

Tallinna Ülikool
Loodus- ja terviseteaduste instituut

Kosmoloogia

Lühikonspekt

Liisi Räim, Romi Mankin, Tõnu Laas

2016-2019

Sisukord

1 Sissejuhatus.....	4
1.1 Mis on kosmoloogia? Kosmoloogia ajaloost kuni Newtonini.....	4
1.2 Kosmoloogia Newtonist Hubble'ini.....	7
1.3 Tänapäevaste kosmoloogiliste mudelite vaatluslikud ja teoreetilised alused.....	9
2 Newtoni kosmoloogia.....	12
2.1 Hubble'i seadus.....	12
2.2 Kriitiline tihedus.....	16
2.3 Universumi evolutsiooni põhijooni kriitilise tiheduse korral.....	22
3 Universumi kui terviku struktuur.....	25
3.1 Universumi kui terviku geomeetriline struktuur.....	25
3.2 Meetrika tasases aeg-ruumis.....	28
3.3 Meetrika kõveras aeg-ruumis ja Einsteini võrrandid.....	32
3.4 Robertson-Walkeri meetrikad.....	33
4. Friedman'i võrrandid ja nende lahendite analüüs.....	40
4.1. Friedman'i võrrandid.....	40
4.2 Friedman'i võrrandite lahendid ja nende omadused.....	43
4.3 Friedmani võrrandi lahend tasase aegruumi jaoks nullist erineva kosmoloogilise konstandi korral.....	47
4.4 Universumi horisont.....	49
5 Absoluutselt musta keha kiirgus, aine ja energia tiheduse evolutsioon, kosmoloogiline ajaskaala.....	55
5.1 Kosmoloogiline punanihe.....	55
5.2 Aine ja energia tiheduse evolutsioon.....	56
5.3 Absoluutselt musta keha kiirgus.....	58

5.4 Universumi vanuse seos temperatuuriga.....	60
5.5 Esimesed 300 000 aastat.....	64
6 Tumeenergia ja tumeaine.....	68
6.1 Suuremastaabilised struktuurid ja nende teke.....	68
6.2 Galaktikate ja tähtede teke.....	68
6.3 Tumeaine.....	68
6.4 Tumeenergia ja selle mõju Universumi arengule.....	68
6.5 Universumi arengu lõppvaatus, miks on Universum olemas?.....	68

1 Sissejuhatus

Kosmoloogia – teadus Universumi kui terviku ehitusest ja arenemisest ning seda määravatest printsiipidest ja füüsikaseadustest.

Universum (lad. kõiksus) – makrokosmos, maailmakõiksus, kosmoloogia uurimisobjektina ajas ja ruumis toimuda võivate sündmuste maailm.

Termin **kosmoloogia** tuleneb kreeka keelest, ning selle põhitähendus on ratsionaalne või teaduslik arusaam **kosmosest**. Sõna **kosmos** kandis antiik-Kreekas selliseid tähendusi nagu 'kord', 'korrapärane käitumine' ning 'ilu' (sellest ka kosmose ja kosmeetika ning kosmoloogia ja kosmetoloogia terminite sarnane päritolu). Kreeka loodusfilosoofia kohaselt väideti, et universumit saab kirjeldada ratsionaalselt, st see on kosmos, mitte kaos.

1.1 Mis on kosmoloogia? Kosmoloogia ajaloost kuni Newtonini

Kuni 20.sajandi alguseni oli kosmoloogia pigem filosoofide pärusmaa, kes arutlesid religioonile ja filosoofiale tuginedes universumi arengust. Astronoomid üldiselt nn füüsikalise (teadusliku) kosmoloogiaga ei tegelenud. Kosmoloogia tänapäevase nimetusega on saanud uurimisobjektiks alles 20.sajandi teisest kolmandikust. (vt. pikemalt Helge Kragh Conceptions of Cosmos...).

Tänapäeva kosmoloogia aluseks oleva Universumi mõiste ja käsitluse kujunemise lähtepunktid:

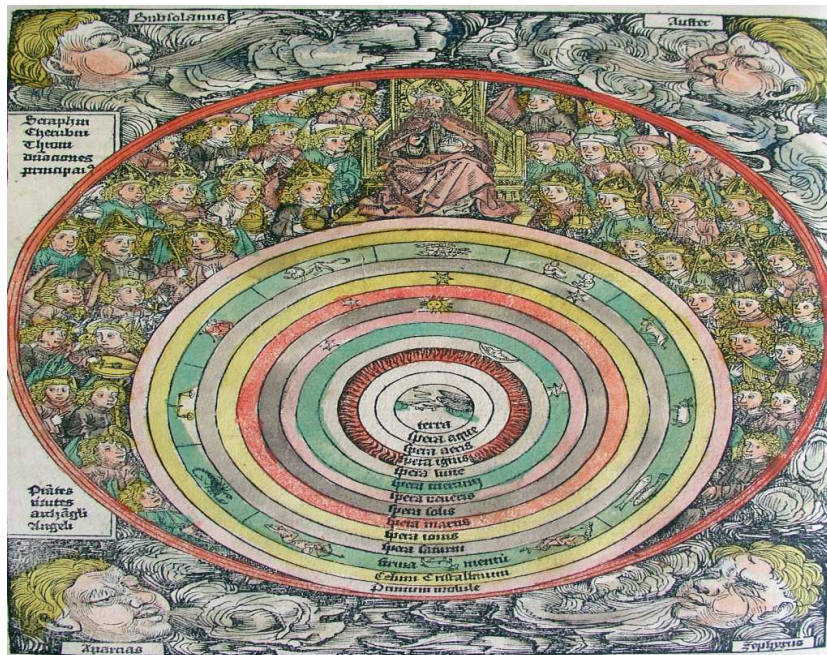
- Universumi ruumilise lõpmatuse mõiste (Demokritos 4. saj. eKr.: aatomid liiguvad läbi lõpmatu ruumi, suured aatomid põrkuvad väikestega, tekivad keerised, millest tekivad maailmad. Need omakorda põrkuvad, võivad kaduda ja tekkida uued maailmad)
- Universumi ajalise lõpmatuse mõiste (Herakleitos, 5.saj. eKr)
- Universumi homogeensus ja isotroopsus (Giordano Bruno, 16.saj. lõpp).

Universumi kui uurimisobjekti suurus on aja jooksul laienenud. 19.saj. alul oli Universum kui uurimisobjekt piiratud Päikesesüsteemi mõõtmetega, vaatlusinstrumentide täienemisega (põhiliselt – teleskoobi arendamine) on see laienenud Galaktika, ja Metagalaktikani.

Erinevates kultuurides on Universumit kujutatud erinevalt. Lapik Maa, paikneb 3-l elevandil, kes on hiidkilpkonna seljas, kes ujub suures ookeanis (India); või Maad hoiab üleval õhujumalanna. See on nn personifitseeritud universumi käsitlus – seotud mingite isikute ja olevustega.

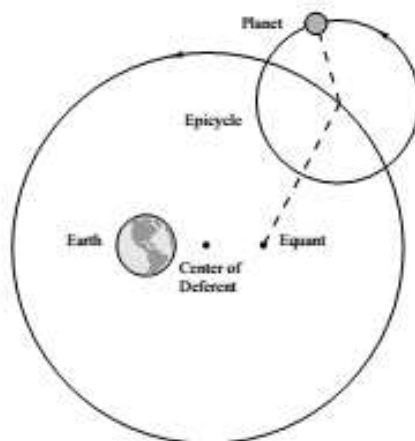
Umbes 6.saj. eKr – personifitseerimata Universumi käsitlused. 5.-6. saj eKr, Thales, Anaximandros: Maa asub maailma keskmel, selle ümber on 3 taevasküüsi, millel liiguvad Kuu, Päike, planeedid, välisküüsil on kinnistähed (vt Joonis 1). Hilisemates käsitluste edasiarendustes on jõutud 27 sfäärini. Varajane Hiina astronoomia erines Vana-Kreeka ning

sellele eelnevatest Babüloonia ja Egiptuse astronoomiatest selle poolest, et võeti omaks, et taevas võib muutuda – hiina astronoomid olid täheldanud uute tähtede ja noovade teket. Kuid sarnaselt Vana-Kreeka kujutlusele kosmosest, oli ka Hiina maailmamudel üles ehitatud kontsentriliste sfääride abil.



Joonis 1. Vana-Kreeka aegne Universumi kujutus. Keskel asub Maa sfäär (Terra), selle ümber Vee, Õhu ja Tule sfäärid. Kaugemal sfääridel paiknevad Kuu, Veenus, Marss, Päike. Viimasel sfääril paiknevad kinnistähed.

Aristoteles (384-322 eKr), Hipparchus (190-120 eKr) ja Ptolemaios (83-161) on olnud peamised geotsentriline maailmasüsteem arendajad. Geotsentrilise maailmasüsteemi järgi on maailma keskmeks Maa, mille ümber tiirlevad nii Kuu, Päike kui ka planeedid. Kui Päikese ja Kuu tiirlevad mööda ligikaudu (tollaste hinnangute kohaselt – peaaegu ringorbiidil) ringorbiiti mööda, siis planeedid mööda epitsükleid (vt joonis 2). See võimaldas seletada, miks planeedid vahel oma orbiidil liiguvad näiliselt tagurpidi ja vahepeal on paigal. Aristotelese maailmasüsteemile pakkus alternatiivse heliotsentrilise süsteemi välja Aristarchus (310-230 eKr), kuid see ei leidnud suuremat poolehoidu. Vana-Kreeka loodusfilosoofide suureks panuseks tuleb lugeda Päikese ja Maa ning Päikese ja Kuu vahelise kauguse hindamist, mis võimaldas ka hinnata, kui suur oli tolleaegsete loodusfilosoofide ettekujutuse järgi Universum. Kauguste hinnangud on antud Maa läbimõõdu järgi. Maa ümbermõõdu määras Erasthenes (274-196 eKr) üsna täpselt – 39270 km, mis on lähedane tänapäeval saadud väärtusele.



Joonis 2. Ptolemaiose kosmoloogiline mudel. Maa paikneb süsteemi keskel. Nii Päike, Kuu kui ka planeedid tiirlevad ümber Maa, kusjuures kõik planeedid tiirlevad mööda epitsükleid.

Tabel 1. Vana-Kreeka filosoofide hinnangud Maa, Kuu ja Päikese vahelistele kaugustele ning Kuu ja Päikese mõõtmetele.

	Kuu ja Maa vaheline kaugus	Kuu diameeter	Päikese ja Maa vaheline kaugus	Päikese diameeter
Aristarchus	9,5	0,36	180	6,8
Hipparchus	33,7	0,33	1245	12,3
Posidonius (135-51 eKr)	26,2	0,16	6545	39,3
Ptolemaios	29,5	0,29	605	5,5
Kaasaegne aktsepteeritud väärtus	30,1	0,27	11728	109,1

Hiina ja India astronoomide ja filosoofide hinnangud Universumi suurusele olid palju suuremad (vt lähemalt Helge Kraghi....).

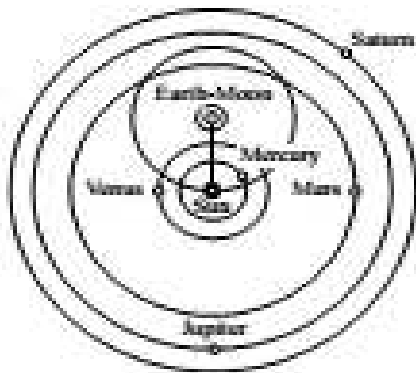
Teaduslikumad uurimused:

- Mikolaj Kopernik (1473-1543). Alustas 15.saj. lõpus Kuu vaatlusi ning lõi heliotsentrilise maailmasüsteemi. Väidetavasti oli Kopernik tuttav Aristarchuse heliotsentrilise maailmasüsteemiga, kuigi oma töödes ta sellele viidanud pole. Koperniku heliotsentrilise süsteemis liikusid planeedid mööda ringorbiite, seetõttu oli tegemist ikkagi epitsüklilise liikumisega. (vt joonis 2) Kopernik üritas mõõta ka tähtede parallaksit, kuivõrd see ei õnnestunud (tulemus jäi mõõtmistäpsusele alla), siis arvas ta, et kinnistähtede sfäär on Saturni sfäärist palju kaugemal, selle järgi oleks Universum tema kujutluses olnud vähemalt 400 000 korda suurem kui seni aktsepteeritud käistluse kohaselt.

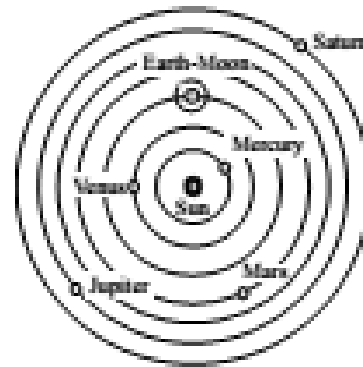
- Tycho Brahe (1546-1601), teostas 1572.a. Kassiopeias supernoova mõõtmisi ning mõõtis selle ööpäevase parallaksi, järeldas, et see paikneb Kuu sfäärist kaugemal. Supernoova uuringud võimaldasid öelda, et nn kinnistähtede sfäär ei ole muutumatu. 1577.a. toimunud komeedi vaatlused näitasid, et komeet liikus Merkuuri ja Veenuse sfäärade vahelt läbi, millest Brahe järeldas, et ilmselt ei saa need olla tahked sfäärid, seega ei takistaks miski planeetide sfäärade lõikumist. Tycho Brahe lõi enda maailmasüsteemi, mille kohaselt Päike ja Kuu

liikuvad ümber Maa, kuid ülejäänud planeedid ümber Päikese (vt joonis 3) – see oli siis Koperniku ning Ptolemaiose maailmasüsteemide ühend, siin lõikuvad näiteks Marsi ja Päikese sfäärid. Tycho Brahe hindas Maa ja Kuu vahelist kaugust võrdseks 20 Maa diameetriga, arvas, et Päike on 20 korda Maast kaugemal kui Kuu, Saturni kauguseks hindas 11000 Maa raadiust, kinnistähed sfääri kauguseks 14000 Maa raadiust.

- Johannes Kepler (1571-1639). Marsi orbiidi mõõtmised, järeldus: Marss liigub mööda elliptilist orbiiti Päikese ümber; järeldas, et meie päikesesüsteem on vaid üks paljudest tähesüsteemidest. 1618-1621 ilmus Keplerilt kolmeosaline raamat astronoomiast, mis pandi 1619 kiriku poolt keelatud raamatute nimekirja, kust võeti maha 1835.a. Kepler tegeles ka teleskoobi arendamisega. Kepler arutles ka Universumi mõõtmete üle. Giordano Bruno oli pakkunud välja idee, et Universum on lõpmatu ning selles on lõpmata palju Päikesesüsteemi taolisi maailmu. Kepleri arvates oli Universumi piiriks Linnutee – väljaspool seda ei tohtinuks enam midagi olla, st tema arvates oli Universum lõplik. Kepler tegi ka arvutusi kinnistähed sfääri suuruse hindamiseks. Ta arvutas, et selle sfääri raadius peaks olema 60 miljonit Maa raadiust.



Joonis 3. Tycho Brahe maailmasüsteem. Päike ja Kuu tiirlevad ümber Maa, kuid teised planeedid tiirlevad ümber Päikese.



Joonis 4. Koperniku heliotsentriline maailmasüsteem.

Galileo Galilei (1564-1642) – kinnitas heliotsentrilist päikesesüsteemi oma teleskoobiga vaatlusi sooritades, uuris Jupiteri kuusid, üks teleskoobi kaasleiutajaid. Oma teleskoobiga Linnuteed vaadeldes nägi Galilei, et Linnutee koosneb tegelikult paljudest tähtedest. Planeete vaadeldes oli näha, et planeedid paistavad teleskoobis ketastena, kuid tähed ikka punktidenä. Ka see võimaldas teha järelduse, et tähed paiknevad planeetidest palju kaugemal. Kosmoloogia küsimustega Galilei tegelikult ei tegelenud, tema põhiline teaduslik tegevus seondus Koperniku maailmasüsteemi kinnistamisega.

1.2 Kosmoloogia Newtonist Hubble'ini

- Isaac Newton (1643-1727) – tõi füüsikasse massi mõiste, vastasikmõju käsitle, liikumisseaduste sõnastamine, inertsiaalsete taustsüsteemide mõiste, gravitatsiooniseaduse (1687). Newton tegeles ka teleskoobi arendamisega ning püstitas idee, et tähed on „päikesed“

ning ruumis jaotunud homogeenelt, st ühtlaselt (selle idee autoriks on pakutud ka G. Brunot), seda vaatamata ilmselgele asjaolule, et Linnutees on tähed koondunud kettasse. Newton arvas, et Universum on lõpmata suur. Newtoni gravitatsiooniseaduse kohaselt pidanuks tähed hakkama gravitatsiooniliselt kokku tõmbuma, ta oletas, et 'Jumal on need paigutanud üksteisest sellistele kaugustele, et gravitatsioonijõud ei suuda neid kokku tõmmata'.

Newtoni (või Koperniku) kosmoloogiline printsiip:

Universum on homogeenne ja isotroopne kolmemõõtmelises ruumis, on alati olnud selline ja jääb selliseks igavesti.

Ruumi isotroopsus tähendab, et kõik ruumisuunad on samaväärsed – aine on kõigis suundades ühtemoodi paigutunud, tähed ja planeedid liiguvad kõigis suundades samamoodi. Ruumi homogeenus ja isotroopsus tähendab, et a) kõik ruumipunktid on füüsika seaduste jaoks samaväärsed – ei leidu eelistatud punkti, mida võiks vaadelda kui Universumi keskpunkti; b) kõik ruumisuunad on samaväärsed füüsika seaduste jaoks.

Ei ole kindel, kas homogeenus ja isotroopsus kehtivad igas ruumiskaalas. Praegu arvestatakse ruumilise homogeensuse indikaatoritena mitte tähti ega ka galaktikaid, vaid galaktikate superparvi.

Newtoni gravitatsiooniteooriat kinnitas Edmund Halley komeedi ilmumise ennustamisega 1758.a. Kuid esimene heliotsentrilise päikesesüsteemi vaatluslik kinnitus tuli 1727.a., kui James Bradley kinnitas, et tähtede aberratsioon on tingitud Maa aastasest liikumisest ümber Päikese. Praegu võime öelda, et Newtoni gravitatsiooniteooriat rakendatakse tähesüsteemide liikumisel, see on üldrelatiivsusteooria mitterelativistlikuks erijuhuks. James Bradley üritas parallaksi meetodil mõõta ka tähtede kaugust ning leidis, et need on Maast vähemalt 400 000 korda kaugemal kui Päike. See ühtis Newtoni hinnanguga, mis oli saadud tähesuuruste hinnangu põhjal. Selline tähtede kauguste hinnang suurendas hinnangut ka (nähtava) Universumi mõõtmetele. Kuid alles 1830.ndal aastal tänu Friedrich Wilhelm Besseli poolt tähtede parallaksi mõõtmistele võeti tähtede nii suured kaugused ka laiemalt omaks.

1750.a. pakkus Thomas Wright (1711-1786) välja, et tähed Linnuteel liiguvad samamoodi nagu planeedid ümber Päikese. Kuid tema arusaam tähtede kogumist oli siiski staatiline (eri allikate kohaselt on siiski teda loetud Galaktika kui pöörleva tähtede süsteemi idee autoriks). Tema oli ka üks esimesi (kuid mitte esimene), kes oma teoses 'An Original Theory of Universe' (1750) arutles Universumist, tähtede päritolust ning nende seosest Jumalaga. 1755.a. pakkus Immanuel Kant (1724-1804) välja, et udused moodustised, mida teleskoobiga võib näha, on kaugel paiknevad galaktikad, mis on meie galaktikale sarnased. See tähendaks, et kosmoloogiline printsiip kehtib suuremas mastaabis, kui Newtoni ennustatu. St – mitte tähed ei paikne ruumis ühtlaselt, vaid galaktikad. Galaktika pöörlemise, mis tasakaalustaks gravitatsioonilise kokkutõmbumise jõu, üle on arutlenud mitmed 18. ja 19. sajandi filosoofid ja füüsikud. Küsimusi tekitas – kui galaktika, või ka meie päikesesüsteem pöörleks, mis on selle pöörlemise algpõhjuseks? 1915-1919 hindas Harlow Shapley (1895-1972) 10^5 - 10^7 tähest koosnevate täheparvede jaotust meie galaktikas ning leidis, et need ei ole ühtlaselt jaotunud, vaid nende tihedus on suurem Sagittariuse tähtkuju suunas. Sellest järeldas ta, et meie galaktika kese on selles suunas, ta hindas ka Päikesesüsteemi kaugust Linnutee keskmest ning leidis, et Päikesesüsteem on sellest umbes 2/3 galaktika raadiuse kaugusel. See andis veel ühe hoobi ka heliotsentrilisele maailmasüsteemile (ka William Herschel arvas, et Päikesesüsteem

on üsna galaktika tsentri lähedal kui mitte keskel). Kuid Shapley arvas siiski, et Linnutee on universumi keskmes. 1920.ndal aastal peetud dispuudi käigus arutasid Shapley ja Arthur Eddington, kas udukogud kuuluvad meie Linnuteesse või mitte. Peale jäi arvamus, et udukogud on teised galaktikad. Kinnitas seda 1925.ndal aastal Edwin Hubble mitme galaktika kauguse määramisega.

Olbersi paradoks

Universumi vanuse probleemiga seondub Olbersi paradoks. Wilhelm Olbers (1758-1840) formuleeris 1823.a. probleemi, mis oli küll tuntud juba vähemalt Kepleri ajast järgmiselt. Tähe absoluutne heledus on defineeritud kui ajaühikus kiiratud energia, pinna heledus B on pinnaühiku heledus. Oletame, et keskmise heledusega L tähtede arv on N , nende keskmise tihedus ruumalas V on siis $n=N/V$. Kui keskmise tähe pindala on S , siis heledus on $B=L/S$. Kaugusel r ning kihis paksusega dr olevate tähtede arv on $4\pi r^2 n dr$. Staatilises Universumis lõpmatu aja jooksul kiiratud jälgitav koguheleduse saame viimase suuruse integreerimisel 0-st lõpmatuseni:

$$\int_0^\infty 4\pi r^2 n dr = \int_0^\infty n L dr = \infty.$$

Seega peaks taeva heledus staatilise lõpmata kaua eksisteerinud Universumi puhul olema lõpmata suur. Ilmselt peaks integreerima mitte nullist lõpmatuseni, vaid mingi suuruseni R . Sel juhul oleks taeva heledus lõplik, kuid ikkagi ühtlane. Kuigi Olbers pakkus selle paradoksi lahendamiseks välja ka oma seletuse (valguse neeldumine), on see ikkagi vale. Tegelikult on nii, et kui tähed on ühtlaselt jaotunud, siis on igal footonil oma keskmine vaba tee pikkus – footonid neelduvad tähele sattudes ning neid kiiratakse uuesti. Siiski, lõpmata vana Universumi puhul (ning ühtlase tähtede jaotuse korral) oleks taevas ühtlaselt hele, mitte must. Siit järeldub, et Universum ei tohiks olla staatiline, vaid sel peaks olema oma lõplik iga.

1.3 Tänapäevaste kosmoloogiliste mudelite vaatluslikud ja teoreetilised alused

Astrofüüsikalised konstandid ja kaugused

- Valguse kiirus - $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- Gravitatsioonikonstant – $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
- Planck'i konstant - $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$
- Boltzmann'i konstant – $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
- Valgusaasta – $1 \text{ ly} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$
- Parsec - $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ ly} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$
- Päikese mass - $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- Elektronvolt – $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Tänapäeva kosmoloogia rajajaid

- ALBERT EINSTEIN (1879-1955) – esitas 1915.aastal avalikkusele üldrelatiivsusteooria (ÜRT) ja 1917.aastal esimese kosmoloogilise mudeli (nn Einsteini mudeli).
- ALEKSANDER FRIEDMAN (1888-1925)– konstrueeris 1922.aastal teoreetiliselt tänapäeva kosmoloogia aluseks oleva mudeli (Friedman'i mudeli), arendas nende põhjal välja võrrandid homogeense ja isotroopse Universumi kohta.
- GEORGES LEMAITRE (1894-1966) – pakkus välja paisuva Universumi mudeli 1927.a., sõltumatult Friedmanist. Ühtlasi tegi ka esimesi hinnanguid Suure Paugu kohta.
- EDWIN HUBBLE (1889-1953)– avastas vaatuslikul teel 1929.aastal kosmoloogilise punanihke (Hubble'i seaduse).
- HOWARD PERCY ROBERTSON (1903-1961), ARTHUR GEOFFREY WALKER (1909-2001) – pakkusid välja meetrika kaasaegse kosmoloogia aluseks oleva kosmoloogilise mudeli jaoks.
- GEORGE GAMOW (1904-1968), RALPH ASHER ALPHER (1921-2001) – püstitasid 1948.aastal paisuva Universumi "Kuuma" mudeli, selgitamaks elementaarosakeste vastastikmõju ja aatomite tekkimist varases Universumis.
- ARNO ALLAS PENZIAS (1933-) ROBERT WOODROW WILSON (1936-) avastasid 1964-1965.aastal kosmilise mikrolainelise foonkiirguse (reliktkiirgus, mis pärineb ajast, kui Universumis tekkisid esimesed aatomid).
- GEORGE FITZGERALD SMOOT III (1945-), JOHN CROMWELL MATHER (1946-) kosmilise taustakiirguse mittehomoogeensuse avastamise eest, see võimaldas järeldada, millal võisid hakata kujunema esimesed suuremastaabilised struktuurid kosmoses, Vaatlused toimusid 1980.ndate lõpust alates.
- SAUL PERLMUTTER (1959-), ADAM GUY RIESS (1969-), BRIAN PAUL SCHMIDT (1967-) - kiirenevalt paisuva Universumi vaatuslik kinnitus, 1990.ndate keskpaigas.

Kosmoloogiliste mudelite teoreetilised alused

- Üldrelatiivsusteooria (ÜRT),
- Friedman'i mudel, mis järeldus ÜRT-st ja kosmoloogilisest printsiibist,
- Elementaarosakeste teooria.

Kosmoloogiliste mudelite vaatuslikud alused

Kosmoloogiline printsiip:

Universum on ruumiliselt homogeenne ja isotroopne - Universumis on kõik ruumi piirkonnad samaväärsed, st kõikidel ruumi piirkondadel on samad füüsikalised omadused. Kosmoloogiline printsiip kehtib ainult piisavalt suures mastaabis, so minimaalselt sellises mastaabis nagu kaugus galaktikaparvede vahel, seega umbes 100 miljonit valgusaastat. Väikesteks piirkondadeks ehk punktideks loetakse galaktikate parvesid läbimõõduga umbes 30 miljonit valgusaastat.

Hubble'i seadus- mida kaugemal asub vaatlejast kosmoloogiline objekt (nt galaktika), seda kiiremini ta vaatlejast eemaldub:

$$\vec{V} = H \cdot \vec{r}$$

kus $\vec{V}$ - eemaldumise kiirus, $\vec{r}$ - vaadeldava objekti kohavektor (vaatleja on koordinaatide alguspunktis), H - Hubble'i konstant.

H on konstant selles tähenduses, et antud ajahetkel on kõigi galaktikate jaoks sama. Kuid nagu hiljem näeme, muutub Hubble'i konstant Universumi evolutsiooni jooksul.

Mikrolaineline foonkiirgus - on isotroopne ja vastab soojuslikus tasakaalus oleva absoluutselt musta keha kiirgusele temperatuuril 2,7 K. Vaadeldavad üliväikesed kõrvalekalded nimetatud seaduspärasustest annavad olulist informatsiooni galaktikate tekkemehhanismide kohta varajases Universumis.

Ürgse heeliumi ja deuteeriumi kontsentratsioon (heeliumi või deuteeriumi massi ja barüonide kogumassi suhe):

$$0,21 < \rho(\text{He}) < 0,25 \quad \text{ja} \quad 3 \cdot 10^{-5} < \rho(\text{D}) < 3 \cdot 10^{-4} .$$

Lõpuks tuletagem meelde, et astronoomiliste objektide eemaldumiskiiruse võib leida, määrares nende spektris olevate spektraaljoonte punanihke ja seejärel arvestades Doppler'i efekti.

Küsimused.

1. Selgitage mõisteid 'isotroopsus' ja 'homogeensus'. Mida tähendab ruumi isotroopsus ja homogeensus kosmoloogia käsitluses. Tooge näiteid.
2. Kuidas on arenenud Universumi mõõtmetest arusaam kuni 18.sajandi keskpaigani? Tehke skaala, mille ühel teljel on alates 600 eKr ning teisel Universumi mõõtmel astronoomilistes ühikutes.
3. Millised füüsikalised vahendid ja vaatlused on viinud Universumist arusaama avardamiseni?

Täiendav kirjandus.

Kragh, H., S. Conceptions of Cosmos: From Myths to the Accelerating Universe: A History of Cosmology. Oxford Univ. Press. 2006. (vt Ebrary).

Roos, M. Introduction to Cosmology. Wiley. 2004 (vt. Ebrary).

2 Newtoni kosmoloogia

2.1 Hubble'i seadus

Hubble'i seadus – kaugete galaktikate kiirused suurenevad võrdeliselt nende kaugusega vaatlejast:

$$\vec{V} = H \cdot \vec{r} \quad (2.1)$$

$H(t)$ - Hubble'i konstant, mis sõltub ainult ajast, ei sõltu ruumipunktist.

Näitame esmalt, et Hubble'i seadus on kooskõlas kosmoloogilise printsiibiga. Kosmoloogiline printsiip nõuab, et mingis galaktikas asuv vaatleja peab nägema ühesugust galaktikate kiiruste jaotust (vastavalt Hubble'i seadusele) olenemata sellest, millises galaktikas vaatleja asub.

Vaatleme kolme galaktikat A, B ja C (vt joonis 5). Asugu esimene vaatleja galaktikas A (nt meie galaktikas). Ta täheldab, et galaktikate B ja C liikumine allub Hubble'i seadusele

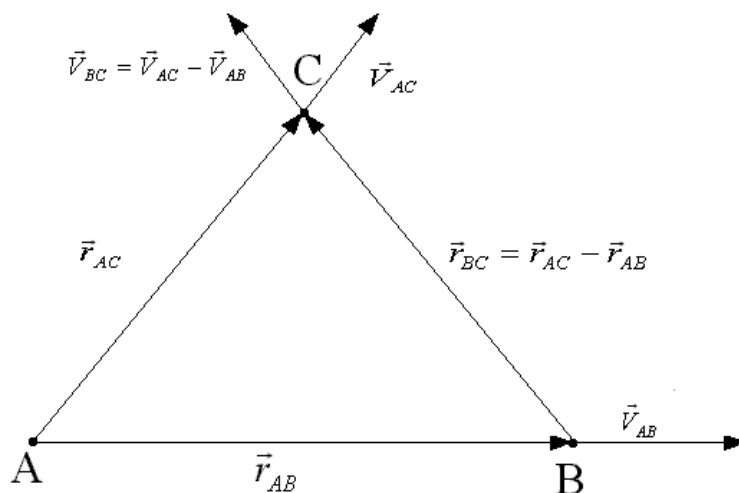
$$\vec{V}_{AB} = H \cdot \vec{r}_{AB} \quad , \quad \vec{V}_{AC} = H \cdot \vec{r}_{AC} \quad (2.2)$$

Teine, galaktikas B asuv vaatleja fikseerib galaktika C liikumise kiiruseks

$$\vec{V}_{BC} = \vec{V}_{AC} - \vec{V}_{AB} \quad . \quad (2.3)$$

Valemitest (2.2) ja (2.3) saame nüüd

$$\vec{V}_{BC} = H \cdot \vec{r}_{AC} - H \cdot \vec{r}_{AB} = H (\vec{r}_{AC} - \vec{r}_{AB}) \quad .$$



Joonis 5. Kosmoloogiline printsiip ja Hubble'i seadus.

Vaadelduna galaktikast B, on vektor $\vec{r}_{AC} - \vec{r}_{AB} = \vec{r}_{BC}$ galaktika C kohavektor. Seega eemaldub galaktika C galaktikast B vastavalt Hubble'i seadusele (2.1). Järelikult, kui Hubble'i seadus kehtib mingis ühes galaktikas asuva vaatleja jaoks, siis kehtib ta ka igas teises galaktikas asuva vaatleja jaoks. Siit ka üks järeldusi Maa või Päikese olulisuse kohta. Kuni

keskajani arvati, et Maa on universumi keskpunkt. Kopernik viis 'keskpunkti' Päikesele. Kasutades lihtsat geomeetriat võime öelda, et ei Maa, Päike ega ka meie galaktika ole universumi keskpunkt. Me näeme, et galaktikaparved eemalduvad meist, aga sama näeksid (või näevad, kui nad eksisteerivad) ka vaatlejad teistes galaktikaparvedes. Seega, paisumisel pole keskpunkti, universumil ei ole keskpunkti ning ükski aeg-ruumi punkt pole teiste suhtes eelistatud. (vt ka 1.3. kosmoloogilist printsiipi).

Hubble'i seadusest järeldub, et kõigi punktide (galaktikaparvede) vaheline kaugus suureneb – Universum paisub.

Kahe galaktika vaheline kaugus tulevikus $t > t_0$.

Vaatleme nüüd lähemalt, kuidas muutub galaktikate omavaheline kaugus tulevikus – millistest suurustest ja kuidas see muutub. Olgu r_{AB} galaktikate A ja B vaheline kaugus. Aja jooksul peaks see ilmselt suurenema. Otsimegi, kuidas see suureneb, st otsime kaugust kui funktsiooni ajast: $r_{AB}(t)$. Vastavalt Hubble'i seadusele $\vec{V} = H \cdot \vec{r}$, saame

$$\frac{dr_{AB}}{dt} = V_{AB} = H(t) \cdot r_{AB} . \quad (2.4)$$

r_{AB} leidmiseks eraldame seoses (2.4) muutujad, st jagame võrrandi (2.4) läbi r_{AB} -ga ja korrutame dt -ga. Siis saame

$$\frac{dr_{AB}}{r_{AB}} = H(t) dt .$$

Järgnevalt võtame mõlemalt poolt integraali:

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr_{AB}}{r_{AB}} = \int_{t_0}^{t_1} H(t) dt \Rightarrow \ln r_{AB} \Big|_{r_0}^{r_1} = H(t) \Big|_{t_0}^{t_1} .$$

Võttes saadud võrduse mõlemad pooled e-astmesse ning asendades $t_1 \rightarrow t$, siis leiame galaktikate A ja B vahelise kauguse sõltuvuse ajast

$$r_{AB}(t) = r_{AB}(t_0) \cdot \exp \left[\int_{t_0}^t H(t) dt \right] , \quad (2.5)$$

kus t_0 on praegune ajamoment.

Näeme, et see, kuidas kaugus kahe galaktika vahel tulevikus ajast täpselt sõltub, sõltub Hubble'i konstandi sõltuvusest ajast. Teades funktsiooni $H(t)$, saame leida integraali ning ka täpse sõltuvuse $r_{AB}(t)$.

Aine tihedus paisuvas Universumis

Analüüsime nüüd lähemalt aine tiheduse muutumist paisuvas universumis. Vaatleme Universumis mingit sfäärilist piirkonda, mille äärt markeerivad kindlad galaktikad (vt joonis 6). Kui selle piirkonna raadius on R , siis ruumala on $V = \frac{4\pi \cdot R^3}{3}$. Selles asuvate astronoomiliste objektide kogu mass olgu M . Kosmilise aine massi tihedus ρ on lihtsalt leitav seosest:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi \cdot R^3} . \quad (2.6)$$

Kui antud sfäär aja jooksul paisub, siis objektide koguarv ning seega ka nende kogumass selles sfääris M jääb samaks. Samas, tänu galaktikate vahelise kauguse pidevale suurenemisele massi tihedus ilmselt väheneb. Diferentseerides tihedust ρ valemist (2.6) aja järgi, saame

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{9M}{4\pi \cdot R^4} \frac{dR}{dt} = -\frac{3\rho}{R} \frac{dR}{dt} .$$

Siin arvestasime tuletise võtmisel, et M on konstant, kuid R on funktsioon ajast, st $R=R(t)$. Seega oli tegemist liitfunktsioonist tuletise leidmisega.

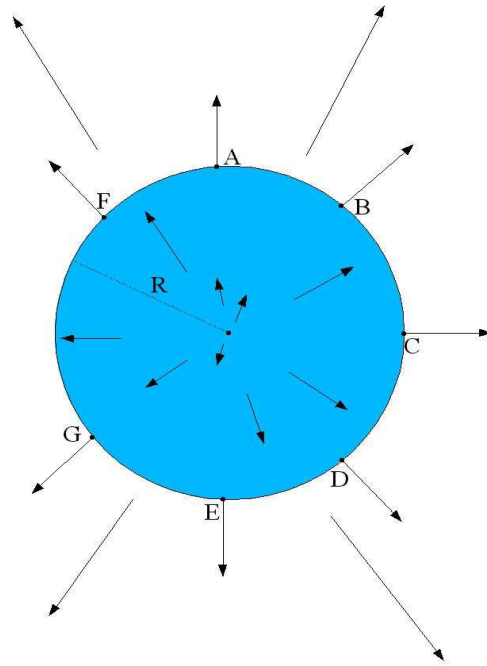
Arvestades, et Hubble'i seaduse tõttu $\frac{dR}{dt} = H(t)R$, leiame:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho \cdot H(t) . \quad (2.7)$$

Viimane diferentsiaalvõrrand seob omavahel Hubble'i konstanti ja aine tihedust Universumis. Hiljem näeme, et see on üks Universumi lokaalse evolutsiooni põhivõrranditest. Eeldusel, et funktsioon $H(t)$ on teada, võime tiheduse $\rho(t)$ suvalisel ajamomendil leida järgmisest valemist (võrrandi (2.7) lahendist):

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot \exp\left[-3 \int_{t_0}^t H(t) dt\right] , \quad (2.8)$$

kus ρ_0 - tihedus ajamomendil t_0 . Valemi (2.8) leidmine on analoogiline seose (2.5) leidmisega.



Joonis 6. Aine tihedus ja Universumi paisumine. Galaktikad A-F markeerivad sfäärilise piirkonna äärt. Joonisel on punktadena kujutatud arvukad galaktikad koos nende kiirustega (märgitud nooltega - mida suurem kiirus, seda pikem nool). Kosmoloogilisel paisumisel galaktikate arv sfääris ei muutu ja seega sfääris olev kogumass jääb konstantseks.

Küsimused.

1. Avaldada Hubble'i seadusest seos (2.5). Leida $r(t)$ sõltuvusena ajast juhul, kui $H(t) = \frac{C}{t^\alpha}$ ning skitseerida joonised (näiteks Wolfram Alpha abil) juhtudel, kui $\alpha = 1; 2/3; 1/2; 1/3$. C jaoks võib kasutada erinevaid väärtusi: $C = 0,5; 1; 2$. Kas ja millistel juhtudel sõltuvuse $r(t)$ kuju sõltub konstandist C?
2. Avaldada diferentsiaalvõrrandist (2.5) seos (2.6). Leida $\rho(t)$ sõltuvusena ajast juhul, kui $H(t) = \frac{C}{t^\alpha}$ ning skitseerida joonised (näiteks Wolfram Alpha abil) juhtudel, kui $\alpha = 1; 2/3; 1/2; 1/3$. C jaoks võib kasutada erinevaid väärtusi: $C = 0,5; 1; 2$. Kas ja millistel juhtudel sõltuvuse $\rho(t)$ kuju sõltub konstandist C?

2.2 Kriitiline tihedus

2.2.1 Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandid

Hubble'i seaduses kujul (2.4) on sees suurus $r(t)$, mis annab ette kauguse konkreetsete punktide – näiteks galaktikaparvede vahel. Hubble'i konstant ise on universaalsem, see sõltub küll ajast, kuid mitte sellest, kui kaugel asuvate objektide vahel on mõõtmisi tehtud. Tiheduse sõltuvuse ajast saab leida võrrandist (2.7), milles on sees aine tihedus, Hubble'i konstant ja aeg. Nii aine tihedus ρ kui ka Hubble'i konstant H on universaalsed – need ei sõltu ruumi mastaabist eeldades, et mõõtmisi on tehtud üle piisavalt suure kauguse. Seetõttu üritame nüüd leida Hubble'i konstandi jaoks samasugust võrrandit nagu (2.7), kus ei ole sees sõltuvust kaugusest r (või R).

Käsitleme nüüd Universumi lokaalseid omadusi, st väikeseid piirkondi (linearmõõtmised ca 10^8 valgusaastat). Eeldame, et kehtivad:

- kosmoloogiline printsiip;
- Hubble'i seadus;
- Newtoni II seadus.

Vaatleme galaktikate sfääri raadiusega R (vt joonis 6). Selles sfääris asuva kosmilise aine mass olgu M . Homogeense aine jaotuse korral (kosmoloogiline printsiip) mõjub sfääri pinnal olevale galaktikale A gravitatsioonijõud, mis oleneb ainult massidest sfääri sees. Gravitatsioonijõud on sellise suurusega, nagu asuks kogu mass M sfääri tsentris. Vastavalt Hubble'i seadusele sfääri pinnal ja sfääri sees olev mass aja jooksul ei muutu. Sfäärist väljapoole jäävad massid ei mõjuta galaktika A liikumist. See tulemus sisaldub Birkhoff'i teoreemis, mille G. D. Birkhoff tõestas 1923. aastal. Kui sfääri raadius R ei ole liiga suur, siis on sfääri sees oleva materia gravitatsiooniväli mõõdukas ja galaktika A liikumist saab arvutada Newtoni mehaanika abil.

Newtoni gravitatsiooniseadus ja Newtoni II seadus annavad galaktika A kiirenduse määramiseks võrrandi

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -G \frac{M}{R^2}, \quad (2.9)$$

kus G - Newtoni gravitatsioonikonstant.

Tuletagem meelde, et Hubble'i seaduse tõttu sfääri sisse jääva aine kogumass M aja jooksul ei muutu (vt joonis 6).

Samuti saame arvutada galaktika A kiirenduse, lähtudes Hubble'i seadusest (2.1)

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(HR) = R \cdot \frac{dH}{dt} + H \cdot \frac{dR}{dt}.$$

Kuna $\frac{dR}{dt} = V = HR$, siis saame võrrandist (2.9)

$$R \frac{dH}{dt} + H^2 R = -\frac{GM}{R^2}.$$

Asendades nüüd massi M tema avaldisega massi tiheduse ρ kaudu

$$M = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \rho, \quad (2.10)$$

leiame diferentsiaalvõrrandi, mis seob omavahel Hubble'i konstandi H ja kosmilise aine keskmise tiheduse ρ :

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \cdot \rho.$$

See võrrand koos võrrandiga (2.7) annabki Universumi lokaalset evolutsiooni kirjeldavad põhivõrrandid

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \cdot \rho, \quad (2.11.a)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho \cdot H. \quad (2.11.b)$$

Nende võrrandite abil on võimalik leida, kuidas kosmoloogia kaks põhisuurust – keskmine ainetihedus ja Hubble'i konstant sõltuvad ajast. Rõhutagem, et valemities puuduvad meie poolt suvaliselt valitud sfääri parameetrid R ja M . Seega võrrandid kehtivad (2.11.a, 2.11.b) Universumis mistahes lokaalses piirkonnas. Oluline ei ole Universumi piirkonna mass ning vaatleja asukoht. Võrrandid (2.11) on mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteem – selles esineb $(H(t))^2$ ning tiheduse ja Hubble'i konstandi korrutis $\rho(t) \cdot H(t)$, seetõttu ei ole võrrandisüsteem üldjuhul lahendatav ning selleks, et leida tiheduse ja Hubble'i konstandi sõltuvust ajast (kui diferentsiaalvõrrandis süsteemi lahendit), on vaja teada täiendavaid seoseid.

2.2.2 Kriitiline tihedus

Kriitilise tiheduse mõisteni on võimalik jõuda ka lähtudes Universumi lokaalse evolutsiooni võrranditest (2.11.a, 2.11.b). Meie lähtume siiski energia jäävuse seadusest. Vaatleme joonisel 6 toodud sfääri pinnal oleva ühikulise massiga ($m=1$ kg) keha (nt 'galaktika'). Selle kineetiline energia on $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dR}{dt}\right)^2$, potentsiaalne energia on $E_p = -\frac{mMG}{R}$.

Arvestame edaspidi, et $m=1$ ning seetõttu seda enam ei kirjuta. Antud keha koguenergia on

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{R} = E = \text{const} \quad . \quad (2.12)$$

Võrrandil (2.12) on lihtne füüsikaline sisu: ta kajastab sfääri pinnal asuva ühikulise massiga galaktika jaoks energia jäävuse seadust. Võrrandi vasakul poolel olev esimene liidetav on selle galaktika kineetiline energia ja teine liidetav tema potentsiaalne energia ("-" märk on sellepärast, et tegemist on gravitatsioonilise tõmbumisega). Konstant E on galaktika kogu mehaaniline energia. Paisumise käigus kineetilise ilmselt keha kiirus sfääri keskpunkti suhtes kahaneb, samas tänu R vähenemisele väheneb ka potentsiaalse energia absoluutväärtus. Keha mehaaniline koguenergia jääb ikka samaks. Kuna koguenergia ei sõltu ajast, siis võime selle määrata vaatlusandmete põhjal käesoleval ajamomendil t_0 :

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0}^2 - \frac{GM}{R_0} = -\frac{4\pi G R_0^2}{3} \cdot \left(\rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G} \right) \quad , \quad (2.13)$$

kus R_0 - sfääri raadius, ρ_0 - keskmine kosmilise aine tihedus ja H_0 - Hubble'i konstant vaatlusmomendil t_0 .

Valemi (2.13) tuletamisel kasutasime massi avaldist tiheduse kaudu seosest (2.10) ja Hubble'i seadust:

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)_{t=t_0} = V(t_0) = H_0 \cdot R_0 \quad .$$

Edasises arutluskäigus on otstarbekas võtta kasutusele kriitilise tiheduse $\rho_c(t)$ mõiste:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad . \quad (2.14)$$

Üldreeglina sõltub kriitiline tihedus ajast, kuid selles paragrahvis vaatleme teda ajahetkel t_0 , $\rho_c(t_0) = \rho_{c0}$. Nüüd saame esitada ühikulise massiga galaktika A koguenergia E kujul:

$$E = -\frac{4\pi G R_0^2}{3} \cdot (\rho_0 - \rho_{c0}) \quad . \quad (2.15)$$

Seega saame energia jäävuse seadusest (2.12) järgmise võrrandi:

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot R_0^3 \cdot \rho_0 \cdot \frac{1}{R} - \frac{8\pi G}{3} \cdot R_0^2 (\rho_0 - \rho_{c0}) \quad . \quad (2.16)$$

Universumi lokaalsete piirkondade evolutsioon

Minevik, kus $t < t_0$.

Käesoleval ajahetkel ($t=t_0$) sfäär paisub. Arvestades Hubble'i seadust, pidi minevikus sfääri raadius olema väiksem, $R < R_0$. Kuivõrd võrrandi (2.16) parema poole teine liige ei sõltu raadiusest R , siis võime järeldada, et minevikus pidi paisumiskiirus $\frac{dR}{dt}$ olema suurem kui

praegu ($1/R$ oli varem suurem, sest R oli väiksem). Seetõttu pidi kuitahes suure raadiusega sfääri korral, sh Universumi kui terviku korral, pidi minevikus olema ajamoment t_1 , kus sfääri raadius oli null ja paisumiskiirus lõpmata suur:

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{dR}{dt} = \infty .$$

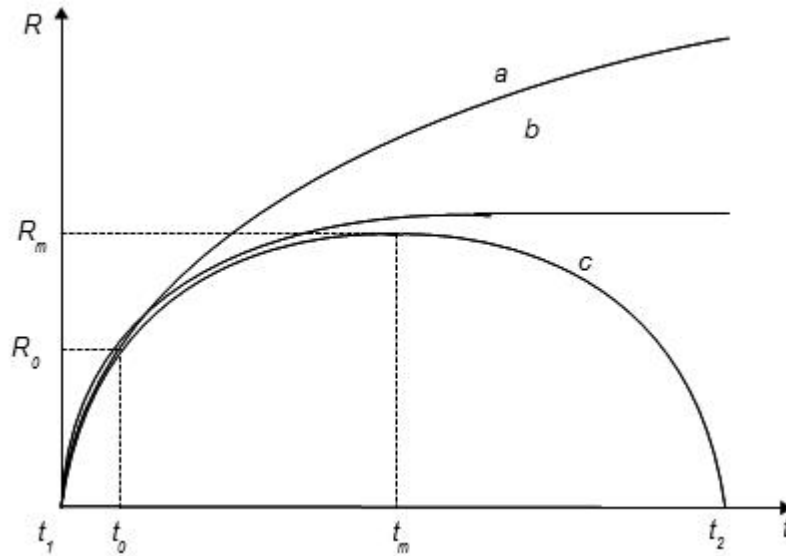
Minevikus, $t=t_1$, pidi vaadeldud sfääris olevate galaktikate kogumass olema kontsentreeritud ühte ruumipunkti. Ajamomendi t_1 võime lugeda Universumi sünnimomendiks. Kuna paisumiskiirus oli sünnimomendil lõpmata suur, siis piltlikult võiks Universumi sünni käsitleda ülivõimsa plahvatusena. Siit tuleneb ka Friedman'i kosmoloogilise teooria üldlevinud nimetus "Suure Paugu teooria." Väga varajases Universumis, kus aine- ja energiatihedus oli tohutu suur, ei tarvitsenud tänapäeval teadaolevad füüsikaseadused kehtida ning vastavat Universumi olekut nimetatakse algsingulaarsuseks. Erinevad uurijad on hinnanud Universumi vanuseks, milleni võib ekstrapoleerida teadaolevaid füüsikaseadusi, $10^{-12} - 10^{-34}$ s .

Tulevik, kus $t > t_0$.

Universumi lokaalsete piirkondade käitumine tulevikus sõltub keskmise ainetiheduse ρ_0 ja kriitilise tiheduse ρ_{c0} vahekorra, mistõttu võib kirjeldada kolme olukorda:

1. Universumi aine-energia tihedus on väiksem kriitilisest, $\rho_0 < \rho_{c0}$.

Sellisel juhul on võrrandi (2.13) paremal poolel olev teine liidetav positiivne konstantne suurus u , mille saame ära määrata käesoleval ajamomendil. Aja kasvades kasvab ka sfääri raadius R . Paisumiskiirus $\frac{dR}{dt}$ küll väheneb, kuna esimene liidetav võrrandi (2.16) paremal poolel läheneb nullile, kuid jääb alati positiivseks. Võrrandi parema poole kogusumma läheneb seega konstantsele suurusele u . Seega toimub tulevikus paisumine igavesti nullist erineva kiirusega u (vt joonis 7a). Saadud tulemust võib interpreteerida ka energiatest lähtuvalt. Antud situatsioon realiseerub juhul, kui sfääri pinnal oleva galaktika koguenergia on nullist suurem, st sfääri pinnal oleva galaktika kineetiline energia on suurem kui tema potentsiaalse energia absoluutväärtus. Kuigi aine sfääri sees pidurdab tänu gravitatsioonilisele tõmbejõule paisumist ning galaktika eemaldumist, siis ka juhul, kui sfäär on paisunud praktiliselt lõpmata suureks ning galaktika potentsiaalne energia muutunud nulliks, on kineetiline energia veel nullist erinev. Seega jääb sfäär paisuma lõpmata kaua.



Joonis 7. Universumi vaadeldava piirkonna suuruse R muutus aja jooksul erinevate stsenaariumite korral. a) aine tihedus on alla kriitilise $\rho_0 < \rho_{c0}$. Universum paisub igavesti, olgugi, et paisumine aeglustub pidevalt. b) aine tihedus on kriitilise tihedusega võrdne. $\rho_0 = \rho_{c0}$ Universumi paisumine peatub lõpmata kauges tulevikus. c) aine tihedus on kriitilisest tihedusest suurem $\rho_0 > \rho_{c0}$, Universum hakkab mingil ajamomendil kokku tagasi tõmbuma, tema eluiga on lõplik $t_2 - t_1$.

2. Universumi aine-energia tihedus on kriitilise tihedusega võrdne $\rho_0 = \rho_{c0}$.

Sellisel juhul on võrrandi (2.16) parema poole teine liige null. Sfääri raadius kasvab R monotoonselt, kuid lõpmatu kauges tulevikus läheneb $1/R$ nullile, seega ka kasvukiirus läheneb nullile (vt Joonis 7b) ning sfäär saavutab mingi lõpliku raadiuse.

Antud situatsioon vastab juhule, kui sfääril oleva galaktika kogu mehaaniline energia on võrdne nulliga. Sfääri sisemuses oleva aine poolt tekitatud gravitatsioonijõud pidurdab sfääri pinnal oleva galaktika paigalolekuni parasjagu siis, kui sfäär on paisunud lõpmata suureks.

3. Universumi aine-energia tihedus on suurem kriitilisest tihedusest $\rho_0 > \rho_{c0}$.

Nüüd on võrrandi (2.16) paremal poolel teine liidetav negatiivne (ei sõltu ajast). Kuna esimene liidetav on positiivne, kuid aja jooksul kahaneb, sest R kasvab – siis tulevikus leidub ajamoment $t = t_m$, mille korral võrrandi (2.16) paremal pool saab võrdseks nulliga. Seega ajamomendil $t = t_m$ paisumiskiirus

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)_{t=t_m} = 0,$$

st paisumine seiskub.

Edasi, kui $t > t_m$, hakkab sfäär kokku tõmbuma. Võrrandis (2.16) tuleb võtta negatiivne juur:

$$\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{8\pi G}{3R} \cdot R_0^3 \rho_0 - \frac{8\pi G}{3} \cdot R_0^2 (\rho_0 - \rho_{c0})}.$$

Juhtum, kui $t > t_m$.

Sellel epohhil näeb vaatleja, et kõik kauged galaktikad liiguvad tema poole (galaktikate sininihe).

Ajamomendil $t_2 = 2(t_m - t_1) + t_1$ on sfääri raadius R uuesti kahanenud nullini. Seda lõpmatu tihedusega Universumi olekut nimetatakse lõppsingulaarsuseks. Niisiis, kui aine tihedus ρ_0 Universumis on suurem kriitilisest tihedusest ρ_{c0} suurem, on Universumi kogu eluiga lõplik: $t_2 - t_1$ (vt joonis 7c).

Antud situatsioon vastab juhtumile, kui sfääri pinnal oleva galaktika mehaaniline koguenergia on negatiivne, st potentsiaalse energia absoluutväärtus on suurem kui kineetiline energia.

Probleemid

- Hubble'i konstandi väärtus praegusel hetkel H_0 - ei ole täpselt teada.
- Universumi aine-energia tihedust ρ_0 on raske määrata.

Sellest tulenevalt on raske öelda, milline ülaltoodud kolmest stsenaariumist võiks Universumi ees oodata. Tuleb ka märkida, et ülaltoodud arutelu kui järeldus Universumi arengu jaoks on saadud lokaalse piirkonna arengu kirjeldusest (mis on saadud Newtoni teooria rakendamisega). Seetõttu ei pruugi siinkohal toodud järeldused vastata Universumi tegelikule käitumisele tulevikus.

Tänapäeva mõõtmised annavad Hubble'i konstandi väärtuse vahemikus $72 \frac{km}{s \cdot Mpc} < H_0 < 78 \frac{km}{s \cdot Mpc}$. Siit saame $\rho_0 \approx 10^{-29} \frac{g}{cm^3}$.

Klassikalise astronoomia meetoditel (galaktikate ja tähtede loendamise teel) on saadud, et tavapärase aine keskmine tihedus jääb vahemikku $10^{-31} \frac{g}{cm^3} < \rho_0 < 10^{-30} \frac{g}{cm^3}$. See on palju väiksem kriitilisest tihedusest.

- Galaktikaparvedes galaktikate liikumise analüüs näitab, et Universumis peab olema tunduvalt rohkem ainet, nn varjatud massi, mis ei ole jälgitav tavapäraseid meetodeid kasutades. Hinnanguliselt on seda umbes 5 korda rohkem, kui tavalist ainet ning varjatud massi ja nähtava aine tihedus peaks moodustama umbkaudu 30% kriitilisest tihedusest. See viitab, et Universum peaks paisuma lõpmata kaua.

- 1990. aastatest kuni 21. sajandi alguseni läbiviidud uuringud näitavad, et praegu paisub Universum kiirenevalt, mis viitab uuele energiavormile – nn tumeenergiale, mis ei allu gravitatsioonilisele kokkutõmbumisele. Tumeenergia tihedust võiks arvestada aine-energia tihedusena ning mateeria tiheduse ühe komponendina. Tumeenergia poolt tekitatavat kiirenevat paisumist ei ole võimalik Newtoni võrranditesse sisse panna. Seetõttu jääb ainuüksi Newtoni gravitatsiooniteooria kasutamisest Universumi kui terviku puhul väheks.

2.3 Universumi evolutsiooni põhijooni kriitilise tiheduse korral

Eespool mainisime, et Universumi lokaalse piirkonna evolutsiooni kirjeldavate võrrandite (2.11.a) ja (2.11.b) lahendamiseks on vajalik mingi täiendav seose. Selle võime saada kriitilise tiheduse avaldisest. Kriitilise tiheduse ρ_c abil on suhteliselt lihtne leida Universumi eluiga ning ainetiheduse ja Hubble'i konstandi sõltuvust ajast.

Antud punktis käsitleme juhtu, kus ainetihedus Universumis on võrdne kriitilise tihedusega (praegusel ajamomendil t_0)

$$\rho(t_0) = \rho_c(t_0) = \frac{3 H^2(t_0)}{8 \pi G} . \quad (2.17)$$

Kõigepealt näitame, et võrdus (2.17) kehtib ka mistahes ajamomendil t . Lähtume võrrandist (2.16). Asendades sinna võrduse (2.17) ja arvestades Hubble'i seadust, $\frac{dR}{dt} = HR$ saame

$$H^2(t) = \frac{2GM}{R^3} = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho(t) , \quad \rho(t) = \frac{3 H^2(t)}{8 \pi G} , \quad (2.18)$$

st kui keskmine ainetihedus Universumis on võrdne kriitilise tihedusega mingil ajamomendil t_0 , siis on ta seda ka mistahes teisel ajamomendil $t \neq t_0$. Asendades Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandisse (2.11.a) tiheduse $\rho(t)$ avaldise (2.18), saame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dH}{H^2} = -\frac{3}{2} dt .$$

Võttes Universumi sünnimomendi ajaarvamise alguseks $t_1 = 0$, saame peale integreerimist

$$-\frac{1}{H(t)} + \frac{1}{H(0)} = -\frac{3}{2} t .$$

Kuna $H(0) = \infty$ (vt valem (2.17)), siis

$$H(t) = \frac{2}{3t} . \quad (2.19)$$

Oleme leidnud Hubble'i konstandi sõltuvuse ajast. Valem (2.19) võimaldab meil hinnata Universumi vanust (t_0), lähtudes Hubble'i konstandi arvulisest väärtusest käesoleval ajamomendil:

$$t_0 = \frac{2}{3H(t_0)} . \quad (2.20)$$

Võttes Hubble'i konstandi väärtuseks $H(t_0) \approx 50 \frac{km}{s \cdot Mpc}$, saame Universumi vanuseks

$$t_0 \approx 13 \cdot 10^9 a , \text{ mis on saadud eeldusel, et } \rho_0 = \rho_{c0} .$$

Kui $\rho_0 > \rho_{c0}$, toimub Universumi paisumine aeglasemalt ning seetõttu on vanus mõnevõrra suurem.

Kui $\rho_0 < \rho_{c0}$ toimub Universumi paisumine kiiremini ning sellepärast on vanus ka mõnevõrra väiksem, kuid mitte väiksem, kui seni avastatud tähtede vanused $11 \cdot 10^9$ a.

Aine tiheduse evolutsioon

Aja algmomenti loeme Universumi sünnimomendiks. Valemitest (2.18) ja (2.20) tuleneb

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G} \cdot \frac{1}{t^2} \approx \frac{8 \cdot 10^5}{t^2} \frac{g \cdot s^2}{cm^3} . \quad (2.21)$$

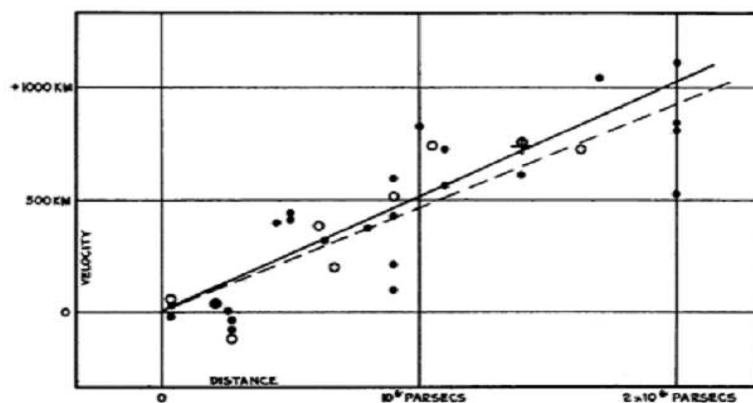
Seega näeme, et Universumi paisudes keskmine ainetihedus väheneb - on pöördvõrdeline Universumi eluea ruuduga. Järelikult $\rho_{c0} \approx 4,6 \cdot 10^{-30} \frac{g}{cm^3}$. Ühes grammis aines on $6,02 \cdot 10^{23}$ tuumaosakest, mistõttu kriitilise tiheduse korral on kuupsentimeetris umbes $2,7 \cdot 10^{-6}$ tuumaosakest ehk 2,7 osakest kuupmeetris.

Lisaks sellele, et valem (2.17) kehtib juhul kui $\rho_0 = \rho$, on ta ka õige Universumi varajases nooruses (2-3 minutit pärast sündi). Kuna piirjuhul $t \rightarrow 0$, tihedus $\rho(t) \rightarrow \infty$, siis selle põhjal võime oletada, et temperatuur oli Universumis ülikõrge.

Küsimused.

1. Arvutada Universumi vanus kriitilise tiheduse korral, võttes Hubble'i konstandi väärtuseks

$$H_0 = 75 \frac{km}{m \cdot Mpc} . \text{ Võrrelda saadud tulemust praegu aktsepteeritud Universumi vanusega.}$$



Joonis 8. E. Hubble'i tulemused galaktikate kauguste ja nende eemaldumiskiiruste kohta. Vertikaalteljel on kiirus km/s-tes.

2. Joonisel 8 on toodud Hubble'i andmed galaktikate kauguste ja nende eemaldumise kiiruse kohta. Leida joonise järgi a) Hubble'i konstant; b) Universumi tihedus (eeldades, et Universumi tihedus on võrdne kriitilise); c) Universumi vanus. Võrrelda saadud tulemust Maa ja Päikesesüsteemi vanusega.

3. Selgitada kriitilise tiheduse tähendust.

4. Selgitada, millistes mastaapides saab rakendada antud peatükis toodud arutluste järeldusi?
5. Millise Hubble'i konstandi väärtuse ja Universumi vanuse puhul oli Universumi aine kriitiline tihedus võrdne vee tihedusega?

3 Universumi kui terviku struktuur

3.1 Universumi kui terviku geomeetriline struktuur

Üldrelatiivsusteooria alused

Ettekujutus Universumi geomeetrilisest struktuurist tugineb üldrelatiivsusteooriale (ÜRT).

ÜRT põhipostulaadid:

- igas piisavalt väikeses aeg-ruumi piirkonnas kehtib erirelatiivsusteooria (ERT);
- kehtib ekvivalentsprintsiiip – raske mass on võrdne inertse massiga.

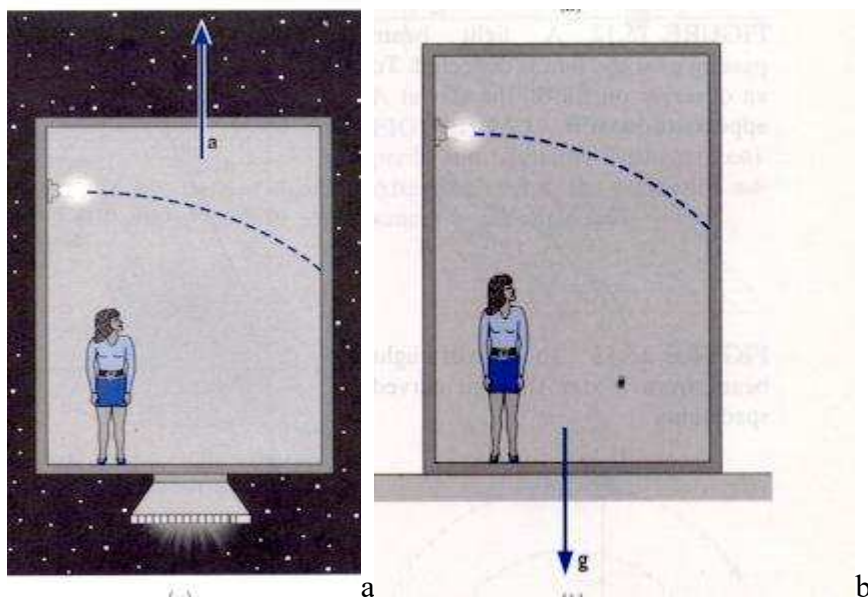
Meenutame erirelatiivsusteooria põhiprintsiipe.

ERT põhipostulaadid:

- Relatiivsuse postulaat – füüsikaseadused on ühesugused vaatlejate jaoks kõikides inertsiaalsetes taustsüsteemides. Ükski taustsüsteem ei ole teiste suhtes eelistatud.
- Valguse kiiruse postulaat – valguse kiirus vaakumis c on suurim võimalik kiirus, mis on ühesugune kõigis suundades ja kõigis inertsiaalsetes taustsüsteemides.

Inertne mass on mass, mis esineb Newtoni II seaduses: mida suurem on keha inertne mass, seda suuremat jõudu on vaja tema kiiruse muutmiseks. **Raske mass** on mass, mis figureerib Newtoni gravitatsiooniseaduses - kaks keha tõmbuvad teineteise poole jõuga, mis on võrdeline nende kehade masside korrutisega. Tänapäeval on ekvivalentsprintsiiipi korduvalt füüsikalistes katsetes kontrollitud. Viimastel andmetel on tuvastatud ekvivalentsprintsiiibi kehtivus suhtelise veaga 10^{-15} (see on väga suur täpsus). Kui raske ja inertne mass on võrdsed, esineb Einsteini lifti efekt - vabalt kukkuv lift ei saa vaatleja määrata, kas talle mõjub gravitatsiooniväli (lift liigub kiirendusega) või lift asub taevakeha gravitatsiooniväljas.

Käsitleme ülaltoodud näidet lähemalt. Olgu meil tegemist suletud liftiga. Ühel juhul langeb lift vabalt Maa gravitatsiooniväljas vaba langemise kiirendusega $9,81\text{m/s}^2$. Selle sees oleva inimene ei ole surutud vastu põrandat ega lage, st ta hõljub vabalt – ta on kaaluta olekus. Olgu meil seesama lift sellesama inimesega kosmoses. Ka seal valitseb kaalutus. Kui lift on suletud, aknaid pole, ei saa liftis asuv vaatleja ühegi lokaalse katsega kuidagi teha kindlaks, kas ta paikneb avakosmoses või langeb vabalt Maa peal.



Joonis 9. a) Vaatleja liikumas kiirendusega $a=g$ raketis (liftis) lähedal olevate tähtede suhtes, b) vaatleja seismas Maa peal suletud liftis.

Samamoodi võime vaadata ilma akendeta lifti või raketti, mis ühel juhul paikneb maapinnal (vt joonis 9). Inimesele seal mõjub gravitatsioonijõud $F = G \frac{m_r \cdot M}{r^2} = m_r g$, kus m on inimese mass, M – Maa mass, r – Maa raadius. Kui seesama lift avakosmoses liiguks kiirendusega g (näiteks Päikese suhtes, kiirendaks end siit süsteemist välja), siis mõjub inimesel selles jõud $F = m_l g$. Ja samamoodi nagu kaaluta oleku näites – kinnises, suletud raketis ei saa öelda, kas on tegemist gravitatsioonivälja mõjuga, mis surub inimese vastu raketi põhja või liigub see kiirendusega avakosmoses. Erinevuse saab kindlaks teha alles siis, kui saab liikumist võrrelda ülejäänud kosmoseruumiga. St, me saame selle kindlaks teha globaalsete mõõtmiste abil. Esimesel juhul oli ilmnis gravitatsioonijõu valemis m_r – inimese raske mass, teisel juhul m_l – inertsiaalne mass. See, et gravitatsiooniväljas paigalseisvana olemine on eristamatu kiirendusega liikumisest tähendabki raske ja inertsiaalse massi võrdsust.

Nii nagu gravitatsioon mõjub massiga kehadele, peab ta mõjutama ka valguskiirt. Vaatleme näiteks valguskiirt ühtlase kiirusega liikuvast raketis. Valguskiir on suunatud liikumisega risti. Selles raketis valguskiir liigub sirgelt, kuid vastasseina tabab pisut allpool kui paigaloleku puhul. Kuid kui rakett liigub kiirendusega, siis valguskiir kõverdub – tabab vastasseina allpool, kui tabaks juhul, kui rakett liigub ühtlase kiirusega. (vt joonis 9). Ekvivalentsprintsibiist tuleneva järelduse kohaselt peab sama juhtuma ka siis, kui rakett on paigal, kuid paikneb gravitatsiooniväljas, näiteks Maa peal. Efekt peaks olema küll tilluke, kuid mõõdetav. Siin on oluline – valguskiir võib kõverduda gravitatsiooniväljas.

Ekvivalentsprintsiooni sügavam analüüs näitab, et piisavalt väikestes aeg-ruumi piirkondades on gravitatsioonijõud ja inertsiaaljõud füüsikaliselt eristamatud.

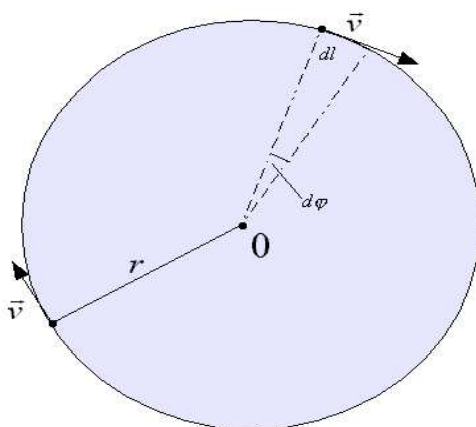
ÜRT põhipostulaatidest järeldub, et meid ümbritseva ruumi (aeg-ruumi) geomeetria ei saa olla eukleidiline (pseudoeukleidiline), vaid aeg-ruum on kõver. Illustreerimaks öeldut, vaatleme veel üht näidet.

Olgu meil konstantse nurkkiirusega ω pöörlev ketas, mille keskel on vaatleja (vt joonis 10). Ketta äärepunktide joonkiirus $v = r \cdot \omega$. Vaatlejal on piisavalt pikk käsi, et ta saab joonlauaga mõõta nii ketta raadiuse pikkuse r kui ka ketta äärejoone pikkuse l . ERT kohaselt saab ta raadiuse pikkuseks sama tulemuse kui mittepöörleva ketta korral $r = r_0$, kuna liikumissuunaga risti olevas sihis ei esine pikkuste lühenemise efekti. Olukord on teine ketta äärejoone pikkuse mõõtmisel. Seal asuvad mõõdetavad joone lõigukesed kiirusvektori sihil ja seetõttu esineb pikkuste lühenemise efekt:

$$dl = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot dl_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot r_0 d\phi, \quad (3.1)$$

kus dl_0 on lõigukesel pikkus paigaloleva ketta korral ja c - valguse kiirus. Integreerides avaldist (3.1) üle kogu ringjoone, saame ringjoone pikkuseks

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot r_0 d\phi = 2\pi \cdot r_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$



Joonis 10. Konstantse nurkkiirusega pöörlev ketas. Vaatleja asub ketta tsentris (punkt 0). Mõõdetava äärejoone lõigukesel pikkus dl on väiksem, kui see on paigaloleva ketta korral.

Siit on näha, et pöörleva ketta korral on vaatleja poolt mõõdetav äärejoone pikkus l väiksem kui paigaloleva ketta äärejoone pikkus l_0 . Efekt on ilmenud tänu kiirendusega (kesktõmbekiirendus) liikumisele.

Iga mass või energia ($E=mc^2$) põhjustab aeg-ruumi kõverdumise. Kõvera aeg-ruumi geomeetriat uurib matemaatika valdkond, mida nimetatakse Riemann'i geomeetriaks.

3.2 Meetrika tasases aeg-ruumis

Meetrika on eeskiri, mille järgi arvutatakse kaugusi kahe ruumipunkti (aeg-ruumi punkti) vahel. Kui meetrika on antud, siis saab lisaks kaugustele arvutada ka geomeetriliste kujundite pindalasid ja ruumalasid. Rõhutagem, et füüsikaline (mõõdetav) kaugus kahe ruumipunkti vahel ei tohi sõltuda sellest, millise koordinaatsüsteemi me valime punktide asukoha kirjeldamiseks.

3.2.1 Meetrika tasases kolmruumis

Tasases kolmruumis on meetrikat kõige lihtsam kirjeldada ristkoordinaadistikus. Kahe lõpmata lähedase punkti vaheline kaugus ruumis dl avaldub järgmiselt:

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \quad (3.2)$$

kus dx , dy ja dz on vaadeldavate punktide vastavate koordinaatide vahed. Kuna kaugus kahe punkti vahel ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust, siis teades, kuidas koordinaadid mingis teises koordinaatsüsteemis on seotud ristkoordinaadistikuga, on valemist (3.2) võimalik tuletada $(dl)^2$ avaldis selles uues koordinaatsüsteemis.

Näitena vaatleme lähemalt sfäärilisi koordinaate (vt joonis 11). Sfäärilised koordinaadid r , θ ja ϕ on seotud ristkoordinaatidega järgmiselt:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad (3.3)$$

kus $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$ ja $r \in (0, \infty)$.

Arvutades valemist (3.3) diferentsiaalid dx , dy ja dz ning asendades nad seejärel avaldisse (3.2), saamegi meetrika sfäärilistes koordinaatides:

$$(dl)^2 = (dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2]. \quad (3.4)$$

Illustreerime meetrika (3.4) kasutamist mõningate näidetega joonise 11 baasil.

3.2.2 Kaugus kahe punkti vahel kolmruumis

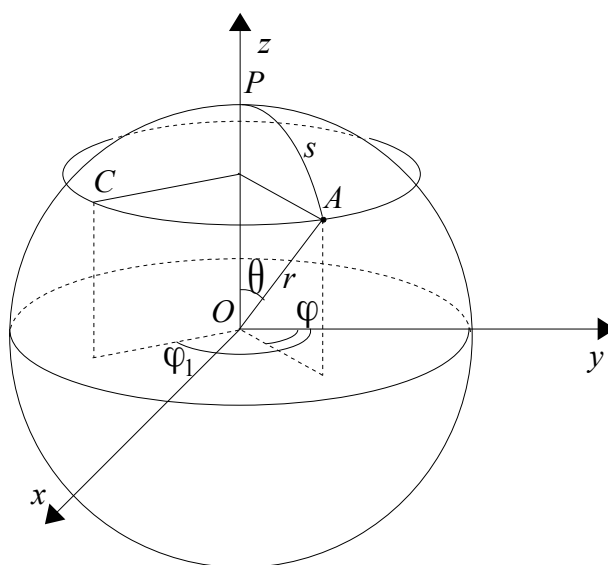
Võtame ühe punktidest (punkt O) sfääriliste koordinaatide alguspunktiks (vt joonis 11). Kaugus punktide O ja A vahel on neid ühendava radiaalse sirglõigu pikkus. Selle sirge võrrandiks sfäärilistes koordinaatides on:

$$\begin{aligned} \theta &= \text{const} \\ \phi &= \text{const} \end{aligned}.$$

Järelikult $d\theta=0, d\phi=0$ ja $dl_r=dr$. Integreerides viimast võrdust, saame punktide A ja O vaheliseks kauguseks punktide A radiaalkoordinaadi $l_r = \int_0^r dr' = r|_0^r = r$.

Kaugus kahe punkti vahel sfääri pinnal (kahe mõõtmeline kõverruum)

Kaugus kahe punkti vahel kõveras ruumis on neid punkte ühendava kõige lühema kõvera pikkus. Sfäärilisel pinnal on selliseks kõveraks suurringi kaar. Punkte P ja A (vt joonis 11) ühendava suurringi võrrandiks on $r=const, \phi=const$. Seega $dr=0, d\phi=0$, ja $dl_\theta=r d\theta$.



Joonis 11. Sfäärilised koordinaadid. Koordinaatide alguspunkt on sfääri tsentris O. Punkti A koordinaatideks on r, θ ja ϕ .

Integreerides viimast võrdust üle punktide P ja A ühendava kaare s, saame nende vaheliseks kauguseks $l_\theta = r\theta$, kus θ on punkti A koordinaat. Meie poolt kerapinnal kasutatav koordinaadistik ühtib põhimõtteliselt geograafilise koordinaadistikuga: koordinaatjooned $r=const, \phi=const$ kujutavad endast meridiaane ja koordinaatjooned $r=const, \theta=const$ paralleele.

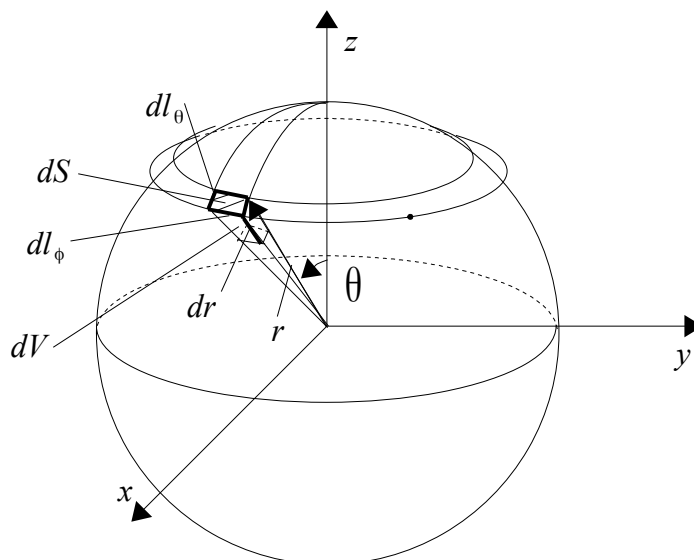
Vaatleme, kuidas leida kahe punkti C ja A vahelist kaugust mööda paralleeli. Sellisel juhul on $r=const, \theta=const$ ja $dl_\phi = r \cdot \sin\theta \cdot d\phi$ (vt valemit (3.4) ja joonist 11). Järelikult peale integreerimist saame $l_\phi = r \sin\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = r \sin\theta (\phi_2 - \phi_1) = r \sin\theta \Delta\phi$.

3.2.3 Pindala ja ruumala elemendid sfäärilistes koordinaatides

Pindala element

Nii nagu ristkoordinaatide korral on ka sfääriliste koordinaatide puhul pindala elemendiks infinitesimaalselt väikese (lõpmatult väikese) ristküliku pindala (vt joonis 12):

$$dS = dl_\theta \cdot dl_\phi.$$



Joonis 12. Erinevad väikesed jooneelemendid dl_r, dl_θ, dl_ϕ , pindalaelement dS sfääri pinnal sfääri raadiusega r ning ruumala element dV .

Asendades eelnevalt leitud dl_θ ja dl_ϕ avaldised ülal toodud võrdusesse, saame:

$$dS = r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi. \quad (3.5)$$

Lõpliku määrdetega pinnatüki pindala leidmisel tuleb see jagada infinitesimaalselt väikesteks tükikeks ja seejärel nende tükikeste pindalad liita (integreerida). Valemi (3.5) kasutamisel tuleb siiski jälgida, et sfääriliste koordinaatide alguspunkt ei asuks määrdetaval pinnal. Leiame näitena valemi (3.5) abil sfääri raadiusega r pindala:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi = r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \\ &= r^2 \phi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = r^2 \cdot 2\pi \cdot (-(-1)) = 4\pi r^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Oleme saanud tuntud avaldise sfääri pindala jaoks.

Ruumala element

Ruumala elemendil (vt joonis 12) on sfäärilistes koordinaatides järgmine kuju:

$$dV = dl_r \cdot dl_\theta \cdot dl_\phi = r^2 \sin \theta dr \cdot d\theta \cdot d\phi. \quad (3.6)$$

See on infinitesimaalselt väikese risttahuka ruumala.

3.2.4 Tasase aeg-ruumi meetrika (Minkowski meetrika)

Tegelikkuses asetleidvate, mistahes nähtuste kirjeldamisel ja uurimisel, tuleb objekti alati vaadelda nii ruumis kui ka ajas. Füüsikaline maailm on sündmuste maailm, st selle maailma punktideks on erinevad sündmused. Iga elementaarsündmus on iseloomustatud nelja koordinaadiga - kolm ruumikoordinaati (asukoht) ja üks ajakoordinaat (t). Nii on füüsikalises mõttes ruum ja aeg alati lahutamatud. Tegemist on ühtse tervikuga – aeg-ruumiga.

Kahe lähedase sündmuse vahelist kaugust ds tasases aeg-ruumis kirjeldab Minkowski meetrika:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad (3.7)$$

kus c - on valguse kiirus, dt - sündmuste toimumise hetkede erinevus ja dx, dy, dz - sündmuste vastavate ruumikoordinaatide vahed. Füüsikaalases kirjanduses nimetatakse sündmuste vahelisi kauguse ruutu ds^2 tihti ka sündmuste vahelise intervalli ruuduks. Edaspidi on mugav kasutada sündmuste koordinaatide jaoks järgmisi tähistusi:

$$\begin{aligned} x_0 &= ct, \\ x_1 &= x, \\ x_2 &= y, \\ x_3 &= z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Neis tähistustes omab meetrika (3.7) kuju:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2. \quad (3.9)$$

ERT kohaselt on kõik inertsiaalsed taustsüsteemid võrdväärsed. Seega kahe sündmuse vahelise intervalli ruut (aeg-ruumi meetrika) ei sõltu inertsiaalsüsteemi valikust. Minkowski meetrikal on rida omadusi, mis erinevad kvalitatiivselt tasase kolmruumi meetrika omadustest. Näiteks, kuna footon liigub valguse kiirusega, siis tema jaoks on kõik footoniga toimuvad sündmused aeg-ruumis kaugusel null: $ds=0, dl=c dt$. Nii nagu tasases (eukleidilises) kolmruumis, nii ka tasases aeg-ruumis on alati võimalik kasutada koordinaate, millel on vahetu meetriline mõte.

3.3 Meetrika kõveras aeg-ruumis ja Einsteini võrrandid

Riemann'i meetrika

ÜRT kohaselt põhjustavad ruumis olev mass ja energia aeg-ruumi kõveruse. Kõveras aeg-ruumis ei ole sündmuste koordinaatidel enam vahetut meetrilist mõtet. Sündmuste vahelist kaugust ds kirjeldab siis Riemann'i meetrika:

$$(ds)^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 g_{ik}(x) dx_i dx_k. \quad (3.10)$$

Kuuttest aeg-ruumi punktist x sõltuvat funktsiooni $g_{ik}(x)$ nimetatakse meetrilise tensori $g(x)$ komponentideks (tihti lühiduse mõttes meetriliseks tensoriks või meetrikaks, sest nende teadmine võimaldab valemi (3.10) järgi leida sündmuste vahelise intervalli ds). Kuna meetriline tensor on sümmeetriline $g_{ik} = g_{ki}$ siis üldjuhul on meetrilisel tensoril igas aeg-ruumi punktis 10 sõltumatut komponenti. Kuigi meetrilise tensori komponentide kuju sõltub taustsüsteemi (koordinaatsüsteemi) valikust, on kahe sündmuse vaheline kaugus (intervall) (3.10) koordinaatsüsteemi valikust sõltumatu. Loomulikult kirjeldavad erinevates kõverates aeg-ruumides meetrikat erinevad meetrilised tensorid $g(x)$.

Einsteini võrrandid

Einsteini võrrandid seovad aeg-ruumi geomeetriat (meetrikat) aine ja energia olemasolu ning liikumisega aeg-ruumis

$$G_{ik}(g(x)) = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} + \Lambda g_{ik}. \quad (3.11)$$

Sümmeetrilist tensorit G nimetatakse Einsteini tensoriks. Sellel tensoril on 10 sõltumatut komponenti $G_{ik} = G_{ki}$, millised avalduvad meetrilise tensori g komponentide ja nende esimest ja teist järku tuletiste kaudu. Seega iseloomustab Einsteini tensor aeg-ruumi kõverust. Tensor T on energia-impulssensor ja on samuti kümne sõltumatu komponendiga sümmeetriline tensor, $T_{ik} = T_{ki}$. See tensor iseloomustab energia ja aine jaotust ning aine liikumist aeg-ruumis.

Matemaatiliselt on võrrandid (3.11) äärmiselt keerukad. Tegemist on omavahel seotud kümne mittelineaarse teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemiga. Füüsikaliselt kirjeldavad need võrrandid aeg-ruumi kõverust, mille põhjustab seal oleva aine ning energia jaotus ja liikumine, aga samuti kõvera aeg-ruumi mõju aine (energia) jaotusele, liikumisele. Seega kirjeldavad võrrandid nii seda, kuidas materiaalsed objektid, nende energia ja mass, tekitavad gravitatsioonivälja (aeg-ruumi kõverust), kui ka seda, kuidas sama gravitatsiooniväli omakorda määrab objektide, nii massiga kehade kui ka valguskiire, liikumise.

Lõpuks tuletagem meelde, et tensor on füüsikalist suurust (või geomeetrilist suurust) iseloomustav matemaatiline objekt, mis ei sõltu koordinaatsüsteemi valikust, küll aga sõltuvad koordinaatsüsteemi valikust teda kirjeldavad komponendid. Seetõttu on oluline valida uuritavate nähtuste kirjeldamiseks sobiv koordinaatsüsteem, kuivõrd Einsteini võrrandid erinevates koordinaatsüsteemides on erineva kujuga ning mõnes näivad need lihtsamad, teistes keerulisemad.

3.4 Robertson-Walkeri meetrikad

Meenutagem kosmoloogilist printsiipi, kus on öeldud, et ruum on homogeenne ja isotroopne. 1934. aastal Howard Robertson ja Arthur Walker tuletasid sellise ruumi kirjeldamiseks täieliku meetrika avaldise. Nad näitasid, et on olemas kolm võimalust, mida iseloomustatakse parameetriga k :

- Universum on positiivse ruumilise kõverusega ($k = +1$),
- Universum on negatiivse ruumilise kõverusega ($k = -1$),
- Universum on tasane ($k = 0$).

Positiivse kõverusega ruumi nimetatakse ka kinniseks ruumiks (st ruumala on positiivse kõverusega ruumil lõplik). Ülejäänud kaks ruumi ($k = 0$ ja $k = -1$) on lahtised ruumid, mille ruumala on lõpmatu.

Aeg-ruumi meetrika üldstruktuur on antud juhul järgmine:

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - (dl)^2, \quad (3.12)$$

kus $(dl)^2$ on kolmruumi meetrika, mille konkreetne kuju sõltub parameetri k väärtusest, c - on valguskiirus ja t on aeg. Positiivse kõverusega ($k=+1$) ruumi korral saab koordinaatsüsteemi (χ, θ, ϕ) valida nii, et

$$(dl)^2 = a^2(t) \left[(d\chi)^2 + \sin^2 \chi \left[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right] \right], \quad (3.13)$$

kus $a(t)$ on suvaline ajast sõltuv funktsioon ning koordinaatide χ, θ, ϕ muutumise piirkonnad on

$$\chi \in (0, \pi), \theta \in (0, \pi), \phi \in (0, 2\pi). \quad (3.14)$$

Negatiivse kõverusega ($k=-1$) ruumi korral

$$(dl)^2 = a^2(t) \left[(d\chi)^2 + sh^2 \chi \left[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right] \right], \quad (3.15)$$

kus $\chi \in (0, \infty), \theta \in (0, \pi), \phi \in (0, 2\pi)$. Hüperboolne siinus on defineeritud järgmiselt:

$$sh \chi = \frac{e^\chi - e^{-\chi}}{2}.$$

Tasase ruumi korral ($k=0$) on meetrika $(dl)^2$ kuju antud valemiga

$$(dl)^2 = a^2(t) \left[(d\chi)^2 + \chi^2 \left[(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2 \right] \right], \quad (3.16)$$

kus $\chi \in (0, \infty), \theta \in (0, \pi), \phi \in (0, 2\pi)$.

Järgnevalt vaatleme lähemalt positiivse kõverusega ruume, tuginedes Robertsoni-Walker'i meetrikale.

Positiivse kõverusega ruum

- Radiaalne kaugus kahe punkti vahel.

Võtame ühe punkti koordinaatide alguspunktiks ja arvestame, et radiaalse sirge võrrandiks on $\theta = \text{const}, \phi = \text{const}$, saame valemist (3.13):

$$dl_\chi = a d\chi, l_\chi = a \chi, \quad (3.17)$$

kus χ on teise punkti radiaalkoordinaat. Kuna χ maksimaalne väärtus on π , siis on taolises ruumis kahe punkti vaheline maksimaalne kaugus $l_{\chi, \max} = a\pi$, st positiivse kõverusega ruumis ei ole kahte punkti, millede vaheline kaugus oleks suurem kui $a\pi$.

- Sfääri pindala.

Pinnaelement dS sfääril, kus $\chi = \text{const}$ on

$$dS = dl_\theta \cdot dl_\phi = a^2 \sin^2 \chi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi. \quad (3.18)$$

Valemi (3.18) tuletamisel arvestasime, et sfääril, mille radiaalkoordinaat $\chi = \text{const}$ on kaarekeste pikkused dl_θ ja dl_ϕ määratud vastavalt joonte $(\chi = \text{const}, \phi = \text{const})$ ja $(\chi = \text{const}, \theta = \text{const})$ võrranditele meetrikaga (3.13):

$$dl_\theta = a \sin \chi \cdot d\theta, dl_\phi = a \sin \chi \cdot \sin \theta \cdot d\phi.$$

Rakendades valemit (3.18) on meil lihtne leida sfääri $\chi = \text{const}$ pindala S (vt ka (3.6)):

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin^2 \chi \sin \theta \cdot d\phi \cdot d\theta = a^2 \sin^2 \chi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi = 4\pi a^2 \sin^2 \chi. \quad (3.19)$$

Näeme, et sfääri raadiuse $R = l_\chi = a \chi$ kasvades suureneb ka alguses sfääri pindala, kuni saavutab radiaalkoordinaadi väärtuse $\chi = \frac{\pi}{2}$ korral maksimaalse väärtuse $S_{\max} = 4\pi a^2$.

Raadiuse edasisel kasvamisel kahaneb pindala monotoonselt nii, et maksimaalse radiaalkoordinaadi väärtuse $\chi = \pi$ korral on sfääri pindala võrdne nulliga. Selline tulemus iseloomustab positiivse kõverusega ruumi omaduste erinevust tasase ruumi omadustest.

- Ringjoone pikkuse ja raadiuse suhe.

Leiame positiivse kõverusega ruumis ringjoone $(\chi = \text{const}, \theta = \frac{\pi}{2})$ pikkuse L . Meetrika avaldise (3.13) põhjal on sellel ringjoonel kaareelemendi pikkuseks

$$dl_\phi = a \sin \chi \cdot d\phi$$

ja järelkult

$$L = \int_0^{2\pi} a \sin \chi \cdot d\phi = 2\pi a \sin \chi.$$

Ringjoone raadiuseks on (vt valem (3.17)) $R = a \chi$.

Seega saame antud ringjoone jaoks tema pikkuse ja raadiuse suhteks:

$$\frac{L}{R} = 2\pi \frac{\sin \chi}{\chi} < 2\pi. \quad (3.20)$$

Siit järeldubki, et positiivse kõverusega ruumis on ringjoone pikkuse ja raadiuse suhe väiksem kui 2π .

- Sfääri ruumala.

Sarnaselt tasase ruumi juhule, on ruumala element dV leitav meetrikast (3.13) järgmiselt:

$$dV = dl_\chi \cdot dl_\theta \cdot dl_\phi = a^3 \sin^2 \chi \cdot \sin \theta \cdot d\chi \cdot d\theta \cdot d\phi. \quad (3.21)$$

Arvutame nüüd sfääri, mille raadius on $R = a \chi_0 = \text{const}$, sisse jääva ruumala:

$$V(\chi_0) = \int_0^{\chi_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^3 \sin^2 \chi \cdot \sin \theta \cdot d\chi \cdot d\phi \cdot d\theta = 4\pi \cdot a^3 \left(\frac{1}{2} \chi_0 - \frac{1}{4} \sin 2\chi_0 \right). \quad (3.22)$$

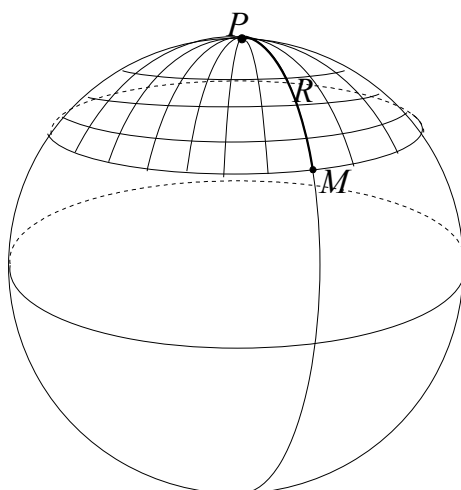
Siin on näha, et raadiuse kasvades (χ_0 kasvades) kasvab monotoonselt ka sfääri ruumala. Kui $R=0$, on $V(0)=0$. Kui raadiuse väärtus on maksimaalne $R_{\max} = a\pi$, siis on maksimaalne ka sfääri ruumala:

$$V(\pi) = 2\pi^2 a^3. \quad (3.23)$$

Seega positiivse kõverusega ruumi korral on kogu Universumi ruumala V_{Univ} lõplik:

$$V_{\text{Univ}} = 2\pi^2 \cdot a^3.$$

Tuletades meelde varasemalt leitud tulemusi sfääri pindala osas, saame teada – kogu lõpliku ruumalaga Universum sisaldub sfääris, mille pindala on null. See tulemus ei olegi nii üllatav, kui me vaatleme kolmemõõtmelise positiivse kõverusega ruumi kahemõõtmelist analoogi – tavalise sfääri pinda (vt joonis (13)). Asugu kahemõõtmeline vaatleja gloobuse põhjapoolusel. Tema jaoks on kõige lühem tee mingi punktini poolust ning seda punkti ühendav suuringi kaar ehk meridiaani lõik. Kogu Universumiks on gloobuse pind. Gloobusel on vaatleja ümber sfääriliseks „pinnaks“ paralleel ehk ringjoon. Sfääri raadiuse (meridiaanilõigu pikkuse) kasvades, suureneb alguses ka monotoonselt paralleeli kogupikkus (sfääri pindala), kuni saavutab maksimaalse väärtuse ekvaatoril. Edasisel raadiuse kasvamisel paralleelide pikkused (sfääri pindalad) kahanevad monotoonselt ja maksimaalse raadiuse (pool gloobuse ümbermõõdust) korral on paralleeli pikkus võrdne nulliga.



Joonis 13. Kahemõõtmeline Universum – gloobus. Vaatleja asub põhjapoolusel P . Lühim tee vaatlejast punktini M on meridiaanikaar PM pikkusega R . Vaatlejat ümbritseva „sfääri“, raadiusega R , „pindala“ on punkti M läbiva paralleeli pikkus. Vastava „sfääri ruumala“ on selle paralleeli poolt ümbritsetud gloobuse pinnatüki pindala (viirutatud).

Negatiivse kõverusega ruum

Tuginedes meetrikale (3.15), saame positiivse kõverusega ruumi korral läbiviidud arvutustega analoogiliste arvutuste teel järgmised tulemused.

- Kahe punkti vaheline kaugus

$$l_{\chi} = a \chi, \quad \chi \in (0, \infty), \quad (3.24)$$

st kahe punkti vaheline kaugus võib ruumis olla kuitahes suur.

- Sfääri pindala, kui $\chi = \text{const}$

$$S = 4\pi \cdot a^2 \operatorname{sh}^2 \chi, \quad (3.25)$$

seega kui kasvab sfääri raadius $R = a \chi$, kasvab ka monotoonselt sfääri pindala.

- Ringjoone pikkuse L ja raadiuse R suhe

$$\frac{L}{R} = 2\pi \frac{\operatorname{sh} \chi}{\chi} > 2\pi, \quad (3.26)$$

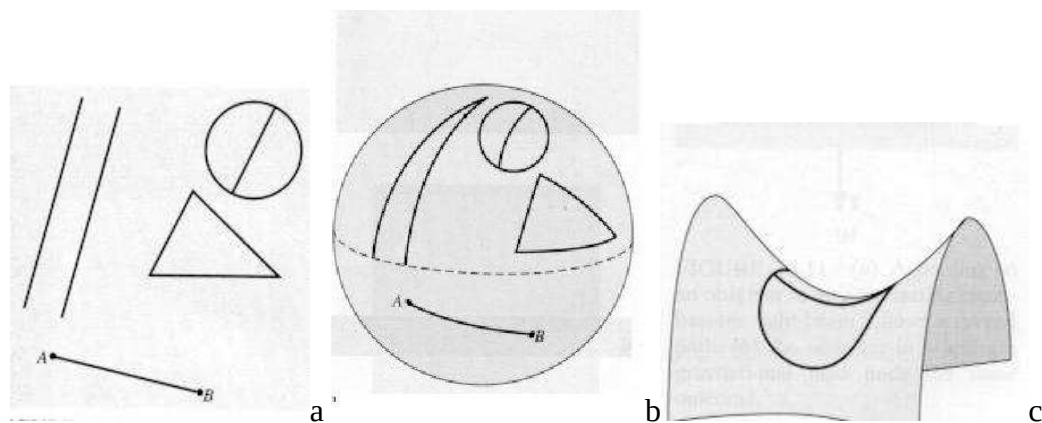
näeme, et negatiivse kõverusega ruumis on raadiuse ja ringjoone pikkuse suhe suurem kui 2π .

- Sfääri ruumala

$$V(\chi_0) = 4\pi a^3 \left[\frac{1}{4} \operatorname{sh}(2\chi_0) - \frac{\chi_0}{2} \right], \quad (3.27)$$

järelikult sfääri raadiuse $R = a \chi_0$ kasvades, kasvab ka sfääri sisene ruumala monotoonselt. Sarnaselt tasase ruumiga, on negatiivse kõverusega ruumil samuti lõpmata suur ruumala.

Joonisel 14 on toodud erinevad geomeetrilised kujundid tasase ruumi, positiivse kõverusega ehk kumera ruumi ning negatiivse kõverusega ruumi korral.



Joonis 14. Erinevad geomeetrilised kujundid a) tasase; b) positiivse kumerusega ja c) negatiivse kumerusega, ruumide korral.

Tasase ruumi korral (Joonis 14a) lõikuvad paralleelsed sirged lõpmatutes, positiivse kumerusega ruumi korral kaks korda (näiteks – meridiaanid gloobusel). Tasases ruumis on kolmnurga sisenurkade summa 180° , positiivse kõverusega ruumi korral üle 180° ning negatiivse kõverusega ruumi korral alla 180° .

Tasane ruum

Arvestades, et kahe punkti vaheline kaugus (ehk ka kaugus sfääri keskpunktist sfääri pinnani) on $R = a\chi$, siis võrreldes tasase ruumi meetrikat (3.16) meetrikaga (3.4), võib lihtsalt leida, et ringjoone pikkuse L ja ringjoone raadiuse suhe on

$$\frac{L}{R} = 2\pi. \quad (3.28)$$

Sfääri pindala on

$$S = 4\pi a^2 \chi^2 \quad (3.29)$$

ning sfääri ruumala on

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \chi^3. \quad (3.30)$$

Kokkuvõtlikult olulisim Robertson-Walkeri meetrikatest.

Kõigi Robertson-Walkeri meetrikate puhul võime meetrika kirjutada järgmiselt:

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - (dl)^2,$$

kus ruumilisi vahemaid kirjeldav suurus dl^2 sõltub täiendavalt suurusest $a(t)$ ehk nn mastaabikordajast. Ruum võib olla kas tasane, negatiivse või positiivse kõverusega. Kõigil juhtudel avaldub radiaalsuunaline kaugus järgmiselt:

$$l_\chi = a(t)\chi,$$

kus χ on radiaalkoordinaat. Kui ruum on positiivse kõverusega, siis eksisteerib maksimaalne kahe punkti vaheline kaugus, $l_{\chi \max} = a\pi$. Siit järeldub ka, et mastaabikordaja saab omakorda määrata suletud, positiivse kõverusega aegruumi raadiusest ajahetkel t – see määrab ära mõõtmisühiku.

Mingit sfääri ümbritseva pinna pindala ja selle sfääri ruumala sõltuvad radiaalkordajast χ erinevalt erinevate ruumikõveruste korral. Seejuures on positiivse kõverusega ruumi korral ruumi ruumala lõplik ning samuti leidub maksimaalne sfääri ümbritseva pinna pindala. Tasase aegruumi ning negatiivse kõverusega aegruumi korral on ruumi ruumala lõpmata suur.

Ülesanded

1. Võrrelda erinevate ruumide korral a) ringjoone pikkuse ja raadiuse suhet, b) sfääri pindala ning c) sfääri ruumala. Selleks leida nimetatud suurused tasase, positiivse ja negatiivse kõverusega aegruumi korral järgmistel χ väärtustel: $\chi=0, \pi/4, \pi/2, \pi$. Selleks täitke järgnev tabel.

Ruumi kõverus	χ	L	$\frac{L}{R}$	S	V
$k = 0$	0				
	$\pi/4$				
	$\pi/2$				
	π				
$k = +1$	0				
	$\pi/4$				
	$\pi/2$				
	π				
$k = -1$	0				
	$\pi/4$				
	$\pi/2$				
	π				

4. Friedman'i võrrandid ja nende lahendite analüüs

4.1. Friedman'i võrrandid

1922. aastal konstrueeris Aleksander Friedman tänapäeva kosmoloogia aluseks oleva teoreetilise mudeli ehk Friedman'i mudeli. Selle tuletamisel lähtutakse Einsteini võrranditest (3.11) ja kosmoloogilisest printsiibist tulenevatest Robertsoni-Walker'i meetrikatest (3.12), (3.13) ja (3.15):

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - (dl_k)^2. \quad (4.1)$$

Indeks $k=1,0,-1$ markeerib kolme võimalikku olukorda: positiivse kõverusega, tasase või negatiivse kõverusega Universum. Mudelit kirjeldavad põhivõrrandid leitakse järgmise skeemi kohaselt. Esiteks, lähtudes meetrikast (4.1), arvutatakse Einsteini tensori komponendid

G_{ij} (vt punkti 3.3). Niimoodi arvutatud Einsteini tensori komponendid sisaldavad tundmatut ajast sõltuvat funktsiooni $a(t)$, mis tuleb leida Einsteini võrranditest. Märgime, et funktsioon $a(t)$ määrab Universumi erinevatel arengu etappidel ruumilise mastaabi.

Teiseks, tuginedes kosmoloogilisele printsiibile, eeldatakse, et energia-impulsstensori komponendid avalduvad meetrika (4.1) korral järgmiselt:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho c^2; \quad T_{\alpha\alpha} = -p g_{\alpha\alpha}, \quad \alpha=1,2,3; \\ T_{ij} &= 0, \quad \text{kui } i \neq j, \quad i, j=0,1,2,3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Selles punktis tähistavad suurused $g_{\alpha\alpha}$ meetrilise tensori diagonaalseid ruumilisi komponente. Suuruste ρ ja p füüsikaline tähendus on järgmine: ρc^2 on aine ja energia tihedus Universumis (energiaühikutes, vastavalt Einsteini seosele $E=mc^2$) ja p on rõhk. Arvestades, et Universumis, suures mastaabis on aineosakesteks terved galaktikad, võib praegusel Universumi arenguetapil rõhu p lugeda võrdseks nulliga. Galaktikate omavahelised põrked toimuvad ülimalt harva. Rõhku tuleb aga arvestada Universumi arengu varajases staadiumis, kus aine ja energia kontsentratsioon oli väga suur.

Asendades kirjeldatud viisil leitud Einsteini tensori G_{ij} ja energia-impulsstensori T_{ij} komponendid Einsteini võrranditesse (3.11), saadakse kaks sõltumatut võrrandit (ülejäanud 8 võrrandit on kas samasugused või järelduvad neist kahest):

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{1}{3} \Lambda c^2 a, \quad (4.3.a)$$

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{1}{6} \Lambda c^2 a^2, \quad k=1,0,-1. \quad (4.3.b)$$

Täpp funktsiooni kohal tähendab praegu ja ka edaspidi aja järgi tuletist, st

$$\dot{a} = \frac{d}{dt} a(t).$$

Võrrandeid (4.3.a) ja (4.3.b) nimetatakse Friedman'i võrranditeks. Näeme, et võrrandites on kolm tundmatut funktsiooni, mis sõltuvad ajast:

- mastaabi kordaja $a(t)$;
- aine-energia tihedus $c^2 \cdot \rho(t)$;
- rõhk $p(t)$.

Meil on vaja veel ühte võrrandit, et saaksime neid funktsioone määrata, milleks on Universumis oleva aine-energia olekuvõrrand. Viimane leitakse füüsikalistest kaalutlustest ja on Universumi arengu erinevatel etappidel erinev. Käesoleval etapil on olekuvõrrandi väga heaks lähenduseks võrrand:

$$p=0, \quad (4.4)$$

st rõhk puudub. Väga varajases Universumi arengu staadiumis, kus aine ja energia kontsentratsioon oli väga kõrge, võib kasutada ülirelativistliku aine olekuvõrrandit:

$$p = \frac{\rho c^2}{3}. \quad (4.5)$$

Olekuvõrrand (4.5) on samasugune elektromagnetilisel kiirgusel (fotonitel). See on ka arusaadav, kui pidada silmas, et ultrarelativistlikul juhul võib jätta kõigi osakeste seisumassi arvestamata - seisumass on tühiselt väike võrreldes relativistliku kineetilise massiga.

Nüüd näitame, kuidas Friedman'i teooriast järeldeb Hubble'i seadus ja Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandid. Tuletagem meelde, et Hubble'i seadus oli algselt postuleeritud vaatlustele tuginedes, st ei järelدون teooriast ja oli aluseks Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandite tuletamisel (vt pt 2).

- Hubble'i seadus.

Vastavalt Robertson-Walker'i meetrikale (4.1) (vt ka punkti 3.4), on kahe kosmoloogilise objekti (galaktika) vaheline kaugus R avaldatav kujul

$$R = a(t)\chi,$$

kus χ on teise galaktika radiaalne koordinaat, kui esimese galaktika (kus asub vaatleja) on valitud koordinaatide alguspunktiks. Ilmselt on teise galaktika suhteline kiirus v arvutatav järgmiselt:

$$v = \frac{d}{dt} R = \chi \frac{d a(t)}{dt} = \chi \cdot a(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} R.$$

Seega suhteline kiirus on võrdeline kosmoloogilise objekti radiaalse kaugusega vaatejast - Hubble'i seadus. Niisiis on Hubble'i konstant H määratud Robertson-Walker'i meetrikas esineva mastaabi teguriga $a(t)$:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (4.6)$$

- Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandid.

Siin näitame, et olekuvõrrandi $p=0$ korral, kui ka $\Lambda=0$, järelduvad Friedman'i võrranditest (4.3.a) ja (4.3.b) Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandid (2.8.a, 2.8.b). Lähtudes Hubble'i konstandi avaldisest (4.6), saame:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{(\dot{a})^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2.$$

Asendades nüüd selle võrduse paremal poolel suuruse $\ddot{a}$ Friedman'i võrrandi (4.3.a) põhjal avaldisega $-\frac{4\pi G \cdot a \rho}{3}$, saamegi ühe otsitavatest võrranditest, nimelt võrrandi (2.8.a):

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G \rho}{3}.$$

Teise võrrandi (2.8.b) saamiseks korrutame võrrandi (4.3.a) mõlemaid pooli teguriga $\dot{a}$ ja diferentseerime aja järgi võrrandit (4.3.b). Tulemus on järgmine:

$$\ddot{a} \dot{a} = -\frac{4\pi G \cdot a \dot{a} \rho}{3},$$

$$\ddot{a} \dot{a} - \frac{4\pi G}{3} (\dot{\rho} a^2 + 2 a \dot{a} \rho) = 0.$$

Lahutades nüüd ülemisest võrdusest alumise võrduse, leiame:

$$\frac{4\pi G a^2}{3} \left(\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a} \rho \right) = 0.$$

Arvestades Hubble'i konstandi avaldist (4.6), saamegi võrrandi (2.8.b):

$$\dot{\rho} = -3H \cdot \rho.$$

Kokkuvõte:

Friedman'i võrrandid tulenevad kosmoloogilisest printsiibist ja Einsteini võrranditest. Hubble'i seadus ja Universumi lokaalse evolutsiooni võrrandid on järeldused Friedman'i mudelitest.

4.2 Friedman'i võrrandite lahendid ja nende omadused

Nagu juba rõhutati punktis 4.1, on Friedman'i võrrandeid (4.3.a ja 4.3.b) võimalik lahendada, teades Universumis oleva aine-energia olekuvõrrandit, st seost energiatiheduse ja rõhu vahel. Tabelis 2 on toodud Friedman'i võrrandite lahendid juhul, kui $p=0$. Selline olekuvõrrand on füüsikaliselt korrektne peaaegu Universumi kogu ajalise evolutsiooni vältel – praegu võime lugeda Universumi osisteks galaktikad, ning kuivõrd nende omavahelised põrked toimuvad äärmiselt harva, võib öelda, et rõhk on null (gaasi rõhk on tingitud osakeste omavahelistest põrgetest).

Tabel 2. Friedman'i võrrandite (4.3.a, 4.2.b) lahendid juhul, kui $p=0$.

k	t	a	H	η
1	$\frac{a_m}{2c}(\eta - \sin \eta)$	$\frac{a_m}{2}(1 - \cos \eta)$	$\frac{c}{a_m} \cdot \frac{2 \sin \eta}{(1 - \cos \eta)^2}$	$0 \leq \eta \leq 2\pi$
0	t	$\left(\frac{9c^2}{4a_m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot t^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3t}$	$0 \leq t \leq \infty$
-1	$\frac{a_m}{2c}(\operatorname{sh} \eta - \eta)$	$\frac{a_m}{2}(\operatorname{ch} \eta - 1)$	$\frac{c}{a_m} \cdot \frac{2 \operatorname{sh} \eta}{(\operatorname{ch} \eta - 1)^2}$	$0 \leq \eta \leq \infty$

Integreerimiskonstanti a_m saab määrata ainult vaatluste kaudu (a_m - näitab seda, kui kõver on ruum). Tabelist 2 on näha, et vaid tasase aegruumi juhul on Friedman'i võrrandid lahendatavad nii, et ilmneks mastaabikordaja a ning Hubble'i konstandi H otsene sõltuvus ajast t , teistel juhtudel on see antud mitteilmutatud kujul ajalise parameetri η kaudu.

4.2.1 Positiivse kõverusega ruum

Analüüsime lahendit detailsemalt juhul, kui $k=1$. Tabelis 2 on näha, et lahend on parameetrilisel kujul antud valemitega:

$$t = \frac{a_m}{2c}(\eta - \sin \eta), \quad a(t) = \frac{a_m}{2}(1 - \cos \eta), \quad H(t) = \frac{c}{a_m} \cdot \frac{2 \sin \eta}{(1 - \cos \eta)^2}, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi. \quad (4.7)$$

Kõigepealt märgime, et aeg t kasvab monotoonselt parameetri η kasvades. Võtame vaatluse alla Universumit iseloomustavad suurused kolmel parameetri η väärtusel: $\eta=0, \pi, 2\pi$.

1) $\eta=0$.

Valemitest (4.7) ja (3.22) saame, et

$$t(0)=0, a(0)=0, H(0)=\infty,$$

$$V_{Univ} = 2\pi^2 \cdot a^3(0) = 0.$$

Seega, parameetri η väärtusele null vastab Universumi sünnimoment $t=0$. Universumi koguruumala on siis null ja paisumiskiirus (Hubble'i konstant) on lõpmatu.

2) $\eta = \pi$.

Sellele vastab ajamoment $t(\pi) = \frac{a_m \cdot \pi}{2c}$, mastaabifaktor $a(\pi) = a_m$, Hubble'i konstant

$H(\pi) = 0$ ja Universumi ruumala $V_{Univ} = 2\pi^2 \cdot a_m^3$. Näeme, et Universumi paisumiskiirus on vähenenud nullini (vt ka joonis 15). Edasistel ajamomentidel Universeum tõmbub kokku.

Seega, ajamomendile $t(\pi) = \frac{a_m \cdot \pi}{2c}$ vastav Universumi ruumala $2\pi^2 \cdot a_m^3$ on maksimaalne ruumala väärtus.

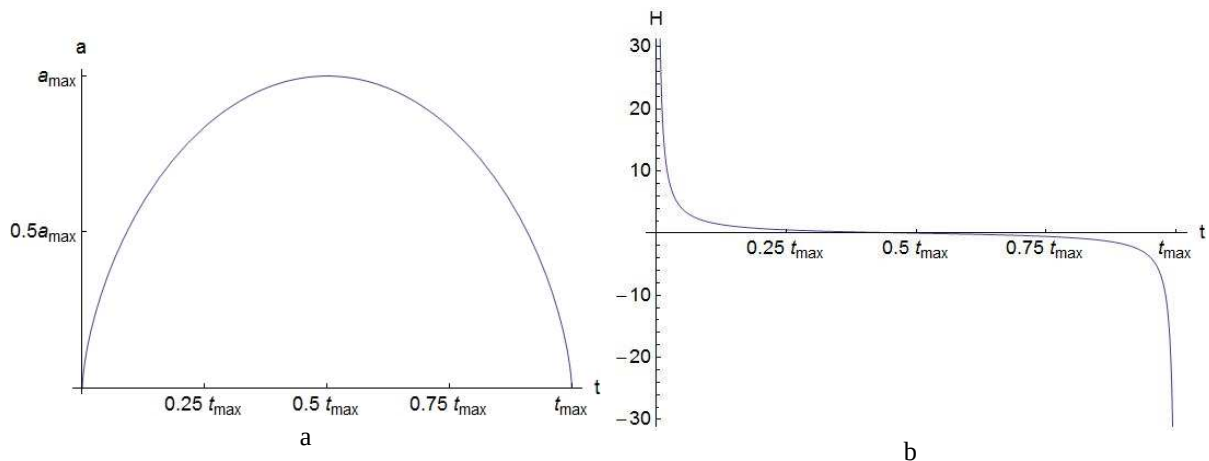
3) $\eta = 2\pi$.

Nüüd on Universumi vanuseks $t(2\pi) = \frac{a_m \cdot \pi}{c}$, mastaabi kordaja $a(2\pi) = 0$, Hubble'i konstant

$H(2\pi) = -\infty$ ja Universumi ruumala $V_{Univ} = 0$. Niisiis, ajamomendiks

$t(2\pi) = \frac{a_m \cdot \pi}{c}$ on Universeum kokku tõmbunud punktis (ruumala võrdne nulliga), kusjuures

kokkutõmbumise kiirus suureneb piiramatult lähenemisel singulaarse lõppseisundile.



Joonis 15. Positiivse kõverusega $k=1$ ruumi korral a) mastaabikordaja a muutumine aja t jooksul; b) Hubble'i konstandi H muutumine aja t jooksul, Hubble'i konstandi arvud on suvalistes ühikutes.

Kokkuvõtteks:

Hubble'i konstandi $H(t)$ ja Universumi mastaabifaktori $a(t)$ sõltuvus ajast on toodud ka joonisel 15. Universumi koguruumala on igal arengu etapil lõplik. Samuti on lõplik ka tema eluiga. Universeum tekkis algsingulaarsusest ja kaob lõppsingulaarsusesse. Nende singulaarsuste füüsikaline tähendus ei ole tänapäeval selge. On terve rida konkureerivaid hüpoteese singulaarsuse olemuse kohta, kuid nende tõepära on tänapäeva vahenditega peaaegu võimatu kontrollida.

4.2.2 Negatiivse kõverusega ruum ning tasane ruum

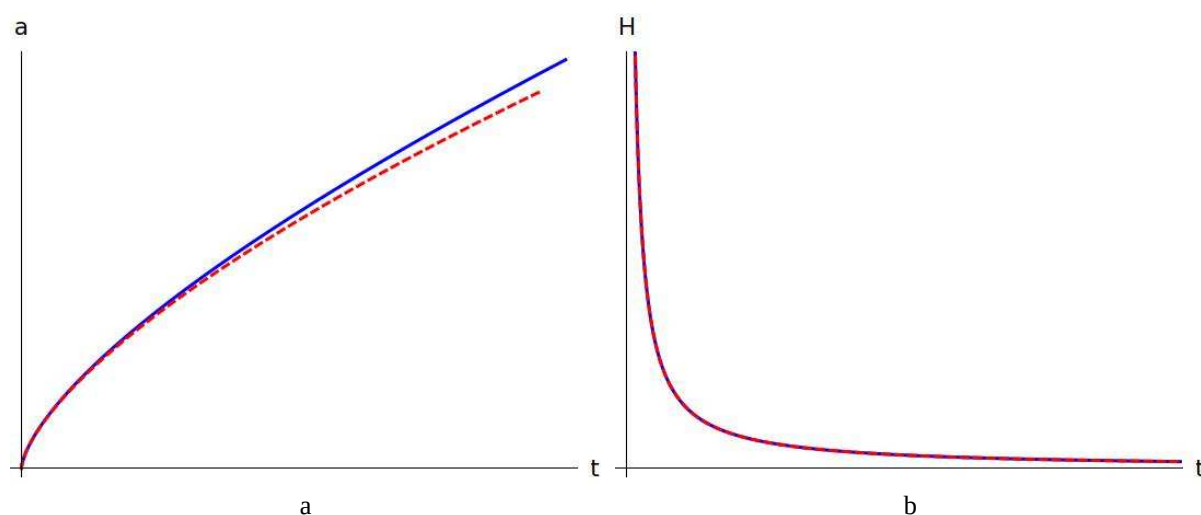
Negatiivse kõverusega ruumi korral, $k = -1$, annab tabel 2 järgmise parameetrilise esituse Friedman'i võrrandite lahendile:

$$t = \frac{a_m}{2c}(sh\eta - \eta), \quad a(t) = \frac{a_m}{2}(ch\eta - 1), \quad H(t) = \frac{c}{a_m} \cdot \frac{2sh\eta}{(ch\eta - 1)^2}, \quad 0 \leq \eta \leq \infty. \quad (4.8)$$

Arvestades hüperboolsete funktsioonide $(ch\eta = \frac{1}{2}(e^\eta + e^{-\eta}), sh\eta = \frac{1}{2}(e^\eta - e^{-\eta}))$ omadusi, saab näidata, et parameetri η kasvades, aeg t ja mastaabi kordaja $a(t)$ kasvavad monotoonselt, Hubble'i konstant $H(t)$ aga kahaneb monotoonselt (vt ka joonis 16). Seetõttu vaatleme siin ainult piirväärsi parameetri η lähenemisel nullile ja lõpmatusele.

1) $\eta \rightarrow 0$.

Sellisel juhul $t \rightarrow 0, a(t) \rightarrow 0$ ja $H(t) \rightarrow \infty$ (vt joonis 16). Niisiis algmomendil $t=0$ oli Universumi paisumiskiirus lõpmata suur. Kuigi negatiivse kõverusega ruumi korral on Universumi koguruumala lõpmata suur, on ka sellisel juhul $t \rightarrow 0$ korral tegemist algsingulaarsusega. Nimetatud väites on võimalik veenduda, kui peame silmas, et kuitahes suurte mõõtmetega ruumi piirkond Universumis ajamomendil $t > 0$ omab piisavalt väikesel ajamomendil $t \rightarrow 0$ kaduvväikest ruumala, kuna ruumilist mastaapi määrav funktsioon $a(t)$ läheneb nullile (vt ka valem (3.27)).



Joonis 16. Mastaabikordaja a ja Hubble'i konstandi H muutumine aja jooksul negatiivse kõverusega $k=-1$ (graafikutel sinised pidevad jooned) ning tasase $k=0$ (graafikutel punased katkendlikud jooned) ruumi korral. a) mastaabikordaja a muutumine aja t jooksul; b) Hubble'i konstandi H muutumine aja t jooksul. Ühikuid pole telgedele juurde antud, need sõltuvad integreerimiskonstandi a_m valikust.

2) $\eta \rightarrow \infty$.

Sellele piirprotsessile vastab $t \rightarrow \infty, a(t) \rightarrow \infty$ ja $H(t) \rightarrow 0$.

Kokkuvõtteks võib öelda, et negatiivse kõverusega ruumi korral sündis Universum lõplik ajavahemik tagasi lõpmatu suure ruumalaga algsingulaarsusest ja paisub aeglustuvalt igavesti.

Friedman'i tasane mudel, $k=0$, käitub üldjoontes sarnaselt negatiivse kõverusega mudeliga. Mastaabikordaja $a(t)$ ning Hubble'i konstandi $H(t)$ sõltuvus ajast on kirjeldatud joonisel 16. Nagu jooniselt 16a on näha, kasvab mastaabikordajaja a tasase ruumi korral aeglasemalt kui negatiivse kõverusega ruumi korral. Hubble'i konstandi kahanemise erinevust on valitud ajaskaala korral jooniselt praktiliselt võimatu näidata.

4.2.3 Ultrarelativistlik olekuvõrrand

Füüsikalistest kaalutlustest järeldub, et tabelis 2 toodud lahendid ei ole rakendatavad Universumi singulaarsete olekute läheduses. Kuna nii Universumi arengu väga varajastel momentidel (kõigi mudelite korral) kui ka Universumi oleku lähenemisel lõppsingulaarsusele (positiivse kõverusega mudeli korral), peab aine-energia tihedus olema väga suur, siis olekuvõrrandi $p=0$ kasutamine ei ole enam füüsikaliselt põhjendatud. Teoreetiliste kaalutluste ja vaatlustega kooskõlalise tulemusena annab hüpotees, et väga suure aine-energia tiheduse korral on aine temperatuur niivõrd kõrge, et osakeste keskmised kiirused on väga lähedased valguse kiirusele. Sellisel juhul võib osakeste seisumassi jätta arvestamata ja kõik osakesed käituvad sarnaselt footonitega.

Vastav olekuvõrrand (ultrarelativistlik olekuvõrrand) on hästi teada:

$$p = \frac{\rho \cdot c^2}{3},$$

kus $\rho \cdot c^2$ on energiatihedus.

Vaatleme kõigepealt tasast Friedman'i mudelit, $k=0$. Friedman'i võrrandid (4.3.a, 4.3.b) avalduvad nüüd kujul:

$$\ddot{a} = -\frac{8\pi G a}{3}\rho, \quad (4.9.a)$$

$$(\dot{a})^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2. \quad (4.9.b)$$

Lihtne on asendamise teel kontrollida, et võrrandisüsteemi (4.9) lahendiks on

$$a = \sqrt{2c a_m} \cdot \sqrt{t},$$

$$\rho = \frac{3}{32\pi \cdot G \cdot t^2}. \quad (4.10)$$

Hubble'i konstandi võime nüüd leida valemist (4.6):

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}. \quad (4.11)$$

Näeme, et ka antud juhul Universumi algmomendi läheduses ($t \rightarrow 0$) mastaabitegur $a \rightarrow 0$ ja Hubble'i konstant $H \rightarrow \infty$. Kuna kõigi mudelite korral on ultrarelativistlik olekuvõrrand rakendatav ainult Universumi sünnimomendi läheduses, st aja t väikestel väärtustel, siis osutub, et lahendid (4.10) ja (4.11) on ligikaudu õiged ka positiivse kõverusega ($k=1$) ja negatiivse kõverusega ($k=-1$) mudelite korral. Niisiis kõik mudelid käituvad Universumi varajases nooruses ühtemoodi - sarnaselt tasase mudeliga. See tähtis tulemus lihtsustab tunduvalt Universumi sünnimomendi läheduses toimuvate füüsikaliste protsesside teoreetilist analüüsi. Erinevate mudelite ühtemoodi käitumist väikestel t väärtustel aitab paremini mõista kriitilisele tihedusele $\rho_c(t)$ tuginev arutluskäik (vt punktid 2.2 ja 2.3). Valemitele (2.14) ja (4.6) tuginedes võime Friedman'i võrrandist (4.3.b) leida ainetiheduse $\rho(t)$ ja kriitilise tiheduse $\rho_c(t)$ suhte:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} = 1 + \frac{kc^2}{a^2(t)H^2(t)}, \quad k = -1, 0, 1. \quad (4.12)$$

Tuletagem meelde, et Universumi lokaalse evolutsiooni võrranditest järeldus Universumi lõplik eluiga, juhul kui ainetihedus $\rho(t)$ on suurem kui kriitiline tihedus $\rho_c(t)$ ehk $\Omega(t) > 1$. Kui $\rho(t) \leq \rho_c(t)$ ehk $\Omega(t) \leq 1$, siis Universum paisub igavesti. Kuna väikestel ajamomentidel, $t \rightarrow 0$, kõigi mudelite korral Hubble'i konstant läheneb lõpmatusele, siis valemist (4.12) saame:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Omega(t) = 1.$$

Niisiis, kõigi mudelite korral on piisavalt varajases staadiumis ainetihedus praktiliselt võrdne kriitilise tihedusega - kõik mudelid käituvad sarnaselt.

4.3 Friedmani võrrandi lahend tasase aegruumi jaoks nullist erineva kosmoloogilise konstandi korral

Käsitleme taas Friedmani võrrandeid (4.3a) ja (4.3b) koos kosmoloogilise konstandi liikmega:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{1}{3} \Lambda c^2 a,$$

$$\frac{1}{2}(\dot{a})^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = -\frac{kc^2}{2} + \frac{1}{6} \Lambda c^2 a^2, \quad k = 1, 0, -1.$$

Universumi kui terviku käitumise uurimisel ja analüüsil peatume neist põhjalikumalt esimesel võrrandil. Mainime, et kosmoloogilise konstandi lisaliige on ilmunud just Universumi kui terviku käsitluse jaoks. Ilma selle liikmeta on Friedmanni võrranditest võimalik tuletada Universumi lokaalset evolutsiooni kirjeldavad võrrandid (2.8a) ja (2.8b), mis on tuletatud Newtoni gravitatsiooniteooriast lähtuvalt.

Nagu ülalpool öeldud, on Friedmani võrrandite lahendamiseks vaja veel olekuvõrrandit, mis annab seose rõhu ja tiheduse vahel. Analoogiliselt tavalise aine ja energiaga, võib ka kosmoloogilise konstandi avaldada tumeenergia rõhu ja tiheduse kaudu. Teooriast võib näidata, et tumeenergia rõhu p_Λ ja rõhu ρ_Λ vahel peab kehtima seos

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2, \quad (4.13)$$

st, tumeenergia rõhk on negatiivne. Tumeenergia tihedus avaldub järgmiselt:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (4.14)$$

Seega ei sõltu tumeenergia tihedus (ega ka rõhk) ajast. Kui tavalise, barüonilise aine ja energia ning tumeaine tihedus aja jooksul väheneb, siis tumeenergia tihedus jääb konstantseks. See asjaolu avaldab suurt mõju Universumi kui terviku arengule. Paneme tumeenergia tiheduse (4.14) Friedmanni esimesse võrrandisse (4.3a), siis saame:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G a}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{8}{3} \rho_\Lambda \pi G a. \quad (4.15)$$

Võrrandis (4.15) oleme arvestanud, et p tähistab tavalise (nn barüonilise) aine ja energia ning tumeaine summaarset aine-energia rõhku ning ρ summaarset tihedust. Kuivõrd nii barüoniline aine, energia (näiteks elektromagnetvälja energia – footonid) ja tumeaine alluvad gravitatsioonile, siis võime seda antud kontekstis teha. Analüüsime nüüd võrrandit (4.15) juhul, kui aine-energia rõhk on null (tänapäeval), st $p=0$. Siis tuleneb võrrandist (4.15)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho - 2\rho_\Lambda). \quad (4.16)$$

Varasemast (vt 4.2.2) teame, et Universumi paisumisel aine-energia (ja seetõttu ka tumeaine) tihedus vähenevad pöördvõrdeliselt ruuduga. Samas, (4.14) põhjal on tumeenergia tihedus ajas konstantne. Kui Universumi alguses oli tihedus ρ väga suur, kehtis võrratus $\rho > 2\rho_\Lambda$, siis oli Universumi paisumine aeglustuv, sest $\ddot{a} < 0$. Tiheduse vähenemisel saabub hetk, mil $\rho = 2\rho_\Lambda$ ning pärast seda $\rho < 2\rho_\Lambda$, st $\ddot{a} > 0$. Seega, kiirendus muutub positiivseks ehk – Universum hakkab paisuma kiirenevalt. Vaatlusandmed näitavad, et Universumi aeglustuv paisumine muutus kiirenevaks umbes 6-8 miljardit aastat tagasi.

Analüüsime nüüd tumeenergia poolt tekitatud kiirenevat paisumist ja gravitatsioonile alluva aine-energia ja tumeaine poolt tekitatud aeglustuvat paistumist lähemalt.

Mingis sfääris oleva aine (ja tumeaine, energia) tihedus on pöördvõrdeline selle sfääri ruumalaga: $\rho \sim 1/V$. Sõltumata valitud meetrikast ja sellest, kas ruum on tasane, positiivse või negatiivse kõverusega, on konstantse radiaalkoordinaadiga χ sfääri ruumala võrdeline

mastaabkordaja kuubiga: $V \sim a^3$ (vt (3.22), (3.27), (3.30)). Seetõttu $\rho \sim 1/a^3$ ning valemi (4.16) järgi võib öelda, et tumeenergia puudumisel on aine-energia tekitatud kiirendus

$$\ddot{a} \sim -\frac{1}{a^2}$$

ehk (negatiivne) kiirendus on pöördvõrdeline kauguse ruuduga.

Teisalt on tumeenergia poolt tekitatud kiirenev paisumine

$$\ddot{a}_\Lambda \sim a \quad \text{ehk} \quad \ddot{R} \sim R \quad .$$

St, kiirendus on võrdeline kaugusega. Seetõttu ilmneb Universumi kiirenev paisumine väga kaugete objektide vaatlemisel. Galaktikate ja galaktikaparvede omavahelise liikumise uurimisel näeme, et need alluvad gravitatsioonilisele tõmbejõule. Kuid galaktikate superparvede vaatlemisel on näha, et need eemalduvad üksteisest kiirenevalt.

Selline tumeenergiast tekitatud efekt ilmneb Universumit kui tervikut käsitlevate võrrandite analüüsil ning ei tulene Newtoni füüsikast saadud Universumi lokaalse piirkonna arengu võrranditest. Märgime, et praegu teadaolevalt peaks kosmoloogiline konstant olema nullist erinev. Universumi tuleviku stsenaariumid erinevate ruumikõveruste ning kosmoloogilise konstandi väärtuste korral on kujutatud graafiliselt joonisel 17.

4.4 Universumi horisont

Universumil on kõigi Friedmani mudelite korral horisont. Horisondist kaugemal toimuvad sündmused ei avalda meile mingit mõju ega ei ole avaldanud seda ka minevikus. Horisondi olemasolu järeldub kahest tõsiasjast:

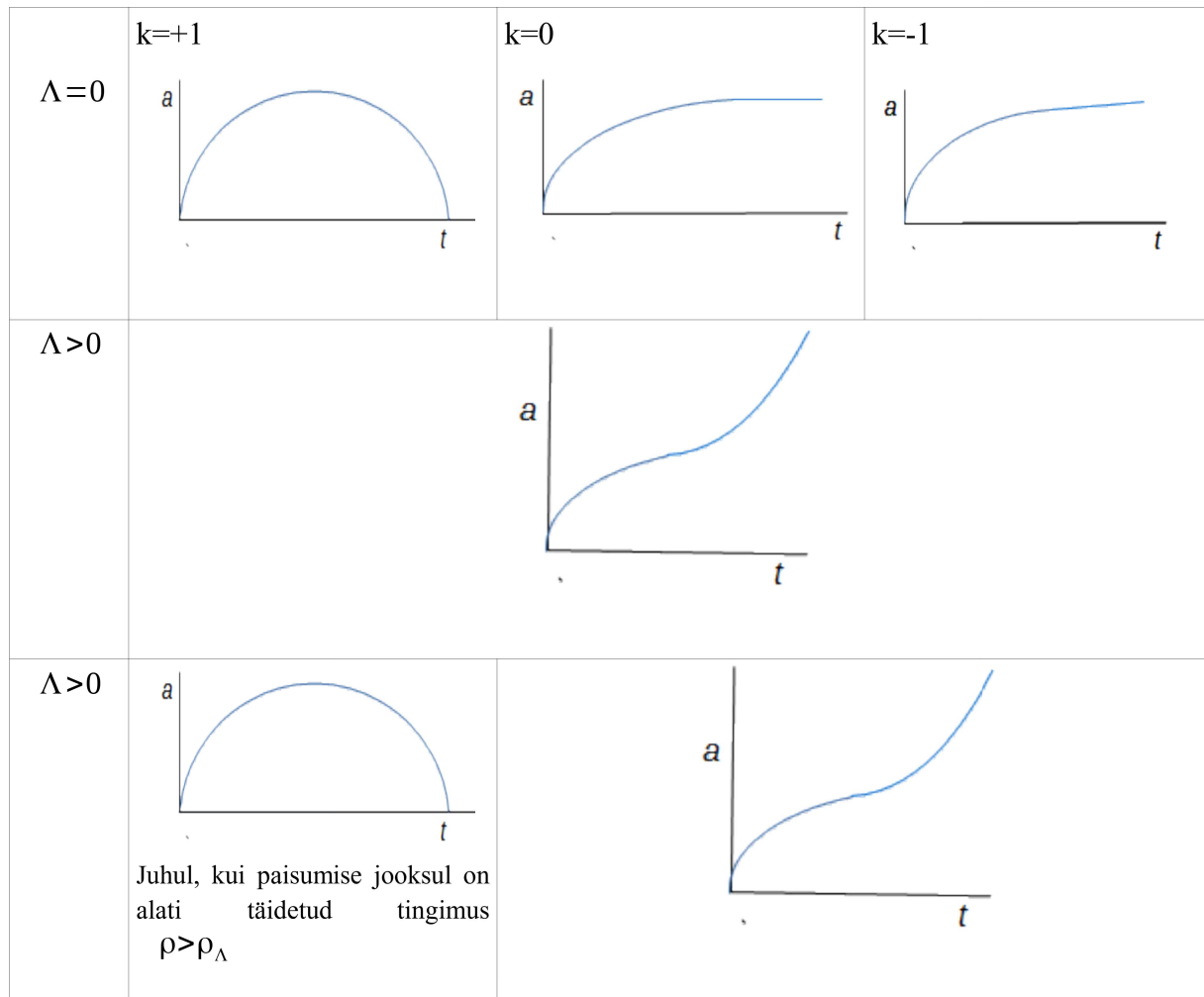
- kõigi Friedmani mudelite korral on Universumil algus (sünnimoment minevikus);
- ükski osake ega signaal ei saa liikuda valgusest kiiremini.

Vaatleja jaoks on olemas maksimaalne kaugus, millest kaugemalt ei ole võimalik informatsiooni hankida. See kaugus on võrdne teepikkusega, mille footon jõuab läbida Universumi ea jooksul. Universumi vananedes kasvab horisondi kaugus $R_H(t)$ võrdeliselt Universumi vanusega t : $R_H(t) = ct$.

Horisondi kaugus sõltub sellest, millisel viisil viiakse läbi vastav mõõtmine. Näiteks mittefüüsikalise "mõõtmise" korral, kus mõõtmine viiakse läbi hetkeliselt ajamomendil t horisonti ja vaatlejat ühendava radiaalse sirge kõigis punktides, saame, tuginedes Robertson-Walker'i meetrikale ja tabelile 2, tasases Friedmani mudelis horisondi kauguseks

$$R_H^*(t) = 3ct \quad .$$

Kauguste R_H^* ja R_H kolmekordne erinevus on tingitud asjaolust, et valgussignaali leviku kestel Universum paisub ja objektid, kust signaalid kiirati, asuvad omaaja hetkel t vaatlejast palju kaugemal kui kiirgamise momendil.



Joonis 17. Universumi mastaabikordaja muutus aja jooksul erinevate võimalike geomeetria korral (positiivse kõverusega, tasane või negatiivse kõverusega Universum) ning kosmoloogilise konstandi väärtuste korral. Praegu teadaolevate andmete kohaselt peaks kosmoloogiline konstant olema nullist erinev ning realiseeruma Universumi kiirenev paisumine.

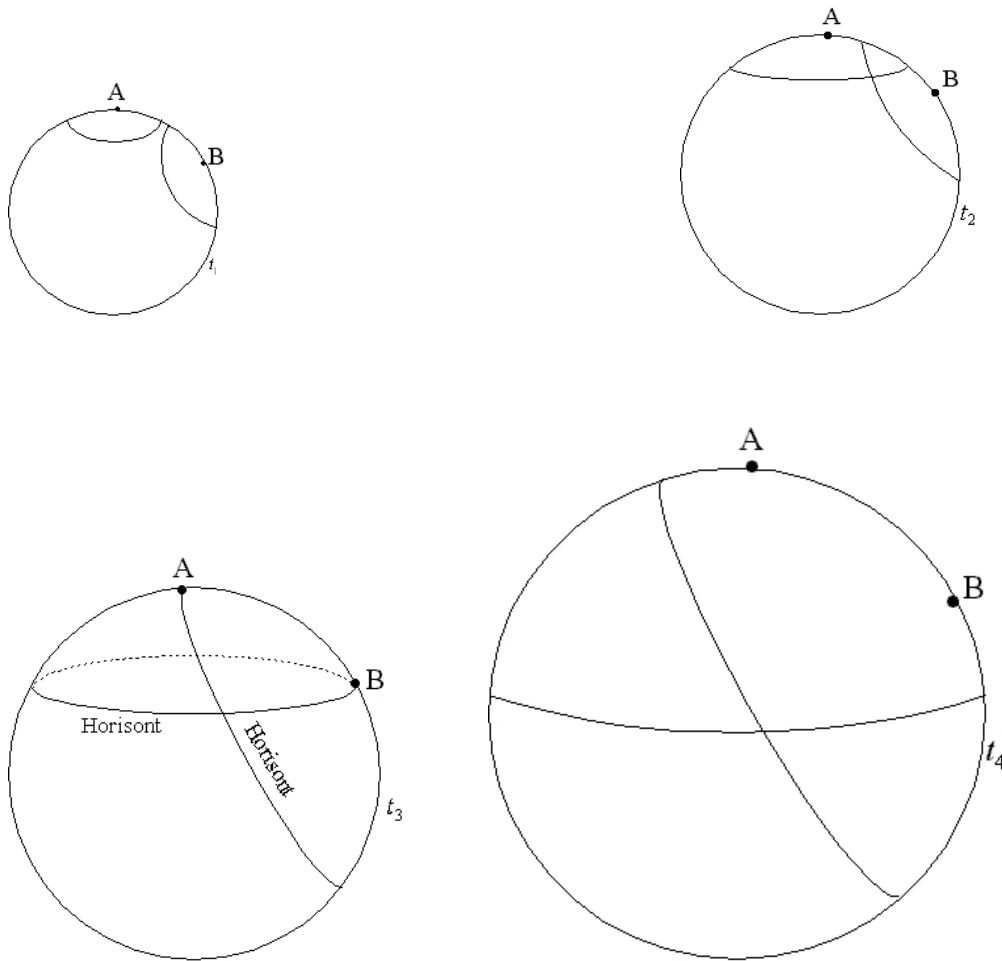
Lähemal vaatlusel järeldub, et horisoni poolt hõlmatav Universumi ruumiline piirkond kasvab ajas kiiremini kui Universum paisub - aja jooksul horisoni sisse jäävate galaktikate arv kasvab (vt joonis 18).

Veendumaks öeldus, leiame horisoni sisse jääva massi M sõltuvuse Universumi vanusest t , tuginedes tabelis 1 toodud andmetele. Asugu vaatleja ruumiliste koordinaatide alguspunktis. Astronoomiliste objektide arvu ja nende massi ajamomendil t määrab ta valguskiirusega levivate signaalide vahendusel (elektromagnetlained, neutriinod). Positiivse kõverusega ruumi korral avaldub horisoni sisse jääv registreeritav mass järgmiselt (vt valem (3.21)):

$$M(t) = 4\pi \int_0^{\chi_H(t)} \rho(t^*(\chi)) a^3(t^*(\chi)) \sin^2 \chi \cdot d\chi. \quad (4.17)$$

kus $\chi_H(t)$ - on horisondi radiaalne koordinaat ajamomendil t ja $\rho(t^*)$ - ainetihedus ajamomendil $t^* \leq t$. Sümbol $t^*(\chi)$ rõhutab asjaolu, et ajamoment t^* sõltub astronoomilise objekti radiaalkoordinaadist χ - mida suurem on χ , seda kaugemal on objekt vaatlejast ja seda varem pidi signaal olema väljakiiratud, et jõuda ajamomendiks t vaatlejani. Arvestades valemit $\rho(t) = \frac{C}{a^3(t)}$, saame:

$$M(t) = 4\pi C \int_0^{\chi_H(t)} \sin^2 \chi \cdot d\chi = 2\pi C (\chi_H(t) - \sin \chi_H(t) \cdot \cos \chi_H(t)). \quad (4.18)$$



Joonis 18. Horisont paisuvas Universumis. Siin on Universumit kujutatud nelja sfäärina, neljal erineval ajahetkel $t_4 > t_3 > t_2 > t_1$. Vaatlejate jaoks punktides A ja B asuvad horisondid kaugustel, millistest kaugemalt tulevad valgussignaalid ei suuda jõuda vaatlejateni. Aja kasvades horisondi poolt hõlmatava ruumiosa mõõtmed kasvavad kiiremini kui Universum paisub. Kuni ajamomendini t_3 puudub vaatlejate A ja B vahel põhjuslik side.

Horisondi radiaalkoordinaadi $\chi_H(t)$ leidmiseks on otstarbekas kasutada aja parameetrilist esitust parameetri η kaudu (vt tabel 2). Diferentseerimise teel veendume, et kõigi mudelite korral ($k=+1,0,-1$) kehtib seos:

$$dt = \frac{a(t)}{c} d\eta. \quad (4.19)$$

Arvestades, et valguskiirusega leviva signaali korral on 4-intervall $ds=0$, saame valemitest (3.12) ja (3.13) koordinaatide alguspunkti tuleva signaali jaoks:

$$c dt = -a(t) \cdot d\chi. \quad (4.20)$$

Võrdustest (4.18) ja (4.19) järeldub seos:

$$d\chi = -d\eta. \quad (4.21)$$

Valemi (4.21) põhjal on lihtne veenduda, et

$$\chi_H(t) = \eta. \quad (4.22)$$

Rõhutagem, et (4.20) ja (4.22) on õiged kõigi Friedman'i mudelite korral. Asendades horisondi radiaalkoordinaadi $\chi_H(t)$ avaldise võrdusesse (4.18), saame:

$$M(t) = \frac{M_K}{\pi} (\eta - \sin \eta \cos \eta), \quad 0 < \eta < 2\pi, \quad (4.23)$$

kus M_K on kinnise Universumi kogu mass. Kuna aeg t kasvab monotoonselt η kasvades (vt tabel 2), siis piisab, kui vaatlеме massi M käitumist η järgi. Parameetri η kasvamisel 0-st kuni π -ni, kasvab horisondi sisse jääv mass 0-st kuni M_K -ni. See tähendab, et horisondi paisumine on kiirem kui Universumi paisumine. Ajamomendil, mil kinnine Universum hakkab uuesti kokku tõmbuma, hõlmab horisont kogu Universumi. Parameetri η edasisel kasvamisel, on suuruse $M(t)$ edasine kasv fiktiivne, kuna kokkutõmbuvas kinnises Universumis registreeritakse kauged objektid kahekordselt (kahest diametraalselt vastupidisest suunast). Valemist (4.23) on näha, et kõik objektid Universumis on jälgitavad kahekordselt Universumi "surma" momendil ($\eta=2\pi$). Seega kinnises Universumis me iseennast seljatagant ei näe.

Universumi horisondis oleva massi $M(t)$ sõltuvus ajast on toodud Joonisel 19.

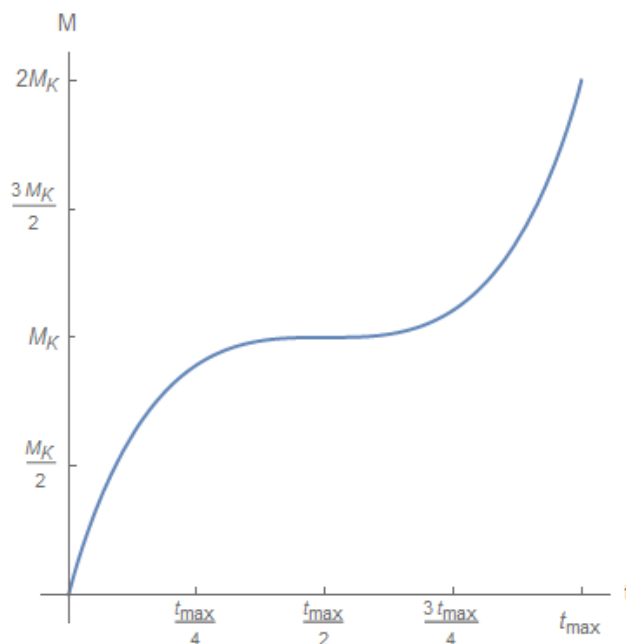
Negatiivse kõverusega Universumi puhul on horisondi sisse jääv mass määratud avaldisega:

$$M(t) = 2\pi C \cdot (sh \eta \cdot ch \eta - \eta), \quad 0 < \eta < \infty. \quad (4.24)$$

Mass $M(t)$ kasvab tõkestamatult "ajalise parameetri" η kasvamisel. Seega ka $k=-1$ korral paisub horisont kiiremini kui Universum. Erinevalt positiivse kõverusega juhust on siin kõik objektid jälgitavad ainult ühekordselt. Tasase mudeli korral ($k=0$) kehtib

$$M(t) = \tau \cdot t, t > 0, \quad (4.25)$$

kus τ on konstant. Kõik negatiivse kõverusega Universumi korral tehtud järeldused jäävad kehtima ka juhul kui, $k=0$. Kõigil mudelitel on veel üks oluline ühine joon. Universumi sünnimomendi läheduses, kui t on väga väike, on horisondi poolt hõlmatav mass samuti väike (vt valemeid (4.23), (4.24), (4.25)). Niisiis võib järeldada, et mida varasemat aega vaatleme, seda vähem oluliseks osutub Universumi kui terviku kõverus.



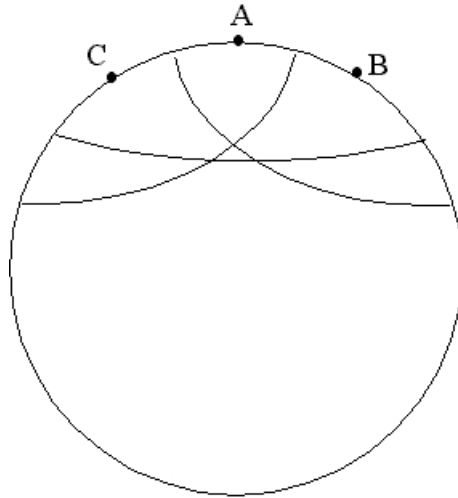
Joonis 19. Universumi horisondi poolt hõlmatud massi muutumine aja t jooksul positiivse kõverusega $k=+1$ aegruumi korral. M_K tähistab Universumi kogumassi. t_{max} on Universumi eluiga.

Selle asjaolu tõttu saame anda võrdlemisi selge pildi Universumi varajasest noorusest ehkki kosmoloogilised vaatlused ei suuda veel määrata Universumi praegust ulatust ega ennustada tulevikku. Universumi horisondi olemasoluga on seotud üks tänapäeva kosmoloogia põhiprobleemidest - miks on Universum homogeenne ja isotroopne? Probleemi olemust selgitab joonis 20.

Kuidas sai kujuneda homogeenne ja isotroopne Universum, mida kinnitavad vaatlused, kui vaadeldavas Universumi osas on palju piirkondi, mis ei ole kunagi olnud omavahel põhjuslikult seotud?

Probleemi üheks lahenduse variandiks on nn inflatsioonilised mudelid, kus eeldatakse, et väga varajases Universumis toimus Universumi paisumine palju kiiremini, kui horisondi paisumine. Sellisel juhul võivad hilisemas Friedman'i mudeli staadiumis olla kõik praegu vaadeldavad objektid pärit ühest Universumi inflatsioonilises staadiumis horisondi sisse

jäävast piirkonnast. Kuigi inflatsioonilised mudelid on tänapäeval väga populaarsed, puudub siiski ühtne seisukoht inflatsioonilise paisumise staadiumi tekkepõhjuste osas.



Joonis 20. Homogeensuse paradoks. Punktis A (kosmoloogilises mõttes) oleva vaatleja jaoks on punktid C ja B horisondi sees. Vaatleja näeb, et C ja B füüsilised omadused on ühesugused. Kuidas on see võimalik? Punkt C on ju väljapool B horisonti ning järelikult ei ole nad kunagi signaale (informatsiooni) vahetanud.

Lõpetuseks võib öelda, et tänu horisondile on vaatleja seisukohalt erinevus kinnise ja lahtise Universumi vahel palju väiksem, kui esmapilgul näib. Mõlemal juhul on ruumi piirkond, mille kohta on võimalik informatsiooni saada, lõplik. Selle piirkonna geomeetiline struktuur vastab kinnise ruumi (positiivse kõverusega) ruumi geomeetria - ruumala on lõplik, äärepinna pindala võrdub nulliga.

5 Absoluutselt musta keha kiirgus, aine ja energia tiheduse evolutsioon, kosmoloogiline ajaskaala

5.1 Kosmoloogiline punanihe

Kaugete galaktikate poolt kiiratud valgus paistab meil punasemana. See on tingitud Universumi paisumisest. Antud punktis vaatleme, kuidas muutub Universumis ringirändava üksiku footoni sagedus ja energia Universumi vananedes.

Kõigepealt tuletame meelde, kuidas muutub footoni sagedus ω tänu Doppler'i efektile. Liikugu kiirgusallikas vaatlejast eemale kiirusega v . Lihtsuse mõttes eeldame, et eemaldumise kiirus on palju väiksem valguse kiirusest: $v \ll c$.

Doppler'i efekti tõttu registreerib vaatleja footoni, mille sagedus on väiksem kui väljakiiratul:

$$\omega_1 - \omega = -\omega \cdot \frac{v}{c}, \quad (5.1)$$

kus ω_1 - on registreeritud footoni sagedus.

Vaatleme nüüd kahte kosmoloogilises mõttes väga lähedast galaktikat. Olgu nende vaheline kaugus dl . Galaktikate eemaldumise kiirus on määratud Hubble'i seadusega:

$$v = H(t) dl = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dl. \quad (5.2)$$

Juhul kui ühes galaktikas kiiratakse ajamomendil t footon sagedusega ω , siis registreeritakse see footon ajamomendil $t+dt$ teises galaktikas. Doppler'i efekti (5.1) tõttu on registreeritava footoni sagedus $\omega + d\omega$ määratud järgmiselt:

$$\omega + d\omega = \omega - \omega \frac{v}{c}. \quad (5.3)$$

Arvestades Hubble'i seadust (5.2) ja asjaolu, et footon levib valguse kiirusega ($dl = c dt$) saame võrdusest (5.3) diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt.$$

Viimase võrrandi üldlahendiks on $\omega(t)a(t) = \text{const}$. Seega, kui ajamomendil t_0 kiiratakse footon sagedusega $\omega(t_0)$, siis aja momendil t registreeritud footoni sagedus on:

$$\omega(t) = \frac{\omega(t_0)a(t_0)}{a(t)}. \quad (5.4)$$

Märgime, et footoni lainepikkus λ on pöördvõrdeline sagedusega ja järelikult

$$\lambda(t) = \frac{\lambda(t_0)a(t)}{a(t_0)}. \quad (5.5)$$

Kuna paisuva Universumi vananedes mastaabi tegur $a(t)$ kasvab, siis Universumis rändava footoni sagedus $\omega(t)$ pidevalt väheneb. Samuti väheneb aja jooksul ka footoni energia

$$\varepsilon = \hbar \omega = \frac{\omega(t_0)a(t_0)\hbar}{a(t)}, \quad (5.6)$$

kus $\hbar$ - on Plancki konstant.

Valemid (5.4) ja (5.6) on universaalsed, nad on õiged kõigi Friedman'i mudelite korral. Veelgi enam, kuna valemi (5.5) tuletamise aluseks olnud seaduspärasused Universumi paisumine ja Doppler'i efekt kehtivad kõigi laineprotsesside korral, siis on see valem kasutatav mistahes laineprotsessi füüsikalisel analüüsil paisuvas Universumis. Nii näiteks, Universumi paisumisel kasvab ka massiga osakeste De Broglie lainepikkus vastavalt valemile (5.5).

Seega, kuna De Broglie lainepikkus on pöördvõrdeline osakese impulsiga $\lambda \sim \frac{1}{p}$, kahaneb kõigi elementaarosakeste impulss Universumi paisumisel.

Lõpuks mainime, et kinnise Universumi korral võib kauges tulevikus, mil Universum on kokkutõmbumise faasis, jälgida nii puna- kui ka sininihet. Naabergalaktikad kiirgaksid ajal, mil Universum on suurem kui vaatlushetkel, seega on valgus nihutatud lühemate lainete, st sinise spektriosa poole. Teiste, väga kaugete galaktikate korral, võib valgus olla kiiratud siis, mil Universum oli väiksem kui vaatlushetkel ja vastuvõetav valgus on nihutatud pikemate lainete, st punase spektriosa poole.

5.2 Aine ja energia tiheduse evolutsioon

Universumi paisumisel energia tihedus Universumis kahaneb. Märgime, et tänu Einsteini seosele on energiatihedus $\rho \cdot c^2$ ja ainetihedus ρ rangelt võrdelised suurused. Seega piisab ainult ühe, nt ρ , vaatlemisest. Ainetiheduse ρ sõltuvus mastaabi tegurist $a(t)$ on Universumi arengu erinevatel etappidel erinev. See erinevus on tingitud olekuvõrrandi muutusest. Illustreerimaks öeldut, leiame ρ sõltuvuse mastaabi tegurist $a(t)$ kahel juhul: olekuvõrrandi $p=0$ korral ja olekuvõrrandi

$$p = \frac{\rho c^2}{3} \text{ korral.}$$

1) $p=0$.

Võrranditest (2.8b) ja $\dot{\rho} = -3H \cdot \rho$ (4.6) $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ saame

$$\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} = -3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$\rho(t) = \frac{C}{a^3(t)}, \quad (5.7)$$

kus C on ajast sõltumatu konstant.

Valemil (5.7) on lihtne füüsikaline tähendus. Ainetihedus on pöördvõrdeline ruumiosa, kus vaadeldav aine hulk paikneb, ruumalaga (vt alapunkt 3.4).

2) Ultrarelativistlik olekuvõrrand $p = \frac{\rho c^2}{3}$

Tuletagem meelde, et selline olekuvõrrand on omane ainele Universumi varajases arengu staadiumis, nn kiirgusdominantsel ajastul.

Lähtume Friedman'i võrranditest (4.3.a) ja (4.3.b). Diferentseerime võrrandi (4.3.b) mõlemad pooli aja t järgi ja seejärel jagame tulemuse läbi suurusega $\dot{a}(t)$. Tulemuseks saame:

$$\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho a + \frac{4\pi G}{3} \cdot \dot{\rho} \frac{a^2}{\dot{a}}. \quad (5.8)$$

Asendades nüüd võrrandis (4.3.a) rõhu p tema avaldisega $\frac{\rho c^2}{3}$ ja lahutades tulemusena saadud võrrandi võrrandist (5.8) leiame järgmise diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} = -4 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Viimase üldlahendiks on:

$$\rho(t) = \frac{C}{a^4(t)}, \quad (5.9)$$

kus C on integreerimiskonstant.

Valemid (5.9) ja (5.5) annavad füüsikalise selgituse ainetiheduse $\rho(t)$ käitumisele kiirgusdominantsel ajastul (so olekuvõrrandi $p = \frac{\rho c^2}{3}$ korral). Ainetiheduse $\rho(t)$ avaldises (5.9) on kordaja $a^{-3}(t)$ tingitud Universumi ruumala suurenemisest ja kordaja $a^{-1}(t)$ footonite energia vähenemisest. Tuletame meelde, et kiirgusdominantsel ajastul on Universumis koguennergia määratud footonitega sarnaselt käituvate osakeste energiaga.

5.3 Absoluutselt musta keha kiirgus

Varajasel Universumil oli mitmeid ühiseid jooni absoluutselt musta kehaga. Seetõttu saab Universumi varajasest staadiumist meile jõudnud kiirguses sisalduvat informatsiooni dešifreerida lähtudes hästi tuntud absoluutselt musta keha kiirguse omadustest.

Absoluutselt musta keha põhitunnused on järgmised:

- kogu pealelangev kiirgus neeldub;
- keha koos kiirgusega peab olema (või peaaegu olema) termodünaamilises tasakaalus.

Varajases Universumis oli esimene neist tingimustest täidetud, kuna temperatuur oli väga kõrge. Kõrgel temperatuuril puuduvad neutraalsed aatomid ja aine eksisteeris elektriliselt laetud osakeste plasma vormis. Teatavasti aga elektromagnetlained (fotonid) neelduvad sellises plasmas väga kiiresti. Teise tingimuse täidetust garanteerib asjaolu, et Universumi paisumise kiirus sellel evolutsiooni etapil on oluliselt väiksem kui osakeste keskmine kiirus kahe omavahelise pörke vahel - paisumist võib käsitleda adiabaatilise protsessina.

Absoluutselt musta keha kiirguse omadused

- *Absoluutselt musta keha kiirgus allub Planck'i jaotusele.*

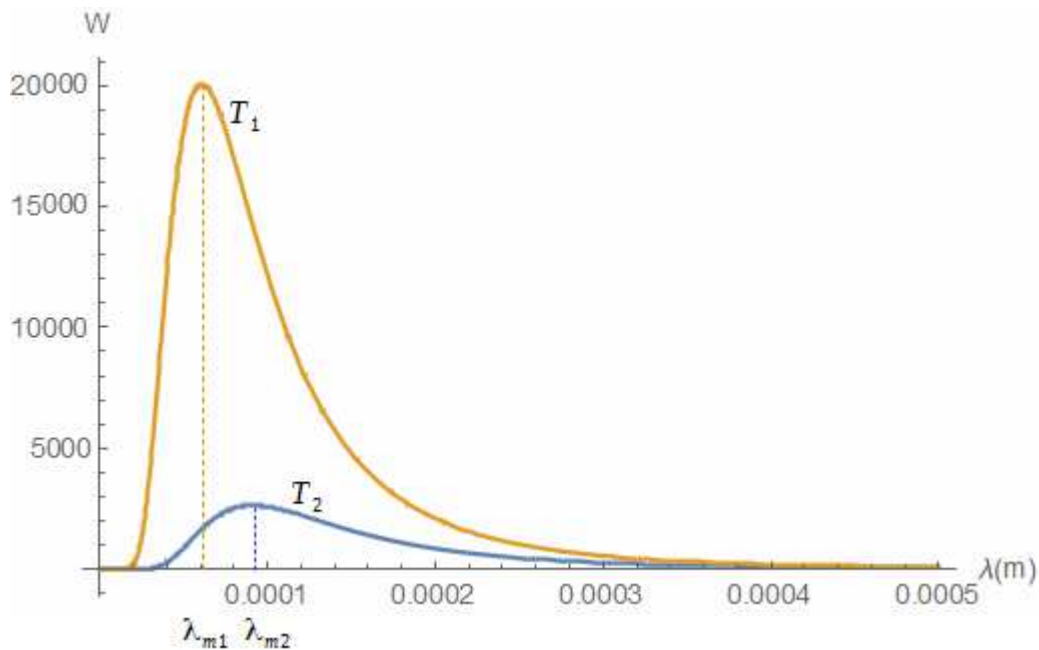
Planck'i jaotus annab sageduste vahemikus ω kuni $\omega+d\omega$ kiirgusenergia ühikruumalas

$$W(\omega)d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega, \quad (5.10)$$

kus $W(\omega)$ - on kiirgusenergia spektraaltihedus (ühikulise sageduste vahemiku kohta tulev energiatihedus), T - on absoluutne temperatuur, k - on Boltzmann'i konstant, c - valguse kiirus ja $\hbar$ - Planck'i konstant. Seost (5.10) kasutatakse eelkõige teoreetilistes kiirgusfüüsika töödes. Eksperimendi seisukohast on parem kasutada seost, mis annab kiirgusenergia tiheduse seose lainepikkusest:

$$W(\lambda) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{2\pi\hbar c/kT\lambda} - 1}. \quad (5.11)$$

Joonisel 21 on illustreeritud Planck'i jaotust kahel erineval temperatuuril $T_2 > T_1$. Spektraaltiheduste maksimumile vastavate sageduste λ_{m1} ja λ_{m2} ümbruses kiiratakse absoluutselt musta keha poolt kõige rohkem energiat. Kõveraalne pindala on võrdne kiirgusenergia ruumilise tihedusega (või lihtsalt kiirgusenergia tihedusega), mida edaspidi tähistame sümboliga $\rho_{E\gamma}$. Joonisel 20 on näha, et temperatuuri kasvades kasvab kiirgusenergia tihedus $\rho_{E\gamma}$, spektraaltiheduse maksimumile vastav lainepikkus λ_m aga kahaneb. Joonisel 21 toodud näitest näeme, et kiirgava keha temperatuuri vähenemisel 1,5 korda on selle maksimaalne kiirgustihedus vähenenud umbes 7 korda. Integreerides seost (5.11) numbriliselt λ järgi temperatuuridel 300 ning 200 K, saame et kiirgusenergiate tihedused erinevad $1,5^2=5,0625$ korda.



Joonis 21. Kiirgusenergia spektraaltiheduse $W(\lambda)$ sõltuvus kiirguse sagedusest λ kahel erineval temperatuuril $T_1=300\text{ K}$ ja $T_2=200\text{ K}$.

Planck'i jaotusest (5.11) järeldub rida füüsikaliselt olulisi seaduspärasusi. Järgnevalt esitame neist mõned (meie jaoks kõige tähtsamad).

- *Wien'i seadus:*

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (5.12)$$

kus $b=2,90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ on Wien'i konstant. Ehk – absoluutselt musta keha temperatuuri tõusmisel väheneb spektraaltiheduse maksimumile vastav lainepikkus. Wien'i seaduse tähtsust astronoomias ja kosmoloogias on raske ülehinnata. Selle abil saab mõõta kaugete objektide (näiteks tähtede) temperatuuri.

- *Stefan'i -Boltzmann'i seadus:*

$$J = \frac{1}{4} c \rho_{E\gamma} = \sigma T^4, \quad (5.13)$$

kus J - energiavootihedus ja $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg}}{\text{s}^3 \text{K}^4}$ on Stefan'i -Boltzmann'i konstant.

Energiavootihedus J on võrdeline temperatuuri neljanda astmega. Valemist (5.13) näeme, et kiirgusenergia tihedus on samuti võrdeline temperatuuri neljanda astmega

$$\rho_{E\gamma} = \frac{4\sigma}{c} T^4. \quad (5.14)$$

- *Olekuvõrrand:*

$$p_E = \frac{1}{3} \rho_{E\gamma}. \quad (5.15)$$

Footongaasi rõhk p on võrdne ühe kolmandikuga kiirgusenergia tihedusest.

- *Footonite arvu tihedus:*

$$n_\gamma = 2,404 \left(\frac{k}{c\hbar} \right)^3 \cdot \frac{1}{\pi^2} T^3. \quad (5.16)$$

Footonite arv ruumalaühikus n_γ on võrdeline temperatuuri kuubiga. Temperatuuri kasvades footonite tihedus kasvab.

5.4 Universumi vanuse seos temperatuuriga

Uurime väga noort Universumi. "Lapse eas" käitub Universum sarnaselt absoluutselt musta kehaga. Kõrge temperatuurilises plasmas mängivad laetud osakesed pidevalt palli footonitega. Kui laetud osake on neelanud footoni, hakkab ta kiirendusega liikuma (võnkuma). Kiirendusega liikuv laeng kiirgab uue footoni, mis omakorda kohtudes mõne naaberlaenguga neelatakse jne.

Veelgi varajasemas Universumis lisanduvad "pallimängule" veel vaakumist osakeste sünn ja osakeste annihilatsioon. Neid lisaaspekte käsitleme lähemalt punkti lõpus.

Kuna vaatlustest on teada, et käesoleval ajal on iga tavalise osakese (prooton, neutron jms.) kohta Universumis umbes 10^9 footonit, siis minevikus pidi Universum olema kiirgusdominantses staadiumis, kus valdav osa Universumi energiast eksisteeris kiirguskvantide (nt footonite) vormis. See on nii, kuna Universumi paisumisel kiirgusenergia tihedusele vastav massitihedus kahaneb palju kiiremini kui seisumassiga osakeste massitihedus (vt 5.2). Tuletagem meelde, et kiirgusenergia korral põhjustavad energiatiheduse kahanemist kaks efekti: Universumi paisumine, mis vähendab footonite arvu tihedust ja kosmoloogiline punanihe, mis vähendab iga üksiku footoni energiat. Seisumassiga osakeste massitihedusele kosmoloogiline punanihe olulist mõju ei avalda.

Kiirgusdominantses Universumis on energiatiheduse ρ_E kõigi Friedman'i mudelite korral määratud võrdusega (4.10)

$$\rho_E = \rho c^2 = \frac{3c^2}{32\pi G t^2}, \quad (5.17)$$

kus G on gravitatsioonikonstant.

Teiselt poolt, sellel evolutsiooni etapil käitub Universum absoluutselt musta kehana ja järelkult kehtib Stefan'i-Boltzmann'i seadus

$$\rho_E = \alpha \frac{4\sigma}{c} T^4. \quad (5.18)$$

Võrdus (5.17) erineb tõelisest Stefan'i-Boltzmann'i seadusest (5.13) kordaja α poolest. Suurus α on määratud ürgplasma domineerivate ülirelativistlike osakeste eriliikide arvuga (nt footon, elektron, positron, prooton, neutron, antiprooton, kvargid jne.). Hiljem näeme, et erinevatel varajase Universumi arengu etappidel võib osakeste eriliikide arv olla erinev ja järelkult ka α väärtus võib olla erinev. Kordaja α valemis (5.18) esinemise füüsikaliseks põhjuseks on asjaolu, et valguse kiirusele lähedaste kiirustega liikuvad osakesed, käituvad sarnaselt footonitega (seisumassi mõju tühiselt väike) ja seega nende olemasolu suurendab absoluutselt musta keha kiirguses olevate "footonite" arvu. Selguse huvides rõhutagem veel, et erinevat liiki ultrarelativistlike osakeste ja footonite tihedused on termodünaamilise tasakaalu olekus ligikaudu võrdsed (vähemalt suurusjärgu täpsusega).

Võrdustest (5.17) ja (5.18) saame kuumade Universumi kirjeldamise seisukohalt väga tähtsa valemi:

$$T = \left(\frac{3c^3}{128\pi G \alpha \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (5.19)$$

Seega plasma temperatuur on pöördvõrdeline ruutjuurega Universumi vanusest. Kuigi α konkreetne väärtus sõltub temperatuurist, on tema mõju T väärtusele siiski suhteliselt väike (valemis (5.19) on $\alpha^{\frac{1}{4}}$). Arvestades valemis (5.19) olevate konstantide väärtusi ja võttes α konkreetse mõttes võrdseks 100-ga, saame

$$T \approx 10^{10} \cdot t^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.20)$$

kus temperatuur T on antud Kelvini kraadides ja Universumi vanus t sekundites (näiteks kui Universumi vanus oli 1 sek, oli tema temperatuur umbes kümme miljardit kraadi). See valem seob Universumi vanuse tema temperatuuriga. Kirjanduses iseloomustatakse tihti varajase Universumi vanust, tuginedes valemile (5.20), aja astmel temperatuuriga.

Kriitilised temperatuurid

Korrutades võrduse (5.20) mõlemad pooli läbi Boltzmann'i konstandiga k , saame järgmise tähtsa seose:

$$kT \approx 0,86 \frac{1}{\sqrt{t}} [MeV]. \quad (5.21)$$

Siin mõõdetakse aega sekundites, energiat aga mega-elektronvoltides. Valemit (5.21) võib füüsikaliselt tõlgendada kui ühe osakese keskmise soojusliikumise energia kT sõltuvust Universumi vanusest t .

Tulemus (5.21) lubab hinnata (suurusjärgu täpsusega) Universumi vanust, mil üks või teine elementaarosakeste vaheline protsess muutub oluliseks Universumi arengus. Vastavat temperatuuri me nimetame uuritava protsessi kriitiliseks temperatuuriks. Illustreerimaks öeldut, hindame Universumi vanust kolme protsessi korral.

- Prootonite ja antiprootonite annihilatsioon.

Kui footonite energia on suurem kui kahekordne prootoni seisumass $kT > 2m_p c^2 \approx 1840 \text{ MeV}$, siis footonid (aga ka teised osakesed) põrkudes osakestega, võivad vaakumist välja lüüa prootoni ja antiprootoni paare. Termodünaamilise tasakaalu korral on plasmas selliseid paare peaaegu sama palju kui footoneid. Tasakaaluseisundis footonite põrgetel tekkivaid osakeste ja antiosakeste paare on sama palju kui footoneid, mis tekivad nende paaride annihilatsioonil. Universumi paisumisel temperatuur langeb. Kui temperatuur langeb alla kriitilise väärtuse $kT < kT_{p_{kr}} = 2m_p c^2 \approx 1840 \text{ MeV}$, siis prootonite ja antiprootonite paare põrgete tagajärjel enam juurde ei teki ja olemasolevad paarid annihileeruvad suhteliselt kiiresti, tekitades footonite paare.

Kasutades valemit (5.21), saame nüüd hinnata Universumi vanust $t_{p_{kr}}$, mil ürgplasmast kaovad prootonite ja antiprootonite paarid:

$$t_{p_{kr}} \approx \left(\frac{0,95}{1840} \right)^2 \approx 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ s}.$$

Universumi temperatuur on sel ajal umbes kakskümmend tuhat miljardit kraadi $T \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ K}$ (vt valem (5.20)). Siinkohal tahaks juhtida lugeja tähelepanu ühele lahendamata probleemile kosmoloogias. Miks oli ürgses plasmas prootoneid veidi rohkem kui antiprootoneid? Niipalju, kui teame, pole Universumis märgatavaid antiaine koguseid.

Tänapäeva vaatlustest on selgunud, et praegu on Universumis üks prooton umbes miljardi footoni kohta. Kuna footonite koguarv ei ole oluliselt muutunud alates prootonite ja antiprootonite annihilatsioonist (Universumi vanus ca 10^{-7} s), siis pidi ürgplasmas olema iga miljardi prootoni ja antiprootoni paari kohta üks üleliigne prooton. Täpsemalt tuleks siiski öelda osakeste summaarne barüonarv, footoni kohta on umbes üks miljardik (10^{-9}). See esialgne väga väike osakeste ülekaal antiosakestega võrreldes moodustas selle, millest ongi põhiliselt tekkinud meile tuntud maailm. Universumi kogu elektrilaengu puudumine viib meid otsekohe järeldusele, et ka elektron-positron paaride korral pidi olema väike elektronide ülejääk. Praegu tuleb üks negatiivselt laetud elektron iga positiivselt laetud prootoni kohta. Praeguste teadmiste kohaselt võib öelda, et aine väikese ülekaalu võrreldes antiainega on

põhjustanud nn CPT (laeng-paarsus-sümmeetria) rikkumine teatavates osakeste lagunemiste protsessides, mille tulemusena ürgsest kvarkide-leptonite segust tekkis natuke rohkem ainet kui antiainet.

- Elektronide ja positronide annihilatsioon.

Elektron-positron paarile vastav kriitiline temperatuur on määratud võrdusega $kT_{e_{kr}} = 2m_e c^2 \leq 1 \text{ MeV}$ ehk $T_{e_{kr}} = 10^{10} \text{ K}$ (kümme miljardit kraadi). Ajamoment $t_{e_{kr}}$, millest suuremate korral elektron-positron paarid kaovad (annihileeruvad), on võrdne ca ühe sekundiga ($t_{e_{kr}} \approx 1 \text{ s}$). Varasematel ajamomentidel oli ürgplasma elektrone ja positrone praktiliselt sama palju kui footoneid.

- Vesiniku rekombineerimine.

Nüüd hindame Universumi vanust $t_{n_{kr}}$ epohhil, mil moodustusid neutraalsed aatomid (vesiniku aatomid). Selleks, et vesiniku aatomid oleksid stabiilsed ja ei ioniseeruks footonitega või teiste osakestega põrgete tagajärjel, peab põrke energia olema väiksem elektroni seoseenergiast $\varepsilon \approx 13,6 \text{ eV}$ vesiniku aatomis. Kriitilisele temperatuurile vastavaks energiaks tuleb siiski valida umbes nelikümmend korda väiksem energia $kT_{n_{kr}} \approx 0,34 \text{ eV}$ ehk $T_{n_{kr}} \approx 4000 \text{ K}$. Peamiseks põhjuseks on kaks asjaolu. Esiteks absoluutselt musta keha kiirgusspektris on küllaltki suur osakaal ka keskmisest suurema energiaga (sagedusega) footonitel (vt joonis 9), millistega põrkamisel aatomid ioniseeruvad. Teiseks, kuna iga aatomi (aatomi tuuma) kohta tuleb ca 10^9 footonit, siis selliseid suure energiaga footoneid on suhteliselt palju, võrreldes aatomite arvuga. Universumi vanust $t_{n_{kr}}$ stabiilsete vesiniku aatomite massilise moodustamise (rekombineerimise) epohhil saame jällegi hinnata, kasutades valemit (5.21):

$$t_{n_{kr}} \approx 300000 \text{ aastat.}$$

Viimaste hinnangute kohaselt on see siiski umbes 380000 aastat. See on väga tähtis ajajärk Universumi arengus. Vabade elektronide puudumine, peale vesiniku rekombineerumist, teeb Universumi kiirgusele läbipaistvaks. Kiirguse sõltumatus ainest võimaldab ainel hakata koonduma galaktikateks ja tähtedeks. Kulub veel umbes 12-13 miljardit aastat ja meie hakkame arutlema Universumi struktuuri ja tekkepõhjuste üle. Vesiniku rekombineerumisest tuleneb veel üks järeldus, mida saab otseselt vaatlustega kontrollida. Nimelt vesiniku rekombineerumisel said footonid vabaks (iga aatomi kohta oli neid ca 10^9) ja jäid paisuvasse Universumisse vabalt rändama. Vabaks saamise momendil vastas nende spektraaljaotus Planck'i jaotusele temperatuuril $T_{r_{kr}} \approx 4000 \text{ K}$ (absoluutselt musta keha kiirgus). Universumi paisudes jääb nende spektraaljaotuse üldkuju muutumatuks - jääb Planck

’i jaotuseks. Kahaneb aga temperatuur: temperatuur on pöördvõrdeline Universumi mastaabi teguriga $T \approx \frac{1}{a(t)}$. Käesoleval ajal on see kiirgus vaadeldav nn reliktkiirgusena, millel on temperatuurile 2,7 K vastav absoluutselt musta keha kiirguse spekter. Vaatluses ilmnevad väga väikesed kõrvalkalded Planck’i jaotusest ja mitteisotroopsus annavad väärtuslikku teavet esimeste galaktikate tekkeprotsessi kohta.

Ülesanded.

1. Higgs’i boson on elementaarosake, mis elementaarosakeste standardmudeli kohaselt annab massi kõigile teistele osakestele (elektronid, neutriinod, neutroneid ja prootoneid moodustavad kvargid jmt). Suure Hadronite Põrguti peal saadud tulemused on andnud Higgsi bosoni massiks $2,24 \cdot 10^{-25}$ kg. Milline on Higgsi’i bosoni lävitemperatuur ning millisel ajahetkel Higgs’i bosonid on hakanud kaduma? Selgitage, miks tänapäeval on väga keeruline Higgsi bosoneid leida kas universumist või laboratoorsetes tingimustes.

2. Leptonite (kergete osakeste) hulka kuuluvad ka müüonid ning tauonid. Mõlemad on lühikese elueaga osakesed, kuid müüoneid tekitatakse näiteks atmosfääri ülakihtides tänu Päikeselt tulenevale kosmilisele kiirgusele ning seetõttu on võimalik neid registreerida ka maapinnal. Milline on müüonite lävitemperatuur ning aeg, mil need hakkasid kaduma, kui müüoni seisuenergia on 105,7 MeV?

5.5 Esimesed 300 000 aastat

Järgnevalt visandame varajase Universumi evolutsiooni-etappide üldskeemi.

- *Universumi vanus on $t < 10^{-43}$ s (10^{-43} s on nn Planck’i aeg).*

Arvatakse, et sel ajal tekkisid nii aeg kui ka ruum. On levinud arvamus, et seda ajastut kirjeldab kvantgravitatsioon (vastav teooria veel puudub), st aeg-ruumi geomeetrilised omadused võivad muutuda hüppeliselt. Millised olid siis füüsikalised seaduspärasused, seda ei teata.

- *Universumi vanus on 10^{-37} s $< t < 10^{-34}$ s.*

Ka sellest epohhist teatakse väga vähe. Oletatakse, et epohhi alguses valitses üks universaalne vastastikmõju, nn Supergravitatsioon, milles potentsiaalselt sisalduvad kõik tänapäeval tuntud fundamentaalsed interaktsioonid (gravitatsiooniline, tugev, nõrk ja elektromagnetiline interaktsioon). Epohhi jooksul eraldub gravitatsiooniline vastastikmõju nn Suurest Ühendusest (Suur Ühendus – ühendab tugevat, nõrka ja elektromagnetilist interaktsiooni). Universumis võis temperatuur olla kõrgem kui 10^{27} K. Võib väita, et nii kõrgel temperatuuril

puudusid tuumaosakesed (prootonid, neutronid). Põhilised osakesed, mis võisid esineda on neutriinod ja teised leptonid, vabad kvargid, footonid ja võib olla ka mõned seni avastamata osakesed. Arvatakse, et sel epohhil võis esineda Universumi inflatsiooniline paisumine.

- *Universumi vanus on* $10^{-34} s < t < 10^{-10} s$.

Temperatuur on kõrgem kui $10^{15} K$. Universumis oleva ultrarelativistliku plasma koostis on sarnane sellega, mis oli eelmises epohhis. Selle perioodi alguses tekib aine ja antiaine asümmeetria – kvarke ja leptoneid on ühe miljardiku võrra rohkem kui antikvarke ja antileptoneid. Universumi jahtudes laguneb sellel epohhil Suur Ühendus elektronõrgaks vastastikmõjuks ja tugevaks (värvi) vastastikmõjuks.

- *Universumi vanus on* $10^{-10} s < t < 10^{-6} s$.

Hadronite staadium. Temperatuur on kõrgem kui $10^{13} K$ ja ainetihedus on suurem aatomituuma tihedusest ($\rho = 10^{14} \frac{kg}{cm^3}$). Sel etapil ühinevad kvargid prootoniteks, neutroniteks ja teisteks barüonideks. Tekivad ka vastavad antiosakesed. Etapi lõpus annihileeruvad barüonid ja antibarüonid (osakesed ja antiosakesed). Kuna barüone on veidi rohkem kui antibarüone (üks miljardik osa), siis säilib suhteliselt väike osa barüonidest. Sel perioodil on umbes 300 erinevat liiki osakest.

- *Leptonite staadium:* $10^{-6} s < t < 10 s$.

Temperatuur on vahemikus $10^{13} K > T > 5 \cdot 10^9 K$. Ainetihedus on vahemikus $10^{14} \frac{kg}{cm^3} > \rho > 1 \frac{kg}{cm^3}$. Universumit täitvas kiirguse ja osakeste segus domineerivad leptonid (elektronid ja positronid, neutriinod, antineutriinod jms) ja footonid. Neid on umbes 10^9 korda rohkem kui barüone. Esimese sekundi lõpus on prootoneid 84% ja neutroneid 16% nukleonide koguarvust. Vahemikus $1-10 s$ elektronid ja positronid annihileeruvad. Elektronide veidi suurema arvukuse tõttu (elektrone on üks miljardik osa rohkem kui positrone) jääb järele prootonitega võrdne arv elektrone. Sel ajal on neutriinode ja antineutriinode vaba tee keskmine pikkus Universumi väiksema temperatuuri ja tiheduse tõttu sedavõrd suurenenud, et nad ei ole enam teiste osakestega soojustasakaalus, vaid käituvad vabade osakestena. Ka tänapäeval on Universum täidetud sellest perioodist vaba rändu alustanud relikt-neutriinodega. Leptonite staadiumi lõpus hakkavad toimuma esimesed termotuumareaktsioonid – moodustuma raskemate aatomite tuumad (raskemad kui vesiniku

tuumad nt He, ülivähe Li ja Be). Need tuumad ei ole stabiilsed, kuna kõrge temperatuuri ja suur tiheduse tõttu nad lagunevad põrgete tagajärjel teiste osakestega.

- *Heeliumi ja deuteriumi tuumade süntees:* $10\text{ s} < t < 100\text{ s}$.

Universumis domineerivad footonid ja neutriinod. Väga väike osa (üks miljardik) on prootoneid, elektrone ja neutroneid. Kuna neutriinod rändavad vabalt ja ei osale oluliselt soojusliku tasakaalu säilitamisel, siis Universumi temperatuuri all mõistame footonitele vastavat absoluutselt musta keha temperatuuri. Temperatuur on kõrgem kui $5 \cdot 10^8\text{ K}$ ja perioodi lõpus on tihedus langenud umbes kümnekordse veetiheduseni ($10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$). Sel etapil moodustuvad vesinikust raskemate aatomite stabiilsed tuumad. Põhiliselt tekivad heeliumi ja deuteriumi tuumad. Viimaseid jääb peale tuumareaktsioonide lõppu järele suhteliselt vähe (alla 1%-di). Etapi lõpus on kõigist aatomi tuumadest umbes 27% heeliumi tuumad ja 73% vesiniku tuumad (prootonid). Saja sekundi möödudes on Universumi tihedus niivõrd väike ja temperatuur juba nii madal, et edasisi tuumareaktsioone ei saa enam toimuda.

- *Kiirgusdominantne Universum:* $100\text{ s} < t < 380000\text{ a}$.

Paisuvas ja jahtuvas Universumis domineerivad energeetiliselt absoluutselt musta keha kiirgusele vastavad footonid, mis on soojustasakaalus põhiliselt elektronidest, prootonitest ja heeliumi tuumadest koosneva kuuma plasmaga. Tavaaine energiatihedus on peaaegu kogu selle perioodi vältel palju väiksem footonite energiatihedusest, mistõttu vastavas Friedman'i mudelis on füüsikaliseks olekuvõrrandiks: $\rho = \frac{\rho_E}{3}$, kus ρ_E - on energiatihedus. Kuna

Universumi paisudes footonite energiatihedus kahaneb kiiremini kui tavaaine energiatihedus, siis ligikaudu 380 000 aastat peale Universumi sünni (temperatuur oli umbes 4000 K) toimus üleminek kiirgusdominantselt ajastult praegusele, ainedominantsele ajastule, millal Universumi peamine energia on koondunud tuumaosakeste massi. Kuni selle ajani ei olnud võimalik neutraalsete aatomite. Kui kiirguse temperatuur ületab 4000 K, siis on iga tuumaosakese kohta piisavalt palju suure energiaga footoneid, mis tekkinud neutraalse aatomi uuesti ioniseerivad, st – löövad neutraalsest tuumast välja elektroni ning muudavad selle aatomi taas positiivse tuuma ja elektroni paariks. Seega oli selle ajani aine ioniseeritud olekus ja seetõttu pidevas vastastikmõjus elektromagnetkiirgusega. Pidevad footonite ning laetud osakeste vahelised põrked aga võrdustasid aine ja kiirguse temperatuuri. Teisalt on siinkohal oluline ka see, et juhul, kui aine tänu juhuslikule tiheduse suurenemisele hakkab gravitatsiooniliselt mingisse piirkonda kokku tõmbuma, siis elektromagnetkiirguse rõhk surub

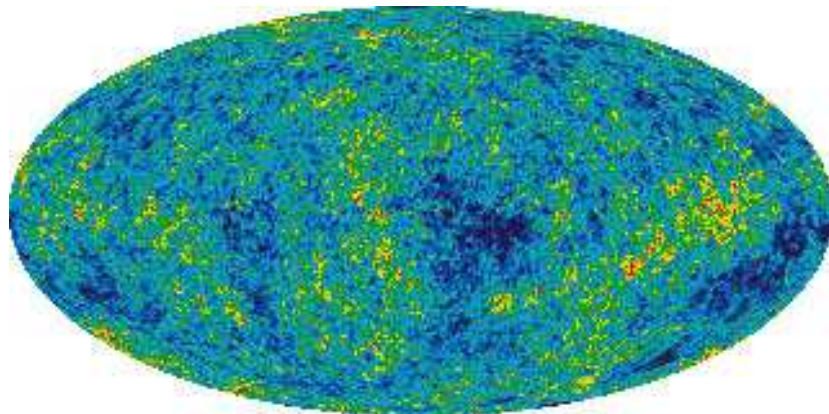
selle taas laiali. Seetõttu ei ole kuni ajani 390000 aastat pärast universumi sünni võimalik struktuuride teke universumis ainult tavalise aine tiheduse fluktuatsioonide tõttu.

Tähelepanuväärne on see, et üleminek toimus umbes samal ajal, kui Universum muutus kiirgusele läbipaistvaks (temperatuur 4000 K). Peale seda sai võimalikuks stabiilsete elektriliselt neutraalsete aatomite tekkimine, nn vesiniku rekombinatsioon – osakeste vahelised põrked ei rebinud enam elektrone aatomitest välja. Siiani Universumis sisaldunud elektriliselt laetud osakestest koosnev plasma, muutus kiiresti neutraalseks keskkonnaks, kus footonid said vabalt levida. Keskkonna muutumine kiirgusele läbipaistvaks põhjustas termodünaamilise tasakaalu kadumise aine ja footonite vahel. Need footonid moodustavadki reliktkiirguse.

6. Tumeaine ja tumeenergia

6.1 Tumeaine ja selle kinnitamise vaatluslikud alused.

Joonisel 6.1. on kujutatud pilt reliktkiirguse struktuurist.



Joonis 6.1. Reliktkiirguse struktuur.

Täpsemalt kirjeldab joonisel 6.1. toodud pilt erinevusi keskmisest reliktkiirguse temperatuurist. Praeguseks on leitud, et reliktkiirguse keskmine temperatuur on 2,725 K. Joonisel 6.1. on toodud erinevused keskmisest – sinised piirkonnad on jahedamad ning kollased-punased keskmisest soojemad. See näitab, et reliktkiirguse vabanemise hetkel oli osade piirkondade aine-energia tihedus keskmisest suurem ning teistes väiksem. Kuivõrd tavalise aine tiheduse fluktuatsioonid ei saa olla selleks allikaks, pidi olema selleks muu põhjus. Selleks on tänapäeval nimetatud tumeaine (varjatud mass), mis allub gravitatsioonilisele vastastikmõjule, kuid mitte elektromagnetilisele. Seetõttu sai tumeaine hakata tänu tiheduse fluktuatsioonidele varem kokku tõmbuma mingitesse struktuuridesse, mille juurde koondus ka tavaline aine ja kiirgus. Seetõttu näitab joonis 6.1 ka aine-kiirguse suuremastaabilise struktuuri algeid. Just selle struktuuri – mingeid suuremaid tsentreid ühendavate filamentide – peale hakkasid hiljem tekkima galaktikaparved, galaktikad ning veel hiljem tähed.

Peale nähtava aine on Universumis veel nn tumeaine, mille mõju tavalisele ainele ja energiale avaldub gravitatsioonilise tõmbumise kaudu. Seetõttu on tumeaine tihedus ja rõhk Friedmanni võrranditesse (4.3a) ja (4.3b) automaatselt lisandunud aine ja energia tiheduse ja rõhu kaudu erinevalt tumeenergia tihedusest.

Tumeaine olemasolu on pakkunud esimesena välja ilmselt F. Zwicky 1930.ndatel, hiljem on seda soovitanud arvestada erinevad teadlased: Peebles, Zeldovitš, Rees jt. Tumeaine olemasolule on järgmised vaatluslikud põhjendused.

Galaktikate pöörlemiskiiruse analüüs.



Joonis 6.2. Spiraalne galaktika küljelt vaadatuna.

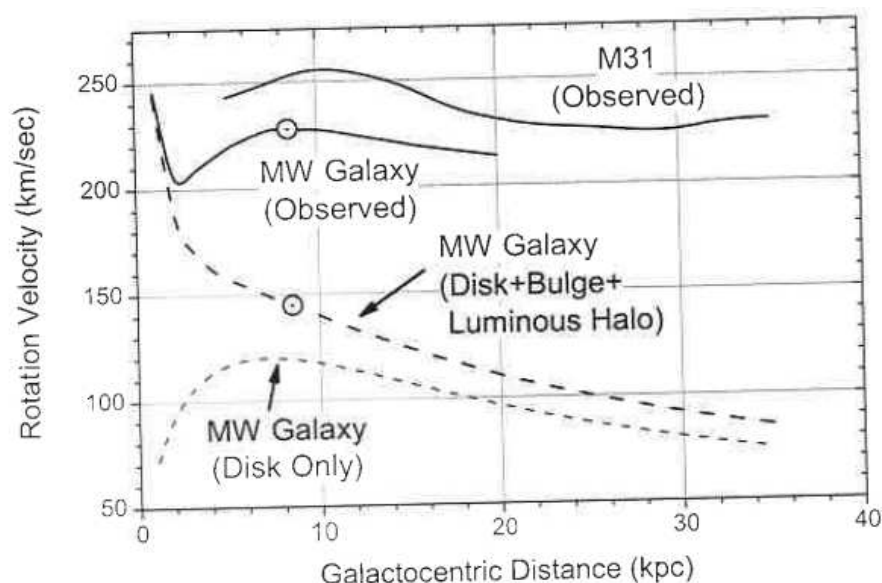
Vaadeldes galaktikaid (vt joonis 6.2), siis saab leida nende nähtava aine massijaotuse $M(r)$, kus r on kaugus galaktika tsentrist, lähtudes galaktika poolt kiiratava valguse intensiivsuse $I(r)$ jaotusest. Üldiselt võib eeldada, et galaktika mingi osa poolt kiiratava valguse intensiivsus on võrdeline selle osa (tähtede) massiga, st $I(r) \sim M(r)$. Arvestades Newtoni gravitatsiooniseadust saab seose $\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$ abil leida teoreetilise kiiruste jaotuse. Sidudes

massi tähtede kiirguse intensiivsusega $I(r)$ võime seega leida galaktika keskmest kaugusel r olevate tähtede kiiruste sõltuvuse kaugusest galaktika tsentrini r .

Teisalt, vaatluslikult saab galaktika keskmest ümber pöörlevate tähtede kiirused leida Doppleri efekti abil. Joonisel 6.3 on toodud Linnutee galaktika (MW) tähtede kiiruste jaotused vaatluslikult (pidev joon), arvutuslikult arvestades vaid ketta massi (alumine katkendlik joon) ning arvutuslikult arvestades ketta ning helendava halo massi (ülemine katkendlik joon). Joonisel on tähistatud ka sümboliga $\odot$ Päikese jaoks kiiruste asukohad erinevatel joonistel. Ülemisel pideva joonega on toodud Andromeda galaktika M31 kiiruste vaatlusliku jaotuse graafik.

Nagu joonistelt näha, peaks galaktika keskmest kauguse suurenemisega langema kiirus ligikaudu pöördvõrdeliselt kauguse ruuduga (suuremate kauguste korral). Vaatluslikud andmed on sellega vastuolus. Nimelt, pideva joonega tähistatud vaatluslikud kiirused on oluliselt suuremad kui teoreetilised arvutused näitavad. Samuti näitavad vaatlusandmed, et kiirused ei kahane kauguse r suurenedes nii nagu võiks eeldada. St, andmed näitavad, et suur osa mitterähtavast aineist paikneb nähtavast galaktikakettast kaugemal, sfäärilises halos, mis ulatub näiteks Andromeda galaktikas rohkem kui 200 kpc-ni galaktika tsentrist.

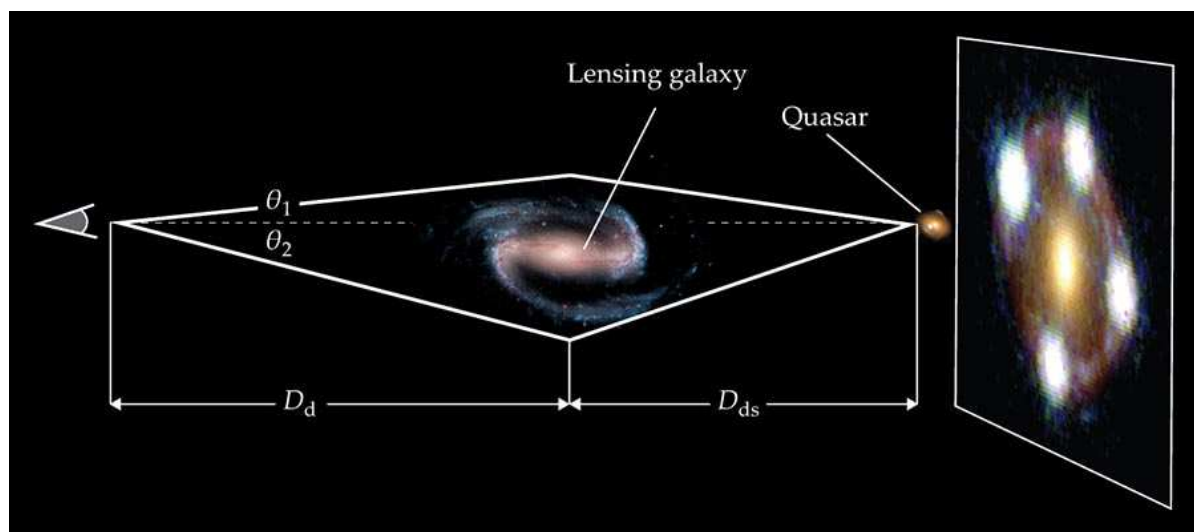
Vaatlustest selgub, et me näeme ja oskame nähtava aina arvestada vaid väikest osa gravitatsioonile alluva aine kogumassist. Kiiruste jaotuse vaatlusliku graafiku abil saame hinnata gravitatsioonile alluva massi tegelikku jaotust $M(r)$ ning see on oluliselt suurem kui nõ kiirgava aine mass. Hinnatakse, et spiraalsete galaktikate puhul võib tumeaine moodustada kuni 90% kogu aineist. Spiraalsete galaktikate uuringutest on selgunud, et kui nähtav aine on kogunenud lapikusse ketasse, siis tumeaine paikneb sfääriliselt.



Joonis 6.3. Kiiruste jaotus Linnutee (MW) ning Andromeda (M31) galaktikas. Linnutee galaktika kohta on katkendlike joontega antud ka arvutuslikud kiiruste jaotused arvestades nähtava aine osakaalu.

Gravitatsiooniläätsed.

Teise infoallikana tumeaine kohta võib välja tuua gravitatsiooniläätsed. Üks pilt gravitatsiooniläätse poolt tekitatud pildist on toodud joonisel 6.4.



Joonis 6.4. Gravitatsioonilääts. Läätsena esineva galaktika taga paikneb objekt (kvasar antud juhul), mis registreeritakse 4 erineva kujutisena.

Graviteeruv aine tekitab Universumis lokaalseid kõverusi ning seetõttu painutab valguskiirt algsest teest kõrvale. Kõrvalekalde suurus sõltub gravitatsiooniläätse kujutava galaktika massist. Arvutuste kohaselt on selliste gravitatsiooniläätsedest galaktikate mass palju suurem nähtava aine poolt paistvate tähtede kogumassist.

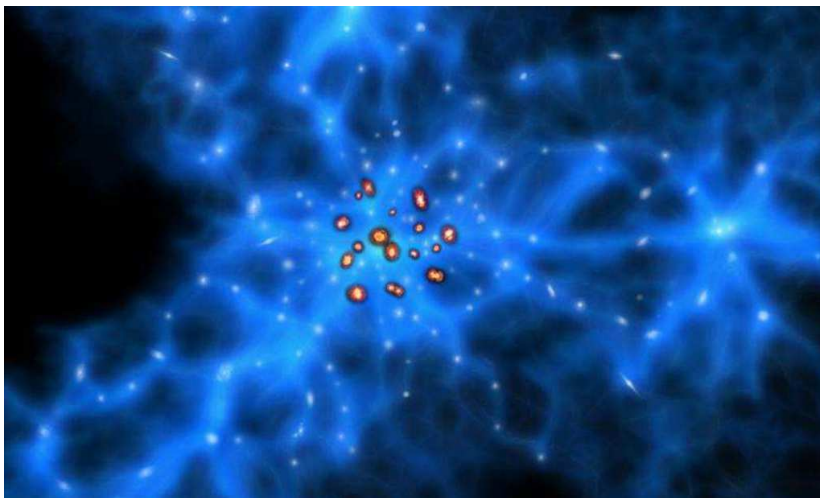
Erinevate vaatluste andmed näitavad, et kogu gravitatsioonile alluva aine ja energia suhteline tihedus (tihedus kriitilise tiheduse suhtes, vt alapunkti 4.2 ning valemit (4.12)) praegu

$$\Omega_{0,A} = \frac{\rho_{a,0}}{\rho_{cr,0}} = 0,25 \pm 0,05 \quad .$$

Barüonilise aine suhtelist tihedust hinnatakse umbes 5%-le kriitilisest, st $\Omega_{bary,0} \approx 0,05$, st nähtamatut tumeainet on umbes 4 korda rohkem kui nähtavat ainet, millest on moodustunud tähed, nendevahelised gaasipilved jmt.

6.2 Suuremastaabilised struktuurid ja nende teke

Kolmandaks tõendusmaterjaliks tumeaine olemasolust on Universumi suuremastaabilised struktuurid ning nende tekke modelleerimine Universumi algetappidel tänu aine graviteerumisele. Vaatlused näitavad, et enamus Universumi ainest galaktikaparvedena paikneb filamentidel (vt joonis 6.5). Filamentide lõikepunktides on aine hulk veelgi suurem.



Joonis 6.5. Universumi varases etapis hakkas tumeaine kogunema enne barüonilist ainet. Joonisel toodud kollakad-punakad laigud on filamentide sõlmpunktid, kuhu tumeaine on hakanud varem kogunema.

Alates 1970.ndatest on läbi viidud arvutisimulatsioone, mis arvestavad, et aine sai hakata kogunema klompidesse umbes tiheduse fluktuatsioonidest tekitatud gravitatsioonitsentrite alles pärast seda, kui universum oli muutunud kiirgusele läbipaistvaks. St, kiirgus ei surunud ainet enam laiali. See sai toimuma hakata alles 380 000 aastat pärast Suurt Pauku. Simulatsioonid on näidanud, et kuivõrd aine tihedus oli selleks ajaks juba oluliselt langenud, siis poleks enam saanud hakata tekkima piisavalt suure massiga gravitatsioonikeskmed, et neist saanuks hakata tekkima galaktikaparved, galaktikad ja lõpuks tähed.

Teisalt on simulatsioonides arvestatud, et Universumis on tumeainet umbes 4 korda rohkem kui barüonilist ainet. Kuivõrd elektromagnetkiirgus tumeainet laiali ei suru, siis saab nii tumeaine kui ka barüoniline aine hakata kogunema tumeaine tiheduse fluktuatsioonidest tekitatud gravitatsioonikeskmete ümber. Sellised fluktuatsioonid saavad hakata tekkima kohe pärast Suurt Pauku. Seda simulatsioonides arvestades on leitud, et sel juhul hakkavad tekkima aine-tumeaine filamendid, edasi neis juba galaktikaparved ja galaktikad.

6.3 Tumeenergia ja selle mõju Universumi arengule

4. peatükis vaatlesime, kuidas kosmoloogilise konstandi olemasolu mõjutab Universumi arengut. Vaatluslikud andmed kinnitavad, et Universum paisub praegu kiirenevalt ja kiirenevalt paisumine on toimunud umbes pool Universumi senisest elueast. Seega, sõltumata

sellest, kas Universum on positiivse või negatiivse kõverusega või tasane, peaks praeguste mudelite kohaselt jätkuma üha kiirenev paisumine igavesti.

6.5 Universumi arengu lõppvaatus, miks on Universum olemas?