

Need asukoha koordinaadid ja sõltuvad ajast *t* ja kahest kiirusest - jõe voolu kiirusest v_j ning ujuja kiirusest paigalseisvas vees v_u. Mõlemad kiirused on vektorid, mis on pikkuselt konstantsed. Jõe voolu kiiruse vektori suund on alati sama mis *y*-teljel, ujuja kiirusevektor on alati suunatud koordinaatide alguspunkti poole ja moodustab *y*-teljega vastupidise suunaga alati nurga β. Liikumise alghetkel on see nurk 0°, aga olenevalt jõe voolu kiiruse ja ujuja kiiruse suhtest võib see nurk suureneda kuni 90°-ni.

Ujuja kiiruse *y*-komponent esitub kujul:

$$\frac{dy}{dt} = -v_u \sin\beta = -v_u \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ujuja kiiruse *x*-komponent esitub kujul

$$\frac{dx}{dt} = v_j - v_u \cos\beta = v_j - v_u \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Jagame teise võrrandi esimese võrrandiga, nii vabaneme suurusest *dt*:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_j - v_u \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-v_u \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{x}{y} - \frac{v_j\sqrt{x^2+y^2}}{v_u \cdot y} = \frac{x}{y} - \frac{v_j}{v_u}\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}.$$

Et saadud võrrandis on suurus $\frac{x}{y}$, siis muutujate arvu vähendamiseks teeme muutujavahetuse $u = \frac{x}{y}$:

$x = u \cdot y$ ja $dx = u \cdot dy + y \cdot du$, siis $\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$.

Selle muutujavahetusega saab diferentsiaalvõrrand kuju $y\frac{du}{dy} = -\frac{v_j}{v_u}\sqrt{u^2+1}.$

Tegemist on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga, eraldame muutujad: $\frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = -\frac{v_j}{v_u}\frac{dy}{y}.$

Mõlemat poolt integreerides saame:

$a\sinh(u) = -\frac{v_j}{v_u}\ln(y) + C_1$, kus C_1 on määramata konstant.

Teiselt poolt, kasutame võrdust $a\sinh(u) = \ln(u+\sqrt{1+u^2})$ ja viime $\frac{v_j}{v_u}$ paremal poolel logaritmi alla, saame

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln(y^{-\frac{v_j}{v_u}}) + C_1 = \ln(y^{-\frac{v_j}{v_u}}) + \ln C = \ln(Cy^{-\frac{v_j}{v_u}}).$$

Siit $u+\sqrt{1+u^2}=Cy^{-\frac{v_j}{v_u}}$. Viime u teisele poole võrdusmärki ja tõstame mõlemad pooled ruutu:

$\sqrt{1+u^2}=Cy^{-\frac{v_j}{v_u}}-u$ ja $1+u^2=C^2y^{-\frac{2v_j}{v_u}}-2Cuy^{-\frac{v_j}{v_u}}+u^2$.

Siit taandame u^2 ja avaldame suuruse u:

$$C^2y^{-\frac{2v_j}{v_u}}-1=2Cuy^{-\frac{v_j}{v_u}},$$

$$u=\frac{Cy^{-\frac{v_j}{v_u}}-\frac{1}{C}y^{\frac{v_j}{v_u}}}{2}.$$

Nüüd pannes u asemele $\frac{x}{y}$, saame:

$$\frac{x}{y}=\frac{Cy^{-\frac{v_j}{v_u}}-\frac{1}{C}y^{\frac{v_j}{v_u}}}{2}.$$

Siit $x=y\dfrac{Cy^{-\frac{v_j}{v_u}}-\frac{1}{C}y^{\frac{v_j}{v_u}}}{2}$ ja $x=\dfrac{Cy^{1-\frac{v_j}{v_u}}-\frac{1}{C}y^{1+\frac{v_j}{v_u}}}{2}$.

See on diferentsiaalvõrrandi üldlahend. Asendame siin kiiruste v_j ja v_u suhte konstandiga r: $r=\frac{v_j}{v_u}$

Saame $x=\dfrac{Cy^{1-r}-\frac{1}{C}y^{1+r}}{2}$.

Asendades erilahendi (kui $x=0$, siis $y=s$) diferentsiaalvõrrandi lahendisse, saame määrata konstandi *C:*

$0=\dfrac{Cs^{1-r}-\frac{1}{C}s^{1+r}}{2}$, siit $C^2=s^{(1+r-1+r)}=s^{2r}$.

Seega $C=s^r=s^{\frac{v_j}{v_u}}$.

Lahend, mis rahuldab ülesande algtingimusi, on seega $x=\dfrac{s^ry^{1-r}-s^{-r}y^{1+r}}{2}$.

Sama asi algparameetrite abil: $x=\dfrac{s^{\frac{v_j}{v_u}}y^{1-\frac{v_j}{v_u}}-s^{-\frac{v_j}{v_u}}y^{1+\frac{v_j}{v_u}}}{2}$.

Paneme tähele, et konkreetsed trajektoorid ei sõltu jõe voolu kiirusest v_j ja ujuja kiirusest v_u ja vaid sõltuvad nende kiiruste suhtest $\frac{v_j}{v_u}=r$.

Tulemusena oleme saanud trajektooride võrrandid, mis esituvad kujul: $x=g(y)$.

Kui tahta neid graafikuid esitada tavapärasel kujul $y=f(x)$ olevate funktsioonide graafikute abil, siis tuleks vahetada suuruste x ja y tähised. Nii saame valemid:

$y=\dfrac{s^rx^{1-r}-s^{-r}x^{1+r}}{2}$ ja $y=\dfrac{s^{\frac{v_j}{v_u}}x^{1-\frac{v_j}{v_u}}-s^{-\frac{v_j}{v_u}}x^{1+\frac{v_j}{v_u}}}{2}$.