

Tallinna Ülikool
Matemaatika ja Loodusteaduste Instituut
Loodusteaduste osakond

Matemaatilised meetodid loodusteadustes I

Loengukonspekt koos ülesannetega

Tõnu Laas

Kirjandus (valitud peatükke):

1. Neuhauser C. Calculus for biology and medicine. New Jersey. Prentice Hall. 2000.
2. Piskunov N. Diferentsiaal- ja integraalarvutus I. Tallinn. Valgus. 1981.
3. Piskunov N. Diferentsiaal- ja integraalarvutus II. Tallinn. Valgus. 1983.
4. Berendt G., Weimar E. Mathematic für Physiker I. Berlin. Akademie-Verlag. 1983.
5. Brachelet E. Introduction to Mathematics for Life Scientists. Berlin. Springer-Verlag. 1979.
6. Grossman S., Turner J. Mathematics for Biologists. (tõlge vn keelde). Moskva. Võshaja Shkola. 1983.

2005-2010

Sisukord

1. Vektorid.	4
1.1. Vektorid.	4
1.2. Vektorkorrutis.	8
1.3. Segakorrutis	9
1.4. Polaarkoordinaadid. Silindrilised ja sfäärilised koordinaadid.	10
1.5. Lineaarsed süsteemid	13
1.6. Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine	14
2. Maatriksid	16
2.1. Maatriksid. Võrrandisüsteemi lahendamine maatriksite abil.	16
2.2. Põhilised tehted maatriksitega.	17
2.3. Determinandid	18
2.4. Pöördmaatriksid. Maatriksvõrrandid.	19
2.5. Rakendused. Leslie maatriks.	21
2.6. Bioloogilise populatsiooni stabiilne ajaline jaotus	23
2.7. Lineaarsed teisendused. Omavektorid. Omaväärtused	24
2.7.1. Koordinaattelgede pööre	24
2.7.2. Omaväärtused. Omavektorid	25
3. Elementaar- ja liitfunktsioonid. Graafikud.	28
3.1. Elementaarfunktsioonid.	28
3.2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud, määramis- ja muutumispiirkonnad.	29
3.3. Näited funktsionaalsete sõltuvuste kohta	30
3.4. Graafikud ja funktsioonide põhilised teisendused.	35
3.5. Funktsioonide (graafikute) lineariseerimine.	36
4. Piirväärtused. Funktsiooni pidevus. Diferentsiaal ja tuletis.	39
4.1. Funktsiooni piirväärtus, pidevus	39
4.2. Funktsiooni pidevus.	42
5. Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal.	44
5.1. Funktsiooni muutumise kiirus. Tuletis.	44
5.1.1. Tuletise geomeetiline tähendus.	44
5.1.2. Elementaarfunktsioonide tuletised. Diferentseerimisreeglid.	45
5.1.3. Pöörd- ja liitfunktsioonide tuletised.	46
5.2. Funktsiooni ekstreemumid. Kasvamis- ja kahanemispiirkond. Funktsiooni uurimine.	47
5.3. Parameetriselt antud funktsiooni tuletis. Ilmutamata kujul antud funktsiooni tuletis.	51
5.4. Funktsiooni diferentsiaal.	52
5.5. Tuletise rakendamine võrrandi ligikaudsel lahendamisel.	53
5.6. Mitme muutuva funktsiooni osatuletised. Osatuletiste rakendusi vea arvutamisel.	54
5.6.1. Osatuletiste rakendamine vea hindamisel.	55
6. Integraalid.	57
6.1. Määramata integraal.	57
6.1.1. Muutujate vahetus määramata integraalis.	58
6.1.2. Ositi integreerimine.	59
6.1.3. Ratsionaalmurdude integreerimine.	62
6.2. Määratud integraal.	65
6.2.1. Riemanni integraal.	65
6.2.2. Määratud integraali omadused.	65
6.3. Ositi integreerimine ja muutujate vahetus määratud integraalis.	68
6.3.1. Ositi integreerimine	68
6.3.2. Muutujate vahetus määratud integraalis.	69
6.4. Määratud integraali rakendusi.	69
6.4.1. Pindala arvutamine.	69
6.4.2. Pöördkeha ruumala leidmine.	70

6.4.3. Funktsiooni keskvaartuse leidmine.	72
6.4.4. Kumulatiivne muutus	72
6.5. Määratud integraali ligikaudne arvutamine.	73
7. Diferentsiaalvõrrandid	74
7.1. Mõned näited diferentsiaalvõrranditest	74
7.2. Lihtsamate diferentsiaalvõrrandite lahendamine	74
7.2.1. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	74
7.3. Diferentsiaalvõrrandi lahendi kontrollimine	76

1. Vektorid.

1.1. Vektorid.

Füüsikast on tuttavad kahte liiki füüsikalised suurused: skalaarid ja vektorid. **Skalaarne suurus** ehk **skalaar** iseloomustab valitud suurust üheainsa mõõtariivuga. Näiteks - temperatuur, aine tihedus, rõhk, elektrivälja potentsiaal. Kõik need suurused võivad olla (kuid ei pruugi) kolme ruumikoordinaadi (ja lisaks aja) funktsioonid: $T = T(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$ jne, kuid selle suuruse iseloomustamiseks antud ruumipunktis saab kasutada vaid üht mõõtariivu.

Vektorilisi suurusi ehk **vektoreid** iseloomustab lisaks **arvulisele suurusele** (vektori pikkusele) ka nende **ruumiline siht ja suund**. Skalaari matemaatiliseks mudeliks on reaalarv, vektoril **geomeetiline vektor**, mis on esitatav suunatud lõiguna, millel on algus- ehk rakenduspunkt, ja lõpppunkt: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Siin A on algus- ja B - lõpppunkt.

Nullvektoriks nim. vektorit, mille algus- ja lõpppunkt ühtivad (pikkus on null): $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Kolmnurga reegel: geomeetriliste vektorite \vec{a} ja \vec{b} summaks $\vec{a} + \vec{b}$ nimetame vektorit, mis on suunatud vektori \vec{a} alguspunkti vektori \vec{b} lõpp-punkti; eeldusel, et vektor \vec{b} on rakendatud vektori \vec{a} lõpp-punkti.

Rööpküliku reegel: vektorite \vec{a} ja \vec{b} geomeetiline summa on võrdne nendele vektoritele ülesehitatud rööpküliku diagonaaliga \vec{c} .

Vektori \vec{a} korrutis reaalarvuga α on vektor $\alpha\vec{a}$, mis on samasihiline vektoriga \vec{a} ja mille pikkus $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}|$. Kui $\alpha > 0$, siis $\alpha\vec{a} \uparrow \vec{a}$, kui $\alpha < 0$, siis $\alpha\vec{a} \downarrow \vec{a}$.

Numbrite (ehk skalaaride) algebras kehtivad liitmise, lahutamise ja korrutamise operatsioonid on üldistatavad ka vektorite algebrale.

Vektorialgebra reeglid

1. Vektorite liitmine on kommutatiivne: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. Vektorite liitmine on assotsiatiivne: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. On olemas liitmistehte suhtes neutraalne nullvektor $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ iga \vec{a} korral.
4. Iga \vec{a} korral leidub vastandvektor $\vec{a}' = -\vec{a}$, nii et $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$.

Vektori korrutamine arvuga on distributiivne mõlema teguri suhtes:

5. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

Vektori korrutamine arvuga on assotsiatiivne reaalarvuliste tegurite suhtes:

7. $\alpha(\beta\vec{a}) = \alpha\beta\vec{a}$.

Loetletud omadused 1-7 järelduvad tehete geomeetrisest tõlgendusest. On võimalik ka abstraktne käsitlus: nimetada vektoriteks suvalisi objekte, mille korral on defineeritud liitmine ja korrutamine reaalarvuga, kusjuures need kaks tehet rahuldavad geomeetriseliste vektorite vallast tuttavaid tingimusi 1-7. Kõik nii defineeritud objektid moodustavad mõnesuguse **vektorruumi** ehk **lineaarse ruumi** V (või L).

Niisiis: **lineaarseks ruumiks** ehk **vektorruumiks** V nimetatakse suvalise päritoluga objektide $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ hulka, kui: 1) mistahes kahe elemendi $\vec{a}, \vec{b} \in V$ korral leidub nendega üheselt määratud kolmas element $\vec{a} + \vec{b} \in V$, mida nimetatakse nende elementide summaks ja 2) mistahes elemendi $\vec{a} \in V$ ja reaalarvu α korral leidub üheselt määratud korrutis $\alpha\vec{a} \in V$; ning on defineeritud hulga nullelement. Seejuures need tehted rahuldavad tingimusi 1 - 7. Võib öelda lühemalt: vektorruum V on kinnine reeglitega 1-7 määratud liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes.

Ülesanne 1 Olgu antud vektorid $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Leida vektorid \vec{x} ja \vec{y} , mis rahuldavad järgmisi võrrandeid:

$$3\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{a} + \vec{b} \quad (1.1)$$

$$-2\vec{x} + 4\vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b} \quad (1.2)$$

Lahendus. Võrrandist (1.1) saame

$$\vec{y} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{x}. \quad (1.3)$$

Korrutades nüüd võrrandit (1.3) neljaga ja pannes saadud tulemuse võrrandisse (1.2), saame

$$4\vec{y} = 8\vec{a} + 4\vec{b} - 12\vec{x}$$

ja

$$\begin{aligned} -2\vec{x} + 8\vec{a} + 4\vec{b} - 12\vec{x} &= \vec{a} - 2\vec{b} \\ -14\vec{x} &= -7\vec{a} - 6\vec{b} \\ \vec{x} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pannes võrduse (1.3) võrdusesse (1.4), saame

$$\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{7}\vec{b}.$$

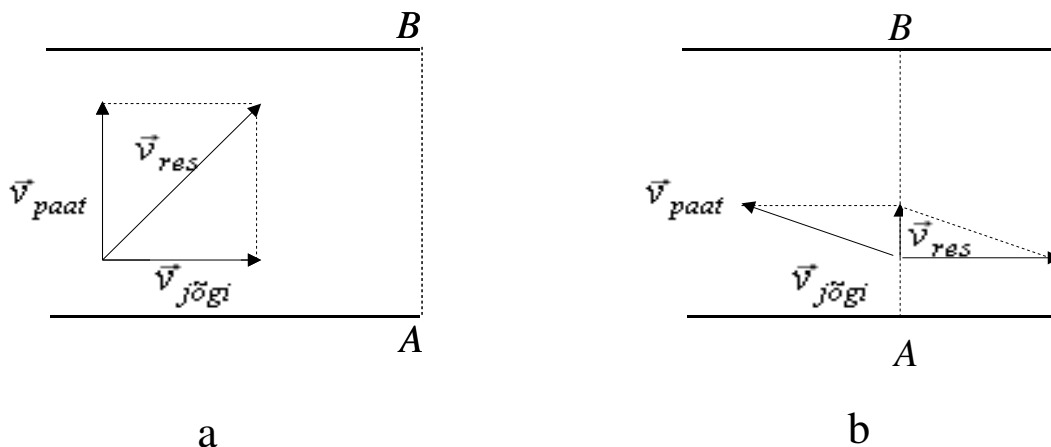
Seega võime vektorite algebras lineaarse võrrandisüsteemi lahendada samamoodi nagu reaalarvude algebra puhul.

Olgu $\vec{a} = (2; 0; -2)$ ja $\vec{b} = (-7; 1; 0)$. Mis on siis vektorite \vec{x}, \vec{y} koordinaadid?

n-mõõtmelise **vektori pikkus** ehk **vektori moodul** on

$$|\vec{x}| \equiv x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Ülesanne 2 Jõe voolu kiirus on 20 km/h. Paat liigub risti jõe voolu suunaga kiirusega 20 km/h. Milline on paadi liikumise (summaarne) kiirus ja liikumise suund? Kas on võimalik, et paat ületab jõe lühimat teed pidi, st punktist A punkti B? (vt joonis a).



Joonis 1: Paadi ja jõevoolu kiiruste vektoriaalne kujutus.

Lahendus. Kasutades rööpküliku reeglit, leiame, et resultantkiirus on ruudu diagonaal (vt joonis a), seega on paadi kiirus $v_{res} = 20\sqrt{2} \frac{km}{h} \approx 28 \frac{km}{h}$.

Et vastata teisele küsimusele, joonistame jõe kiirusevektori ja resultantkiiruse vektori nagu näidatud joonisel b. Ehitades nüüd üles rööpküliku nagu näidatud joonisel, näeme, et kolmnurga hüpotenuus peaks võrduma ühe kaatetiga. (mõlema pikkus on 20 km/h. See on võimatu. Sellisel juhul vektor $\vec{v}_{res} = \vec{0}$.

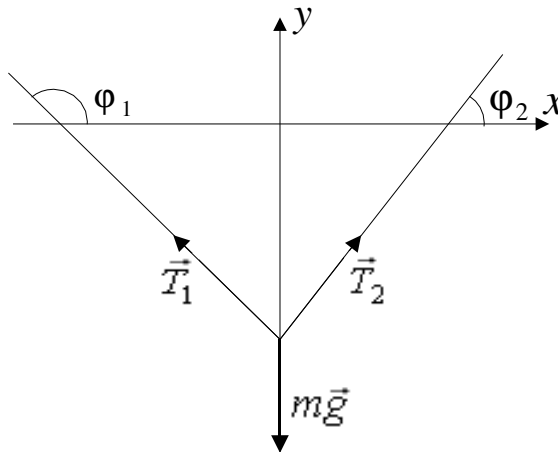
Ülesanne 3 Keha, massiga m on riputatud kahe massitu nööri otsa nagu näidatud joonisel. Kehale mõjuv raskusjõud on $m\vec{g}$. Leida nööride pinged (nööre pingutavad jõud) \vec{T}_1 ja \vec{T}_2 .

Lahendus. Kuivõrd süsteem on tasakaaluasendis, siis süsteemile mõjuvate jõudude resultantjõud on 0, seega

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Jõu \vec{T}_1 komponendid on $|\vec{T}_1| \cos \phi_1, |\vec{T}_1| \sin \phi_1$ (jõuvektori projektsioonid x - ja y - teljele). \vec{T}_2 komponendid on $|\vec{T}_2| \cos \phi_2, |\vec{T}_2| \sin \phi_2$. Seega võime kirjutada jõudude x - ja y -telgedele sihiliste komponentide jaoks vastavalt

$$\begin{aligned} |\vec{T}_1| \cos \phi_1 + |\vec{T}_2| \cos \phi_2 &= 0 \\ |\vec{T}_1| \sin \phi_1 + |\vec{T}_2| \sin \phi_1 - m|\vec{g}| &= 0. \end{aligned}$$



Joonis 2: Kehale mõjuvate jõudude kujutis. \vec{T}_1 ning \vec{T}_2 on nööri pingutavad jõud ehk nööri elastsusjõud. $m\vec{g}$ on raskusjõud.

Esimesest võrrandist saame $|\vec{T}_1| = -\frac{|\vec{T}_2| \cos \phi_2}{\cos \phi_1}$. Asendades selle teise võrrandisse, saame

$$|\vec{T}_2| \left(\sin \phi_2 - \frac{\cos \phi_2 \sin \phi_1}{\cos \phi_1} \right) - m|\vec{g}| = 0.$$

Viies $m|\vec{g}|$ paremale poole võrdusmärgi ning korrutades saadud tulemuse läbi $\cos \phi_1$ -ga, saame:

$$|\vec{T}_2| (\sin \phi_2 \cos \phi_1 - \cos \phi_1 \sin \phi_1) = m|\vec{g}| \cos \phi_1.$$

Võrduse vasakul poolel sulgudes on $\sin(\phi_2 - \phi_1)$. Seega saame

$$|\vec{T}_2| = \frac{m|\vec{g}| \cos \phi_1}{\sin(\phi_2 - \phi_1)}.$$

Analoogiliselt leiame ka avaldise $|\vec{T}_1|$ jaoks:

$$|\vec{T}_1| = -\frac{m|\vec{g}| \cos \phi_2}{\sin(\phi_2 - \phi_1)}.$$

Olgu $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ suvaline n - mõõtmeliste vektorite hulk. Vektorit \vec{b} , mis on määratud järgmiselt:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n, \quad (1.5)$$

kus $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ on suvalised skalaarid, nimetatakse vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ **linearkombinatsiooniks**.

Vektorite hulka $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ nimetatakse **linearselt sõltuvaks** parajasti siis, kui leidub k reaalarvu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, mis pole kõik korraga võrdsed nulliga sellist, et

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = 0. \quad (1.6)$$

Vektorite hulk on **lineaarselt sõltumatu** parajasti siis, kui see ei ole lineaarselt sõltuv hulk. Lihtsamalt öeldes - kui mingi k vektorist koosnev hulk on lineaarselt sõltuv, siis saab ühe vektori avaldada teiste vektorite lineaarkombinatsioonina, vastasel juhul mitte.

Saab näidata, et kahemõõtmelises ruumis on iga kahest vektorist \vec{a} ja \vec{b} koosnev hulk lineaarselt sõltuv parasjagu siis, kui nende vektorite komponentidele ehitatud determinant on 0:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Lihtsamalt öeldes - kahemõõtmelises ruumis on kaks vektorit teineteisest sõltuvad siis, kui need on paralleelsed (kollineaarsed), ja sõltumatu siis, kui need on paralleelsed.

Analoogiliselt on kolmemõõtmelises ruumis on iga kolmest vektorist $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ koosnev hulk lineaarselt sõltuv parasjagu siis, kui

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 = 0. \quad (1.7)$$

St, 3-mõõtmelises ruumis on 3-st vektorist koosnev hulk lineaarselt sõltuv siis, kui need asuvad ühel tasandil (on kollineaarsed) ja sõltumatu siis, kui need ei asu ühel tasandil.

Saab näidata, et selline üldistus kehtib ka n -mõõtmelise ruumi korral: iga n vektorist koosnev hulk $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}), \dots, \vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$ on lineaarselt sõltumatu, kui nende komponentidest ehitatud determinant on null (determinantide arvutamisest vaata peatükki 2):

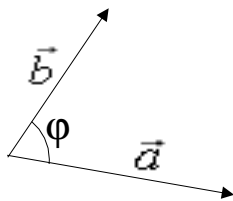
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Kahe vektori \vec{a} ja \vec{b} skalaarkorrutis $\vec{a} \cdot \vec{b}$ defineeritakse valemiga

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (1.8)$$

(kus φ on nurk vektorite \vec{a} ja \vec{b} vahel ($\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$) (Vt joonis). Nurga φ määramiseks tuleb \vec{a} ja \vec{b} kanda ühisesse alguspunkti, selle väärtus kuulub vahemikku $[0, \pi]$.

Skalaarkorrutis on seega eeskiri, mis seab vektorite paarile vastavusse kindla reaalarvu.



Joonis 3: Vektorid \vec{a} ja \vec{b} ning nendevaheline nurk φ

Skalaarkorrutist võib tähistada erinevalt - $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, (\vec{a}, \vec{b}) , $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

Skalaarkorrutise omadused:

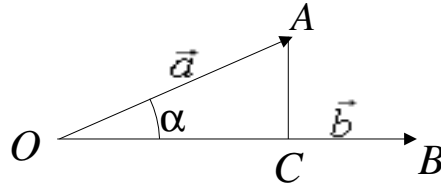
1. Skalaarkorrutis on kommutatiivne: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. Skalaarkorrutis on distributiivne: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
3. Assotsiatiivsus reaalarvulise teguri suhtes: $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\alpha$, kus α on skalaar.
4. Kui \vec{e} on ühikvektor, siis $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$.
5. Kui $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, siis on \vec{a} ja \vec{b} risti.
6. Kui $\vec{a} \parallel \vec{b}$, siis $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$.

Skalaarkorrutise omadused järelduvad otseselt tema definitsioonist (1.8)

Ülesanne 4 Näidata, et vektori \vec{a} projektsioon vektorile \vec{b} on $\vec{a} \cdot \vec{u}_{\vec{b}}$, kus $\vec{u}_{\vec{b}}$ on vektori \vec{b} suunaline ühikvektor ($\vec{u}_{\vec{b}} \uparrow \vec{b}$, $|\vec{u}_{\vec{b}}| = 1$).

Lahendus. Asetame vektorid \vec{a} ja \vec{b} ühisesse alguspunkti O . Nagu jooniselt näha, on vektori \vec{a} projektsiooniks vektori \vec{b} suunale ($\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$) vektor \vec{OC} , mille pikkus on ilmselt (vt joonist)

$$|\vec{OC}| = |\vec{a}| \cos \alpha = |\vec{a}| |\vec{u}_{\vec{b}}| \cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{u}_{\vec{b}}.$$



Joonis 4: Vektori \vec{a} projektsioon vektori \vec{b} suunale.

Vektorruumi ortonormeeritud baasiks on ühikvektorid, mis on omavahel risti. Kolmemõõtmelise ruumi korral tähistame ortonormeeritud (ON) baasi vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (levinud on ka tähistused $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ja $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), baasi ennast $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ või lühemalt $\{\vec{e}_i\}$. ON baasile vastavat koordinaadistikku nimetatakse **Descartes'i** (Cartesiuse) ristkoordinaadistikuks. Hiljem tutvume ka mõningate teiste koordinaatsüsteemidega.

ON baasi korral

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j, \end{cases} \quad (1.9)$$

kus δ_{ij} on **Kroneckeri (delta)-sümbol**, mis kirjeldab ühikmaatriksi koordinaate. Vektori koordinaate ON baasis $\{\vec{e}_i\}$ tähistame sama tähega nagu vektorit, lisades juurde indeksi:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \equiv a_i \vec{e}_i. \quad (1.10)$$

Ülaltoodud liitmisreegel (Einsteini liitmisreegel) - korrutatakse ühesuguste indeksitega liikmed ja siis summeeritakse - on matemaatikas ja füüsikas sageli kasutusel.

Alljärgnevas osas kasutame baasivektorite tähistustena $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

1.2. Vektorkorrutis.

Vektorite \vec{a} ja \vec{b} **vektor- ehk ristkorrutis** $\vec{a} \times \vec{b}$ on määratud järgmiste tingimustega:

1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, kus φ on \vec{a} ja \vec{b} vaheline nurk;
2. $\vec{a} \times \vec{b}$ on risti tegurvektoritega \vec{a} ja \vec{b} ;
3. Kolmik $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ on paremorienteeritud baasis parempoolne, vasakorienteeritud baasis vasakpoolne.

Paremorienteeritud baasis võib vektorid üles ehitada nõu parema käe reegli järgi. Kui võtame vektoribaasi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, siis hoides parema käe peopesa üleval - \vec{i} vastab väljasirutatud põidla suunale, \vec{j} ettesirutatud nimetisõrme suunale ning \vec{k} vastab ülessuunatud keskmise sõrme suunale (sõrmede suunad peaksid olema risti). Loomulikult võime kätt pöörata kuidas iganes soovi on, vektorite järjestus on sama. Analoogiliselt tuleks vasakorienteeritud baasi korral kasutada vasakut kätt: \vec{i} - põial; \vec{j} - nimetisõrm; \vec{k} - keskmine sõrm. Nii tuleb vektorkorrutise suuna määramiseks paremorienteeritud baasis vektorile \vec{a} vastavusse seada põial, \vec{b} -le nimetisõrm ning nende vektorite tasandiga risti on suunatud keskmine sõrm, mille suund vastab vektorkorrutise \vec{b} suunale.

Järeldusi:

1. Kui $\vec{a} \parallel \vec{b}$, siis $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

2. Vektorkorrutise moodul $|\vec{a} \times \vec{b}|$ on võrdne vektoritele \vec{a} ja \vec{b} ehitatud rööpküliliku pindalaga.
 3. ON baasi korral

$$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}, \quad \vec{i} = \vec{j} \times \vec{k}, \quad \vec{j} = \vec{k} \times \vec{i} \quad (1.11)$$

sõltumata baasi orientatsioonist.

Vektorkorrutise omadused:

1. antikommuteeruvus $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. assotsiatiivsus skalaarse teguri suhtes $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$;
3. distributiivsus liitmise suhtes $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$.

Vektorkorrutis koordinaatkujul on järgmine:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = (a_2b_3 - a_3b_2; -a_1b_3 + a_3b_1; a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ülesanne 5 Leida vektorite $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ja $\vec{b} = (3, 1, 2)$ vahelise nurga φ siinus.

Lahendus. Vektorkorrutise definitsioonist saame $\sin \varphi = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$. Kasutades seost (1.12), saame

$$\vec{a} \times \vec{b} = -8\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k}.$$

Arvestades, et suvalise vektori moodul $|\vec{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$, leiame

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{28}\sqrt{28}}{\sqrt{180}} = \sqrt{\frac{7}{45}}.$$

Ülesanne 6 Leida kolmnurga pindala, kui tema tippudeks on punkti $R = (a, b, c)$ ristprojektsioonid koordinaattelgedel.

Lahendus. Punkti R projektsioonid koordinaattelgedel on $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$, $C = (0, 0, c)$. Kolmnurga ABC pindala on avaldatav vektorite $\vec{AB} = (-a, b, 0)$ ja $\vec{AC} = (-a, 0, c)$ kaudu:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Valemist (1.12) saame $\vec{AB} \times \vec{AC} = (bc, ac, ab)$ ning seega

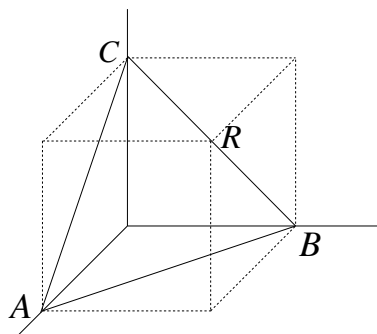
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + a^2b^2 + b^2c^2}.$$

1.3. Segakorrutis

Olgu meil antud kolm mittekomplanaarset vektorit \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} . Nende vektorite **segakorrutiseks** nimetatakse suurust $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Leiame reegli segakorrutise arvutamiseks. Vektorkorrutis

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$



Joonis 5: Telgedele ülesehitatud kolmnurk.

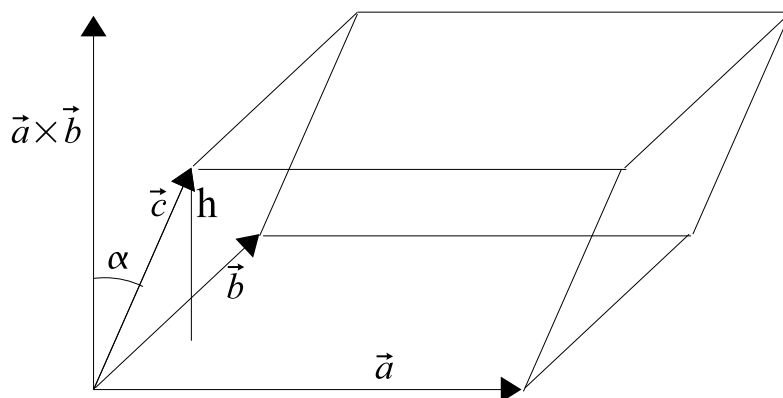
Kolme vektori segakorrutis ehk vektorite $\vec{a} \times \vec{b}$ ja \vec{c} skalaarkorrutis on seega

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.13)$$

Kolme vektori vektorkorrutis avaldub determinandina, mille ridadeks on vektorite koordinaadid. Komplanaarsete vektorite segakorrutis on null.

Kolme mittekomplanaarsele vektorile ülesehitatud rööptahuka ruumala avaldub nende vektorite segakorrutise absoluutväärtusega.

Näitame seda. Ühendame vektorid \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} ühisesse alguspunkti nagu näidatud järgmisel joonisel.



Joonis 6: Rööptahuka ruumala leidmine

Rööptahuka ruumala avaldub tema põhja pindala ja kõrguse korrutisena. Rööptahuka põhi on ehitatud üles vektoritele \vec{a} ja \vec{b} . Vastavalt vektorkorrutise definitsioonile on põhja pindala suuruselt võrdne $\vec{a} \times \vec{b}$, mis on põhjaga risti. Rööptahuka kõrgus h on arvuliselt võrdne $\cos \alpha |\vec{c}|$. Seega

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \alpha = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Näide. Leida rööptahuka ruumala, kui ta servadeks on vektorid $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 7\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

1.4. Polaarkoordinaadid. Silindrilised ja sfäärilised koordinaadid.

Tihti peale, kui on tegemist süsteemidega, mis on sfäärilised mingi punkti suhtes, kasutatakse ristkoordinaatide asemel polaarkoordinaate (2-mõõtmelises ruumis) või sfäärilisi koordinaate (3-mõõtmeline ruum). Juhul, kui 3-mõõtmelises ruumis on tegemist sümmeetriaga mingi telje suhtes, kasutatakse tihti silindrilisi koordinaate. Füüsikas on polaarkoordinaatide kasutamine tavaline näiteks, kui uuritakse

ja kirjeldatakse mingi telje ümber pöörlevaid kehasid. Sfääriliste koordinaatide abil (alltoodust pisut erinevad) kirjeldatakse näiteks tähtede asetust taevasfääril. Ka geograafias kasutatavad koordinaadid (pikkus- ja laiuskraadid) on teatav erijuht sfäärilistest koordinaatidest.

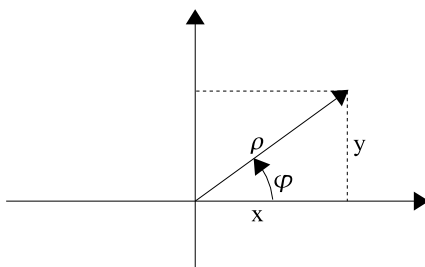
Vaatame esialgu punkti tasandil (2-mõõtmelises ruumis). Olgu meil punkt P koordinaatidega $P(x; y)$. Polaarkoordinaatides iseloomustavad seda punkti kaugus 0-punktist ehk polaarkaugus ρ , ning polaarnurk φ - nurk x -telje ja punkti P kohavektori vahel, seda loetakse kellaosuti liikumisele vastupidises suunas. Tavapäraselt antakse polaarnurk radiaanides. Seosed polaar- ja ristkoordinaatide vahel on järgmised:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.15)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{kui } x, y > 0 \quad \text{esimese veerandi nurk : } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{kui } x < 0, y > 0 \quad \text{teise veerandi nurk : } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{kui } x, y < 0 \quad \text{kolmanda veerandi nurk : } \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & \text{kui } x > 0, y < 0 \quad \text{neljanda veerandi nurk : } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.16)$$

Ülaltoodud üleminekuvalemid φ jaoks on antud nii nagu peaks toimima nagu enamuse taskuarvutitega arvutamisel. Tegelikult oleks ikkagi parem teha joonis ja selle pealt vaadata, kuhu punkt poeab tulema, millisesse vahemikku jääb φ ja hiljem valemite (1.14) abil tagasiminnes kontrollima, kas tulevad algsed ristkoordinaatides antud arvud tagasi.



Joonis 7: Üleminek ristkoordinaatidel polaarkoordinaatidele: polaarnurk φ ja polaarkaugus ρ

3D-ruumis kasutatakse tihti silindrilisi koordinaate (kujutatud joonisel 16). Silindrilisteks koordinaatideks on kaugus ρ , polaarnurk φ ja kõrgus z . Üleminekuvalemid:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.18)$$

Üleminekuvalemid silindrilistesse koordinaatidesse on samad, mis võrdustes (1.16) toodud, lisaks $z = z$.

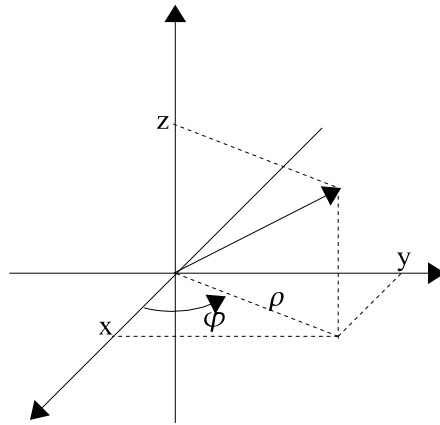
Näide. Avaldada funktsioon $u = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ polaarkoordinaatides.

Kasutame valemiteid (1.14): $u = \frac{2\rho \cos \varphi}{\rho^2} = \frac{2 \cos \varphi}{\rho}$.

Sfääriliste koordinaatide korral tuleb sisse kaugus koordinaatide alguspunktist r ning nurk θ - nurk punkti $P(x, y, z)$ kohavektori \vec{OP} ja z -telje vahel. Nurka θ hakatakse lugema z -teljest alates (suund kohavektori poole). $0 \leq \theta \leq \pi$.

Seosed rist- ja sfääriliste koordinaatide vahel:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$



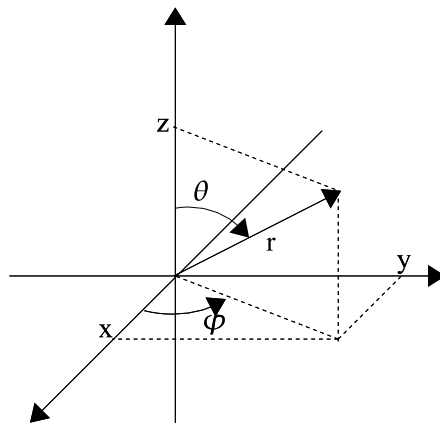
Joonis 8: Üleminek ristkoordinaatidelt silindrilistesse koordinaatidesse.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.19)$$

Nurga φ leidmiseks kasutatakse valemeid (1.16), θ leidmiseks:

$$\theta = \arccos \frac{z}{r}. \quad (1.20)$$

Ka siin tuleb arvutustel silmas pidada, et θ ei tuleks negatiivne (mõningate arvutite iseärasused arkuskoosinuse leidmisel, sellisel juhul peaks kasutama seost $\theta = \arccos \frac{z}{r} + \pi$).



Joonis 9: Üleminek ristkoordinaatidelt sfäärilistesse.

Näide. Avaldada punkti $A(-2, -3, 1)$ koordinaadid silindrilises ja sfäärilises koordinaadistikus. Silindrilistes koordinaatides:

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}, \quad \varphi = \arctan \frac{-2}{-3} + \pi = 3,72\text{rad}, \quad z = 1.$$

Seega $A(\sqrt{13}; 3,72\text{rad}; 1)$.

Sfäärilistes koordinaatides jääb φ samaks, st $\varphi = 3,72\text{rad}$.

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}, \quad \theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{14}} = 1,3\text{rad}.$$

Seega $A(\sqrt{14}; 3, 72\text{rad}; 1, 3\text{rad})$.

Näide. Avaldada funktsioon $u = \frac{2xy}{x^2 + y^2 + z^2}$ silindrilistes ja sfäärilistes koordinaatides.

Silindrilistes koordinaatides:

$$u = \frac{2\rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi}{\rho^2 + z^2} = \frac{\rho^2 \sin 2\varphi}{\rho^2 + z^2}.$$

Sfäärilistes koordinaatides:

$$u = \frac{2r \sin \varphi \sin \theta \cdot r \cos \varphi \sin \theta}{r^2} = \frac{r^2 \sin 2\varphi \sin^2 \theta}{r^2} = \sin 2\varphi \sin^2 \theta.$$

1.5. Lineaarsed süsteemid

Vaatame mõningaid näiteid rakenduste kohta.

Näide 1. Ühes laboripuuris (kastis) on kaht erinevat liiki putukaid. Neid toidetakse iga päev kaht eri liiki toiteainetega A ja B.

I liigi iga isend vajab 5 ühikut A-d ja 2 ühikut B-d.

II liigi iga isend vajab 2 ühikut A-d ja 4 ühikut B-d.

Kokku võib kulutada 900 ühikut A-d ja 960 ühikut B-d. Kui palju isendeid kummastki liigist võib kokku lasta, et ei tekiks toitanete puudu- ega ülejääk?

Lahendus: Olgu I liigi isendite arv x , teise liigi isendite arv y . Siis

Toitainet A: $5x + 2y = 900$, toitainet B: $2x + 4y = 960$. Ehk - oleme saanud kahest lineaarsest võrrandist koosneva süsteemi:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 900 \\ 2x + 4y = 960 \end{cases}$$

Antud ülesanne on suhteliselt lihtne, kuid selliseid võrrandeid võib olla tunduvalt rohkem. Tuleta meelde põhilised lahendusmeetodid ning läheme nende juurest keerukamate, kuid matemaatiliselt võimsamate (ning väiksemat arvutusmahtu nõudvate juurde).

Graafiline lahenduskäik.

See sobib, kui meil on kaks lineaarset võrrandit kahe tundmatuga.

Olgu

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

Joonistame vastavad sirged graafikule. Võttes esimeses $x = 0$, saame sirge lõikepunkti y -teljega: $y_1 = \frac{C_1}{B_1}$;

võttes $y = 0$, saame lõikepunkti x -teljega: $x_1 = \frac{C_1}{A_1}$. Analoogiliselt teise sirge lõikepunktid telgedega:

$(0; \frac{C_2}{B_2})$ ja $(\frac{C_2}{A_2}; 0)$. Teeme joonise. Jooniselt leiame võrrandisüsteemi lahendiks sirgete lõikepunkti $(x_0; y_0)$.

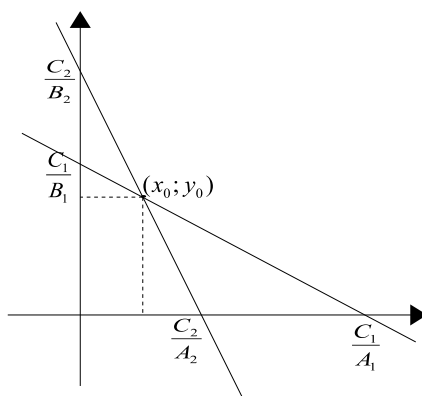
Näite 1 lahendamisel tuleb märkida, et antud ülesande lahendid ei tohi tulla negatiivsed - matemaatiliselt on negatiivsed lahendid lubatud, aga "terve mõistus" ei luba isendite arvuks negatiivset arvu.

Matemaatiliselt on võimalikud järgmised võimalused:

- 1) süsteemil leidub üks ühene lahend (vt näide 2.a);
- 2) süsteemil puuduvad lahendid - sirged on paralleelsed (näide 2.b);
- 3) süsteemil on lõpmata palju lahendeid - sirged langevad kokku (näide 2.c).

Näide 2.

$$\begin{array}{l} a) \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \\ b) \quad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases} \\ c) \quad \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -4x + 2y = -8 \end{cases} \end{array}$$



Joonis 10: Kahe tundmatuga võrrandi lahendamine graafilisel meetodil.

Graafiline meetod on hea just lahenduse illustreerimiseks, samas sobib ka mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks.

Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamiseks võib kasutada järgmisi meetodeid:

- 1) lahendamine asendusmeetodiga;
- 2) Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine determinantide abil;
- 3) süsteemi viimine ekvivalentsele süsteemile.

Vaatame viimast lahendusmeetodit näite abil. Näide 3.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y = 8 & R1 & (\text{rida1}) \\ 2x + 4y = 5 & R2 & (\text{rida2}). \end{array}$$

Eesmärk - elimineerida ühest neist võrranditest x või y . Korrutame esimese rea 2-ga: $2 \cdot R_1$ ja teise -3 -ga: $-3 \cdot R_2$ ja liidame võrrandid kokku:

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot R_1 : & 6x + 4y = 16 \\ -3 \cdot R_2 : & -6x - 12y = -15. \\ & -8y = 1 \end{array}$$

Saime uue süsteemi:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -8y = 1 \end{cases}$$

Teisest võrrandist saame $y = -\frac{1}{8}$. Asendades selle tulemuse esimesse, saame $x = \frac{11}{4}$.

Märkus: Oluline, et uus võrrandisüsteem on nn kolmnurkkujul ehk kujul

$$\begin{cases} *x + *y = * \\ *y = * \end{cases}$$

1.6. Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine

Vaatame m võrrandist koosnevat süsteemi

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (1.21)$$

Märkus: n muutuja leidmiseks on meil vaja n võrrandit, kuid tegelike ülesannete lahendamisel võib neid olla rohkem või vähem.

Võrrandisüsteemide (1.21) korral on kindel meetod just süsteemi viimine kolmnurkkujule, ekvivalentsele süsteemile. Selleks võime kasutada järgmisi teisendusi:

1. Korrutada võrrandit nullist erineva konstandiga.
2. Liita üht võrrandit teisele.
3. Vahetada võrrandite järjekorda.

See on Gaussi elimineerimismeetod.

Nagu ka kahe muutujajaga süsteemide korral, on siingi 3 võimalust:

- süsteemil leidub täpselt üks lahend;
- lahendid puuduvad - süsteem on vastuoluline;
- süsteemil on lõpmata palju lahendeid.

Näide 4.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 5y - z = 10 & R_1 & \\ 2x - y + 3z = 9 & R_2 & \\ 4x + 2y - 3z = -1 & R_3 & \end{array}$$

Viime süsteemi kolmnurkkujule.

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot R_1 & 6x + 10y - 2z = 20 & \\ -3 \cdot R_2 & -6x + 3y - 9z = -27 & \end{array}$$

Saame

$$13y - 11z = -7$$

Nüüd

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot R_2 & 4x - 2y + 6z = 18 & \\ -R_3 & -4x - 2y + 3z = 1 & \end{array}$$

Liites need kaks võrdust kokku, saame $-4y + 9z = 19$. Kokkuvõttes oleme saanud:

$$\begin{array}{rcl} R_1 & 3x + 5y - z = 10 & R_4 \\ 2R_1 - 3R_2 & 13y - 11z = -7 & R_5 \\ 2R_2 - R_3 & -4y + 9z = 19 & R_6 \end{array}$$

Teeme järgmised tehted:

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot R_5 & 52y - 44z = -28 & \\ 13 \cdot R_6 & -52y + 117z = 247 & \end{array}$$

Kahe viimase võrrandi kokkuliitmisel saame $73z = 219$. Kokkuvõttes oleme algse võrrandisüsteemi viinud ekvivalentsele kolmnurkkujule:

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = 10 \\ 13y - 11z = -7 \\ 73z = 219 \end{cases}$$

Siit saame $x = 1, y = 2, z = 3$.

Näide 5. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{array}{rcl} 2x - y + z = 3 & R_1 & \\ 4x - 4y + 3z = 2 & R_2 & \\ 2x - 3y + 2z = 1 & R_3 & \end{array}$$

Esimene samm $R_4 = R_1$ jääb samaks, $R_5 = 2R_1 - R_2$, $R_6 = R_1 - R_3$. Teine samm $R_7 = R_5 - R_6$:

$$\begin{array}{rcl} 2x - y + z = 3 & & \\ 2y - z = 4 & & \\ 0z = 2 & & \end{array}$$

St - lahendid puuduvad, süsteem on vastuoluline. Näited geomeetriast - tasandid ja nende lõikepunktid.

2. Maatriksid

2.1. Maatriksid. Võrrandisüsteemi lahendamine maatriksite abil.

Kuigi võrrandisüsteemi lahendamisel, st viimisele kolmnurkkujule tegime tehteid võrranditega, siis tegelekult tegelesime vaid kordajatega a_{ij} ja b_k .

Definitsioon. Maatriks on arvude esitus ristkülikukujulise tabelina:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Maatriksi elemendi a_{ij} esimene indeks on reaindeks, teine veeruindeks. Maatriks A on $m \times n$ - maatriks - kokku m veergu ning n rida. Kui $m = n$, nimetatakse maatriksit *ruutmaatriksiks*. $m \times 1$ -maatriksit nim *veerumaatriksiks*; $1 \times n$ -maatriksit *reamaatriksiks*.

Matemaatikas kasutatakse tihti vektori esitusi veerumaatriksi (veeruvektorina). Näiteks 3×1 -maatriksit

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ võime nimetada veeruvektor.}$$

Ruutmaatriksi diagonaalil paiknevaid elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn}$ nimetatakse *diagonaalelementideks*.

Võrrandisüsteemi (..) lahendamiseks maatriksite abil kasutatakse nn laiendatud maatriksit.

Võrrandisüsteemi muutujate kordajate a_{ij} maatriksit laiendatakse vabaliikmete veeruga:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} \dots a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Näide. Vaatame, kuidas toimub näites 4 esitatud võrrandisüsteemi lahendamine maatriksite abil.

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = 10 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

Antud võrrandisüsteemile vastav laiendatud maatriks on järgmine:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$$

Meie eesmärgiks on viia ülaltoodud maatriks kolmunurkkujule nii, et allpool diagonaali olevad elemendid oleksid nullid..

$$\begin{matrix} R_1 \\ 2R_1 - 3R_2 \\ 2R_2 - R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 13 & -11 & -7 \\ 0 & -4 & 9 & 19 \end{array} \right) \begin{matrix} R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} R_4 \\ R_5 \\ 4R_5 + 13R_6 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 13 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & 73 & 219 \end{array} \right)$$

Maatriksi viimasest reast saab nüüd taas leida, et $z = 3$ jne.

Üldiselt võib võrrandeid olla vähem kui muutujaid. Sel juhul räägitakse *alamääratud* süsteemist, kuigi ka see võib olla vastuoluline. Üldjuhul on alamääratud süsteemil lahendeid lõpmata palju. Kui muutujaid on rohkem kui võrrandeid, on tegemist *ülemääratud* süsteemiga. Ülemääratud süsteem on tavaliselt on vastuoluline - lahendid puuduvad.

Näide. Lahendada alamääratud süsteem:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

Koostame laiendatud maatriksi

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array} \\ R_1 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

Saame süsteemi:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ 3y - 2z = -1 \end{cases}$$

Teisest võrdusest saame: $y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z$. Asendades selle esimesse võrdusesse saame $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}z$. Vastuse võibki nende kahe võrrandi süsteemina välja kirjutada. Tihti aga esitatakse see parameetri $z = t$ abil:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}t \\ y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathcal{R}.$$

2.2. Põhilised tehted maatriksitega.

Definitsioon. Olgu $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ kaks $m \times n$ maatriksit. Siis $A = B$ parajasti siis, kui $a_{ij} = b_{ij}$.

St kaks maatriksit on omavahel võrdsed parasjagu siis, kui nende kõik vastavad elemendid on võrdsed.

Definitsioon. Olgu A ja B kaks $m \times n$ maatriksit. Siis nende summaks on maatriks $C = A + B$, mis on $m \times n$ maatriks, mille elemendid $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Maatriksite liitmisel on kaks omadust: 1. $A + B = B + A$

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.

0-maatriksiks nimetatakse maatriksit, mille kõik elemendid on võrdsed 0-ga. Seega $A + \mathbf{0} = A$.

Definitsioon. Olgu $\alpha \in \mathcal{R}$ skalaarid (reaalarvud antud juhul). Skalaari korrutis $m \times n$ -maatriksiga A on siis maatriks $C = \alpha A$ elementidega

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}. \quad (2.2)$$

Näide. Leida $D = A + 2B - 3C$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 & 3 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 1 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 & 0 + 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -15 \end{pmatrix}.$$

Definitsioon. Olgu $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ -maatriks. Siis maatriksi A *transponeeritud* maatriksiks A^T on $n \times m$ -maatriks elementidega $a_{ij}^T = a_{ji}$.

St, transponeeritud maatriksi saame, kui vahetame algse maatriksis read ja veerud ära.

Näide: Olgu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Siis $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Definitsioon. Olgu A $m \times k$ -maatriks ning B $k \times m$ -maatriks. Siis maatriksite A ja B korrutis $C = A \times B$ on $m \times m$ -maatriks elementidega

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} \equiv \sum_{l=1}^k a_{il}b_{lj}$$

Näide.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Kuivõrd A on 2×3 -maatriks ning B on 4×2 korda maatriks, siis $A \cdot B$ ei eksisteeri. Kuid $C = B \cdot A$ on 4×3 -maatriks.

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2 \cdot 1 + 0 \cdot -1 = 2 \\ c_{12} &= 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4 \\ c_{13} &= 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 = -6 \\ c_{21} &= -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -4 \\ c_{22} &= -1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = -2 \\ c_{23} &= -1 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 15 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\text{St } C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -4 & -2 & 15 \\ -1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Seega - maatriksite korrutamisel on järjekord oluline. Üldjuhul $A \cdot B \neq B \cdot A$, isegi kui mõlemad on $m \times m$ -ruutmaatriksid.

2.3. Determinandid

Determinant on teatav arv või funktsioon, mis seatakse vastavusse ruutmaatriksile. St, vaid ruutmaatriksil saab leida determinandi. Olgu meil antud 2×2 -maatriks A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Selle maatriksi determinandiks nimetatakse suurst:

$$\det A \equiv |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2.3)$$

3×3 -maatriksi determinant on leitav järgmiselt. Olgu meil maatriks B elementidega:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Selle maatriksi determinant on arvutatav järgmise valemiga:

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} = \quad (2.4)$$

$$= b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31}. \quad (2.5)$$

Nagu nähtub 3-realise determinandi arvutamise avaldisest (2.4), on see leitav kaherealiste determinantide abil: esimese rea elemendid korrutatakse leijäänud ridade elementidest moodustatud alamdeterminandiga. Selliselt saab arvutada ka suuremate ridade arvuga determinandid. Idvalemina võib kirjutada:

$$\begin{aligned} \det C &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & \dots & c_{3n} \\ \dots & & & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & c_{n4} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = c_{11} \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} & c_{24} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & & \\ c_{n2} & c_{n3} & c_{n4} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} - \\ &- c_{12} \begin{vmatrix} c_{21} & c_{23} & c_{24} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & & \\ c_{n1} & c_{n3} & c_{n4} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} + c_{13} \begin{vmatrix} c_{21} & c_{21} & c_{24} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n4} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} - \\ &- c_{14} \begin{vmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Seejuures kõik väiksemat järku determinandid saab arvutada taas nende alamdeterminantide kaudu.

Lineaarseid võrrandisüsteeme on võimalik lahendada ka determinantide abil. Kuid seda vaid juhul, kui võrrandisüsteemis on võrrandite arv võrdne tundmatute arvuga. Konkreetsuse mõttes anname üldvalemi 3-st võrrandist koosneva võrrandisüsteemi lahendamiseks. Olgu meil järgmine süsteem:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Moodustame järgmised determinandid. Esmalt - determinant muutujate ees olevatest kordajatest:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

Teised determinandid moodustame determinandist D nii, et asendame esimese, teise või kolmanda veeru võrrandisüsteemi (2.7) vabaliikmetega:

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ D_y &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \\ D_z &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi (2.7) lahendid on siis leitavad järgmiselt:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}. \quad (2.9)$$

Juhul, kui $D = 0$, siis lahendid puuduvad.

2.4. Pöördmaatriksid. Maatriksvõrrandid.

Kasutades maatrikseid, võime võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.10)$$

lühemal kujul kirja panna järgmiselt:

$$AX = B,$$

kus A on muutujate kordajate maatriks ($m \times n$), X on muutujate maatriks ($n \times 1$), vahel nimetatakse ka n -mõõtmeliseks vektoriks), B on vabaliikmete maatriks ($m \times 1$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Näitame, kuidas pöördmaatrikseid kasutatakse võrrandisüsteemide lahendamisel. Olgu meil võrrandisüsteem esitatud maatrikskujul

$$AX = B$$

Eeldame, et muutujate maatriks A on ruutmaatriks (võrrandisüsteemis on võrrandeid samapalju kui muutujaid). Sellisel juhul võime leida maatriksi A pöördmaatriksi ning võrrandisüsteemi lahendi esitada pöördmaatriks abil.

Näide. Olgu meil tegemist 1 muutujaga võrrandiga: $5x = 10$. St, muutujate maatriks $A = 1$ on 1×1 -maatriks.

$$\begin{aligned} 5x &= 10 & | & \times 5^{-1} \\ 5^{-1} \cdot 5x &= 5^{-1} \cdot 10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Analoogiliselt saaksime võrrandisüsteemi jaoks $X = A^{-1} \cdot B$, kus A^{-1} on maatriksi A pöördmaatriks. (5^{-1} on 5 pöördväärtus).

Definitsioon. Olgu maatriks $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ -ruutmaatriks. Kui leidub selline $n \times n$ -korda maatriks B , et

$$AB = BA = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

siis nimetatakse maatriksit $B = A^{-1}$ maatriksi A pöördmaatriksiks.

Maatriksi I_n , mille diagonaalelemendid on võrdsed 1-ga ja ülejäänud 0-ga, nim ühikmaatriksiks. Kui $A^{-1} = A$, siis nimetatakse seda maatriksit mittesingulaarseks, vastasel juhul singulaarseks.

Pöördmaatriksi omadused:

- 1) pöördmaatriksi pöördmaatriks on võrdne esialgse maatriksiga: $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$n = 2$ korral on pöördmaatriksi leidmine suhteliselt lihtne. Olgu maatriks elementidega $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Saab näidata, et sellise maatriksi pöördmaatriks on järgmine:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Näide. Olgu $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\det A = 2(-1) - 2 \cdot 3 = -8. \text{ Seega } A^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,25 \\ 0,375 & -0,25 \end{pmatrix}.$$

Kui maatriksi dimensioon n on suurem, on pöördmaatriksi leidmine keerukam. Üldvalemi ja pikema asjakohase käsitluse antud teemal võib leida näiteks G. Kangro raamatus "Analüütiline algebra."

Näitame, kuidas leida 3×3 -maatriksi pöördmaatriksit näite varal.

Näide. Leida maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks.

Lahendus. Kasutame pöördmaatriksi leidmiseks laiendatud maatriksit, mille vasakul poolel on maatriks A ning paremal ühikmaatriks. Seejärel hakkame teisendama maatrikseid nii, et vasakul poolel olevast maatriksist saaksime ühikmaatriksi. Pöördmaatriks ilmub siis laiendatud maatriksi paremale poolele.

$$L = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

Nüüd hakkame tegelema algebralisi tehteid, alustades sellest, et viime vasakul asuva maatriksi kolmnurkkujule (allpool diagonaali asuvad nullid).

$$\begin{array}{l} R_1 \\ 2R_1 - R_2 \\ R_1 + R_3 \\ R_4 - R_5 \\ -R_5 \\ R_6 \\ R_7 + R_9 \\ 2R_8 + 3R_9 \\ -\frac{1}{2}R_9 \\ R_{10} \\ \frac{1}{2}R_{11} \\ R_{12} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \\ R_{12} \end{array}.$$

Seega

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vaatame antud näite täiendusena, kuidas lahendada võrrandisüsteemi

$$\begin{array}{rcl} x - y - z & = & 2 \\ 2x - y + z & = & 0 \\ -x + y - z & = & 3 \end{array}$$

Maatriksite abil võime kirjutada selle järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kasutades muutujatemaatriksi A pöördmaatriksit, mille äsja leidsime, võib võrrandisüsteemi lahendi leida järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}.$$

Kirjutades teisiti: $x = 3$, $y = 3,5$, $z = -2,5$.

2.5. Rakendused. Leslie maatriks.

Leslie maatriksit kasutatakse bioloogiliste populatsioonide kirjeldamisel juhul, kui populatsioon paljuneb nõ diskreetsetel perioodidel, mitte pidevalt. Näiteks taimedel on kasvu- ja paljunemisperiood kevadest sügiseni, paljud loomad paljunevad kord aastas. Sellised mudelid on nn diskreetse aja mudelid.

Vaatame lihtsaimat mudelit. Mõõdame aega põlvkondades (paljunemisperioodides). Olgu populatsiooni suurus ajal t $N(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Piiramatu kasvu korral

$$N(t+1) = RN(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

R näitab, mitu isendit on järgmises põlvkonnas eelmise põlvkonna ühe isendi kohta (iive ühe isendi kohta, inimpopulatsioonis kasutatakse tavaliselt juurdekasvu 1000 inimese kohta). Siis

$$\begin{aligned} N(1) &= RN(0) \\ N(2) &= RN(1) = R^2N(0) \\ N(3) &= R^3N(0) \\ N(t) &= R^tN(0) \end{aligned}$$

Vrdl radioaktiivse aine lagunemine (eksponentsiaalne kahanemine) ja populatsiooni eksponentsiaalne kasv: $N = N_0e^{-\lambda t}$, $n = n_02^t$ jne. Erinevuseks neist funktsionaalsetest sõltuvustest on siin diskreetne aeg. R kirjeldab populatsiooni suhtelist muutust ühe generatsiooni (ajaperioodi) jooksul.

Enamuse liikide korral on viljakus sõltuv isendi vanusest. Mõned liigid paljunevad korra elu jooksul, mõned mitmeid kordi. Seega võib R sõltuda populatsiooni vanuselisest koostisest. Seda võimaldavad Patrick Leslie poolt 1945. a. välja töötatud diskreetse aja vanuselisel struktureeritud mudelid - maatriksmudelid, mis võimaldavad kasutada tabeleid mitmete oluliste demograafiliste suuruste leidmiseks. Võime leida näiteks iga vanusega isendite arvukuse, populatsiooni kasvu kiiruse jne. Antud meetodit kasutatakse näiteks bioloogias, elukindlustuses jm.

Näide. Lihtsuse mõttes vaatame vaid emaste isendite populatsiooni (võime arvestada, et mõlemast soost isendeid on sama palju iga vanuse kohta, seega isendite koguarvu saamiseks peame korrutame siin kasutatava arvu N kahega). Need isendid, kes sünnivad selle perioodi ajal on vanusega 0. Selliste isendite arvukus ajal t on $N_0(t)$. Kui see isend elab järgmise perioodi lõpuni, siis on ta aastane jne. Eeldame, et üle 3 aasta (ajaperioodi) vanaks ei ela ükski isend. Seega võime populatsiooni emaste isendite vanuselise jaotust kirjeldada järgmise vektoriga:

$$N(t) = \begin{pmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{pmatrix}.$$

Oletame, et N_0 -st elab järgmise perioodi üle 40% emastest isenditest, N_1 -st 30% ja N_2 -st 10%. St $N_1(t+1) = 0,4N_0(t)$; $N_2(t+1) = 0,3N_1(t)$; $N_3(t+1) = 0,1N_2(t)$.

Vastsündinud emaste arvukus sõltub sündide arvust igas põlvkonnas. Eeldame, et iga 1-vanusega emase isendi kohta sünnib 2 emast isendit, 2-vanusega kohta 1,5 ning iga 3-vanuselise kohta 1 isend (sekuaalne küpsus saavutatakse ühe ajaperioodi (aastaga)). Seega $N_0(t+1) = 2N_1(t) + 1,5N_2(t) + N_3(t)$. Kokkuvõttes

$$\begin{pmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 1 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{pmatrix}.$$

Ehk $N(t+1) = LN(t)$. Maatriksit L , millega korrutatakse maatriksit $N(t)$ nimetatakse Leslie maatriksiks.

Olgu meil alguses vanuseline jaotus järgmine: $N_0(t) = 1000$, $N_1(t) = 200$, $N_2(t) = 100$, $N_3(t) = 10$. Siis järgmise põlvkonna vanuseline koosseis:

$$\begin{pmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 1 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 200 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1000 + 2 \cdot 200 + 1,5 \cdot 100 + 1 \cdot 10 \\ 0,4 \cdot 1000 \\ 0,3 \cdot 200 \\ 0,1 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 560 \\ 400 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Analoogiliselt saame leida sellele järgneva põlvkonna vanuselise koosseisu:

$$\begin{pmatrix} N_0(t+2) \\ N_1(t+2) \\ N_2(t+2) \\ N_3(t+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 1 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 560 \\ 400 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 224 \\ 120 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Üldjuhu jaoks võime Leslie maatriksi välja kirjutada järgmiselt. P_i näitab, kui suur osa i -vanuselitest (emastest) isenditest elab järgmise perioodi lõpuni. $0 \leq P_i \leq 1$. Vastsündinute ehk 0-vanuseliste arvukuse leiame järgmiselt: $N_0(t+1) = F_0N_0(t) + F_1N_1(t) + F_2N_2(t) + \dots$, kus F_i näitab mitu järglast tuleb i -vanuseliste (emaste) isendite kohta keskmiselt. Leslie maatriks on siis järgmine:

$$L = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{m-1} & F_m \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{m-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6. Bioloogilise populatsiooni stabiilne ajaline jaotus

Leslie maatriksi abil saab leida ka vanuselise jaotuse pika aja jooksul. Täpsemalt saab analüüsida seda, mis juhtub populatsiooni arvukusega pika aja möödumisel, Leslie maatriksi omaväärtuste ja omavektorite abil (vt järgmine alapunkt). Siinkohal mõned üldisemad selgitused.

Olgu $N(0) = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ ning $L = \begin{pmatrix} 1,5 & 2 \\ 0,08 & 0 \end{pmatrix}$. St, arvestame vaid 0- ja 1-vanuseliste isenditega, vanemaks isendid ei ela või on ülejäänute arvukus tühiselt väike ja võib arvestamata jätta (ei paljune ka).

Arvutame välja mitme järgneva põlvkonna populatsiooni arvukuse vektorid ja uurime, kas leidub mingi matemaatiline seaduspärasus, millega saab erinevaid põlvkondi võrrelda ja iseloomustada.

$N(t+1) = LN(t)$. Seda arvestades saame

$$\begin{pmatrix} N_0(1) \\ N_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 2 \\ 0,08 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1500 + 2000 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3500 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} N_0(2) \\ N_1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 2 \\ 0,08 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3500 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5410 \\ 280 \end{pmatrix}$$

Sedaviisi jätkates saame järgmise populatsioonivektorite rea:

$$\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3500 \\ 80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5410 \\ 280 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8680 \\ 430 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13800 \\ 690 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22210 \\ 1110 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 35530 \\ 1780 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 56850 \\ 284 \end{pmatrix}, \dots$$

Võrdleme järgnevate põlvkondade samavanuseliste isendite populatsioone, st leiame suurused

$$q_0 = \frac{N_0(t+1)}{N_0(t)}, \quad q_1 = \frac{N_1(t+1)}{N_1(t)}.$$

Saame: $q_0^0 = \frac{3500}{1000} = 3,5$; $q_0^1 = \frac{5410}{3500} = 1,55$; $q_0^2 = 1,6, \dots$, st oleme saanud järgmise jada: $q_0 : 3,5; 1,55; 1,60; 1,599; 1,601; \dots$. Antud jada piirväärtus on ilmselt $q_0 \rightarrow 1,6$. Analooiliselt saame ka $q_1 \rightarrow 1,6$ kui vaatleme populatsiooni arvukust paljude paljunemisperioodide järel. Kordaja $q = 1,6$ näitab, et kui aega on läinud algusest piisavalt palju mööda, võime arvestada seaduspärasusega: $N_i(t+1) = qN_i(t)$, st igas järgnevas põlvkonnas kasvab i -vanuseliste arv eelmise põlvkonnaga võrreldes q korda.

Leslie maatriksi abil saame leida ka selle, kuidas kujuneb vanuseline jaotus mingil ajahetkel. Selleks leiame mingi vanusega isendite arvu ja isendite koguarvu suhte. Olgu see

$$p_0(t) = \frac{N_0(t)}{N_0(t) + N_1(t)}$$

Pärast arvutusi saame järgmise jada: $p : 0,5; 0,977; 0,9508; 0,9528; \dots; 0,9524; \dots \rightarrow 0,952$. Seega aja kasvades läheneb populatsioon sellisele piirile, mille korral 0-vanuseliste isendite hulk moodustab isendite koguhulgast 95,2%. Samamoodi tuleb $p_1(t) = \frac{N_1(t)}{N_0(t) + N_1(t)} \rightarrow 0,048$, st 1-vanuseliste arv moodustab 4,8% isendite koguarvust.

Antud meetod ei tööta alati. Kui algne populatsiooni arvukuse vektor on väga eriline, siis ei pruugi q_i ja p_i koonduda, st antud populatsiooni ei pruugi muutuda stabiilse jaotusega populatsiooniks. Stabiilse jaotuse korral on populatsiooni lihtsam iseloomustada Leslie maatriksi omavektorite ja omaväärtuste abil.

2.7. Lineaarsed teisendused. Omavektorid. Omaväärtused

Vaatame teisendusi $X \rightarrow AX$. Lihtsuse mõttes kasutame antud alapunktis ja järgnevates alapunktides vaid 2-realisi matrikseid. X on 2×1 -matriks ehk (veeru)vektor, A on 2×2 -(ruut)matriks. Lineaarsetel teisendustel on järgmised omadused:

- 1) $A(X + Y) = AX + AY$;
- 2) $A(\lambda X) = \lambda AX$, kus $\lambda \in \mathcal{R}$ (üldjuhul võib λ ka kompleksarv olla).

Kui $A = I \equiv I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, siis teisendus $X \rightarrow IX$ kujutab endast identset teisendust - matriksi A rakendamisel vektorile X (ehk matriksite I ja X korrutamisel) saame tulemuseks algse vektori:

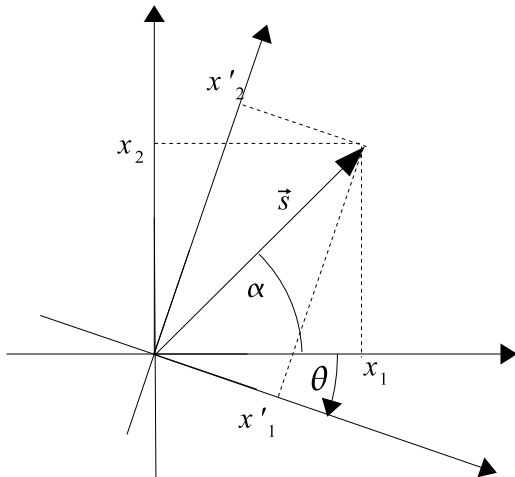
$$IX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Kui $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, siis $AX = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{pmatrix}$.

2.7.1. Koordinaattelgede pööre

Lineaarsete teisenduste näitena vaatame esmalt geomeetriliste vektorite koordinaatide teisendust koordinaattelgede pöördel. Vaatame (rist)koordinaatsüsteemi K ja selles punkti S kohavektorit koordinaatidega $\vec{s} = (x_1; x_2)$. Teostame nüüd koordinaatsüsteemi pöörde nurga θ võrra päripäeva ja vaatame, milliste seoste abil saab vektori \vec{s} koordinaate arvutada uues koordinaatsüsteemis K' .

NB! *Vektorimärgi vektorile kirjutame vaid siis, kui tegemist on geomeetriliste vektoritega 2- või 3-mõõtmelises ruumis, üldistatud juhul vektorimärki ei kirjutata.*



Matemaatikast ja füüsikast on teada, et sellist pööret saab kirjeldada nn pöördemaatriksi abil:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Pöördemaatriksi determinant on 1. Pöördemaatriksi rakendamisel vektorile \vec{s} saame vektori koordinaadid uues koordinaatsüsteemis:

$$R\vec{s} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Uurime, kuidas näevad välja kohavektori \vec{s} koordinaadid uues süsteemis polaarkoordinaatides. Vanas süsteemis: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix}$. Uude süsteemi üleminekuks rakendame pöördemaatriksit:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\ r(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta + \alpha) \\ r \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix}.$$

Koordinaatsüsteemi pöördel nurga θ võrra päripäeva, tuleb pöördemaatriksis θ ees märk ära vahetada. Analoogiliselt ülaltoodud juhuga koordinaatsüsteemi pöörde korral 2-mõõtmelises ruumis, võime kirjutada ka pöördemaatriksi 3-ruumi jaoks. Näiteks pöördemaatriksid, mis kirjeldavad pööret ümber x_3 (z)-telje ja x_2 (y)-telje on järgmised:

$$R_{x_3} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{x_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Samamoodi võime kirjutada välja ka pöördemaatriksi pöördeks ümber x_1 -telje. Kõigil neil juhtudel on pöördeteisendust kirjeldava maatriksi determinant 1.

2.7.2. Omaväärtused. Omavektorid

Vaatame maatriksvõrrandit

$$A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}, \tag{2.12}$$

kus A on 2×2 -maatriks ning \mathbf{X} on 2×1 -maatriks ehk vektor. Sellist vektorit, mis rahuldab võrrandit (2.12) nimetatakse maatriksi A **omavektoriks**, suurusi λ nimetatakse maatriksi **omaväärtusteks**. Omavektoreid tähistame siin \mathbf{u}_1 ja \mathbf{u}_2 .

Leiame maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ omaväärtused ning seejärel omavektorid. Lähtume võrrandist (2.12) ja arvestame, et ühikmaatriksi I korrutamisel vektoriga \mathbf{X} , saame tulemuseks vektori \mathbf{X} , st vektor teisendub iseendaks:

$$I\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}.$$

Seda arvestades saame võrrandist (2.12):

$$A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{X} - \lambda\mathbf{X} = 0 \quad \text{ehk} \quad A\mathbf{X} - \lambda I\mathbf{X} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\mathbf{X} = 0.$$

Viimane võrrand on homogeenne võrrand (võrrandi parem pool on 0) tundmatu vektori \mathbf{X} (ehk võrrandisüsteem selle vektori koordinaatide x_1, x_2) jaoks. Sellisel võrrandil leidub nullist erineva lahend vaid siis, kui kordaja (kordajate determinant) on 0. St $A - \lambda I = 0$ ehk $\det(A - \lambda I) = 0$. Et

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix},$$

siis saame võrrandi:

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel saame $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$.

Kummalegi omaväärtusele vastab üks omavektor. Leiame need.

1) $\lambda_1 = -1$.

$$A\mathbf{X} = -1 \cdot \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Kirjutades selle välja tavalise võrrandisüsteemina, saame

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = -x_2 \end{cases}$$

Nii esimesest kui ka teisest võrrandist saame $x_2 = -x_1$. Seega võime ise ette valida x_1 väärtuse ja selle järgi leida x_2 väärtuse (nulli ei või valida, siis on tulemuseks nn triviaalne lahend - nullvektor). Valime

$x_1 = 1$, siis $x_2 = -1$. Seega esimene omavektor on $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Samamoodi oleksime võinud erinevate

x_1 valikute puhul saanud omavektoriteks $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, 1 \\ -0, 1 \end{pmatrix}$ jne).

2) $\lambda_2 = 4$. Analoogiliselt eelmise juhuga saame nüüd maatriksvõrrandi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4x_2 \end{cases}$$

Siit $2x_2 = 3x_1$. Võttes $x_1 = 2$, tuleb $x_2 = 3$; $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

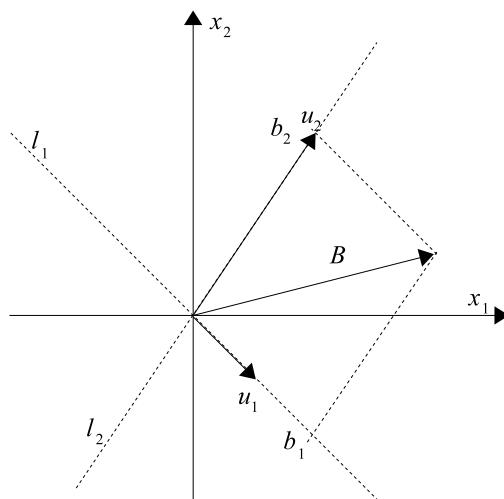
Omavektorid määravad ära kaks sihijoont l_1 ja l_2 , mis on invariantseid teisenduse $X \rightarrow AX$ suhtes selles mõttes, et võttes punkti X sel joonel, saame teisenduse $X \rightarrow AX$ läbiviimisel punkti sellelsamal joonel (üldjuhul mitte sama punkti).

Omavektorid on lineaarselt sõltumatud. St, ei leidu sellist arvu $\alpha \neq 0$, et $\mathbf{u}_1 = \alpha \mathbf{u}_2$. Teisalt saab iga vektori \mathbf{B} avaldada omavektorite \mathbf{u}_1 ja \mathbf{u}_2 lineaarkombinatsioonina, st $\mathbf{B} = b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2$. Olgu $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, siis

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Siit saame kordajate b_1 ja b_2 jaoks võrrandisüsteemi: $\begin{cases} b_1 + 2b_2 = 4 \\ -b_1 + 3b_2 = 1 \end{cases}$, mille lahendamisel tulevad kordajad järgmised: $b_1 = 2$; $b_2 = 1$.

Maatriksi A omavektorid, sihijooned ning vektori \mathbf{B} graafiline kujutamine omavektorite lineaarkombinatsioonina on toodud joonisel 4.



Joonis 11: Maatriksi A omavektorid $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ ja omavektorite sihijooned l_1, l_2 . Vektori \mathbf{B} avaldamine omavektorite lineaarkombinatsioonina.

Järgnevalt vaatame, kuidas avaldub teisendus $A^{10}\mathbf{B}$ omavektorite ja omaväärtuste abil. Alustame teisendusest $A^2\mathbf{B}$ ning kasutame seejuures lineaarse teisenduse omadusi ja omavektori definitsiooni (2.12) ($A\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$):

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{B} &= A^2(b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2) = A(A(b_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \mathbf{u}_2)) = A(b_1(A\mathbf{u}_1) + b_2(A\mathbf{u}_2)) = \\ &= A(b_1 \lambda_1 \mathbf{u}_1 + b_2 \lambda_2 \mathbf{u}_2) = b_1 \lambda_1 A\mathbf{u}_1 + b_2 \lambda_2 A\mathbf{u}_2 = b_1 \lambda_1^2 \mathbf{u}_1 + b_2 \lambda_2^2 \mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

Analoogiliselt tuleneb $A^n \mathbf{B} = b_1 \lambda_1^n \mathbf{u}_1 + b_2 \lambda_2^n \mathbf{u}_2$.

Arvestades nüüd maatriksi A omavektoreid, omaväärtusi ning leitud suurusi b_1 ja b_2 , saame

$$A^{10}\mathbf{B} = 2(-1)^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot 4^{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 4^{10} \cdot 2 \\ 2(-1) + 4^{10} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2097154 \\ 3145726 \end{pmatrix}.$$

Näide. Isendite populatsioon on selline, et iga 0-vanuselise isendi kohta on keskmiselt 1,5 järglast, iga 1-vanuselise kohta keskmiselt 2 järglast. 0-vanuselistest elab järgmise paljunemisperioodi lõpuni umbes

8% isenditest, 2. perioodi lõpuni ei ela ükski isend. Alguses on isendite populatsioonivektor järgmine: $N(0) = \begin{pmatrix} 105 \\ 1 \end{pmatrix}$. Leida Leslie maatriks, Leslie maatriksi omaväärtused ja omavektorid ning populatsiooni arvukus ja vanuseline jaotus 10.ndas põlvkonnas (10 paljunemisperioodi järel). (Leslie maatriksi abil populatsiooni kirjeldamine on siiski tõenäosuslik, seetõttu antud populatsiooni arvukuse vektori $N(0)$ korral peaks olema ettevaatlik, matemaatika ja näitlikustamise koha pealt probleeme pole).

Leslie maatriks $L = \begin{pmatrix} 1,5 & 2 \\ 0,08 & 0 \end{pmatrix}$. Omaväärtused rahuldavad võrrandit:

$$Lu = \lambda u = \lambda Iu.$$

Siit saame $L - \lambda I = 0$, st $\det(L - \lambda I) = 0$. Arvutame:

$$\det \begin{vmatrix} 1,5 - \lambda & 2 \\ 0,08 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1,5 - \lambda) - 0,16 = \lambda^2 - 1,5\lambda + 0,16 = 0.$$

Saadud ruutvõrrandi lahendamisel saame järgmised omaväärtused: $\lambda_1 = -0,1$, $\lambda_2 = 1,6$. Omavektorid: 1) $\lambda_1 = -0,1$. $Lu_1 = \lambda_1 u_1$:

$$\begin{pmatrix} 1,5 & 2 \\ 0,08 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1x_1 \\ -0,1x_2 \end{pmatrix} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 = -0,1x_1 \\ 0,08x_1 = -0,1x_2 \end{cases}.$$

Siit tuleneb võrrand $1,6x_1 = -2x_2$. Võtame $x_1 = 5$, siis $x_2 = -4$ (täisarvud, lihtsam hiljem arvutada).

Seega $u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2) $\lambda_2 = 1,6$. Analoogiliselt eelmise juhuga saame võrrandi $x_1 = 20x_2$, võttes $x_2 = 1$, tuleb $x_1 = 20$ ning $u_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Selleks, et leida $N(10) = LN(0)$, peame esmalt avaldama vektori $N(0)$ omavektorite abil. $N(0) = b_1 u_1 + b_2 u_2$:

$$\begin{pmatrix} 105 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \cdot 5 \\ b_1 \cdot (-4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \cdot 20 \\ b_2 \cdot 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5b_1 + 20b_2 = 105 \\ -4b_1 + b_2 = 1 \end{cases}$$

Viimase võrrandisüsteemi lahendamisel saame $b_1 = 1$, $b_2 = 5$. (Kui oleksime võtnud näiteks esimese omavektori jaoks $x_1 = 1$ ja $x_2 = -0,8$, siis oleks kordaja b_1 tulnud teistsugune).

Seega

$$N(10) = L^{10}N(0) = b_1 \lambda_1^{10} u_1 + b_2 \lambda_2^{10} u_2 = 1 \cdot (-0,1)^{10} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \cdot 1,6^{10} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Arvestades, et $(-0,1)^{10}$ on tunduvalt väiksem, kui $1,6^{10}$, võime viimasest võrdusest selle liikme ära jätta ning kirjutada:

$$N(10) \approx 5 \cdot 1,6^{10} \begin{pmatrix} 105 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57724 \\ 549 \end{pmatrix}.$$

Üldjuhul, määrab suurem omaväärtus ära paljunemisekiiruse (mida suurem on aeg, seda väiksemat rolli jääb mängima väiksema omaväärtuse ja omavektori poolt antud lisand populatsiooni arvukusevektorisse). Suuremale positiivsele omaväärtusele vastav omavektor määrab ära stabiilse populatsiooni vanuselise jaotuse aja kasvamisel. Antud juhul on 0-vanuseliste osakaal $\frac{20}{21}$ ning 1-vanuseliste osakaal $\frac{1}{21}$. Juhul, kui mõlemad omaväärtused on väiksemad kui 1, siis sureb populatsioon välja.

Üldised märkused.

Üldjuhul, kui maatriks A on n -mõõtmeline, siis on tal ka n erinevat omaväärtust ning n erinevat omavektorit. Analoogiliselt suureneb omaväärtuste ja -vektorite leidmiseks tehtavate arvutuste hulk.

3. Elementaar- ja liitfunktsioonid. Graafikud.

3.1. Elementaarfunktsioonid.

Definitsioon: Funktsioon f on reegel, mis seob iga elementi hulgast $x \in A$ parajasti ühe elemendiga $y \in B$. y nimetatakse funktsiooni f väärtusteks kohal x : $y = f(x)$.

Hulka A nimetatakse funktsiooni määramispiirkonnaks, hulka B muutumispiirkonnaks.

Näiteks: $y = f(x) = x^2$, siis $A = \mathcal{R}, B = \mathcal{R}$. $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$.

Rakendustes on funktsiooni määramis- või muutumispiirkond määratud tihti nõ terve mõistusega.

Näiteks aine kontsentratsioon ei saa olla negatiivne, populatsiooni arvukus samuti mitte. Mingi viiruse poolt nakatatud populatsiooni suhteline osa on vahemikus $[0; 1]$.

Liitfunktsioon $f \circ g$ on defineeritud järgmiselt:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

iga x jaoks, mis kuulub g määramispiirkonda. $g(x)$ omakorda kuulub f määramispiirkonda.

Pöördfunktsioonid. Funktsioon on ühene seos määramispiirkonna elementide $x \in X$ ja muutumispiirkonna elementide $y \in Y$ vahel. St ühelgi x väärtusel ei tohi vastavuses olla mitu y väärtust - peab olema täidetud tingimus, et

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{kui} \quad x_1 \neq x_2.$$

Sama tuleb silmas pidada pöördfunktsioonide $y = f^{-1}(x)$ leidmisel. Igal funktsioonil ei pruugi igas piirkonnas pöördfunktsiooni leida.

Funktsioonide sümmeetriaomadused:

Kui $f(-x) = -f(x)$ - paaritu funktsioon.

Kui $f(-x) = f(x)$ - paarisfunktsioon.

Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, paarisfunktsiooni graafik y -telje suhtes.

Põhilised elementaarfunktsioonid:

- 1) konstantne funktsioon $y = c$;
- 2) astmefunktsioon $y = x^n, n \in \mathcal{N}$;
- 3) eksponentfunktsioonid $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$;
- 4) trigonomeetrilised funktsioonid $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$;
- 5) ülaltoodute pöördfunktsioonid.

Elementaarfunktsiooniks nimetatakse iga funktsiooni, mida on võimalik moodustada põhilistest elementaarfunktsioonidest, rakendades kindel (lõplik) arv kordi nelja aritmeetilist tehet (liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist) ja liitfunktsiooni moodustamist.

Näide 1.2. Kui $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ ja $g(x) = x^2 + 1, x \in \mathcal{R}$. Leida liitfunktsioonid $(f \circ g)(x)$ ja $(g \circ f)(x)$.
Lahendus. Võtame $f(u) = \sqrt{u}, g(x) = x^2 + 1$. Siis

$$y = f(u) = f[g(x)] = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

$(f \circ g)(x)$ leidmiseks võtame $g(u) = u^2 + 1$, siis

$$y = g(u) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1, \quad \forall x \geq 0.$$

Näited pöördfunktsiooni leidmisest.

- 1) $y = f(x) = x^3 + 1$.

$$x^3 = y - 1, \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{y - 1} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{y - 1}.$$

Kuivõrd negatiivsest arvust juurt võtta ei saa, siis määramispiirkond sel juhul on $X = [1, \infty[$.
 2) $y = f(x) = 10^{x^2+1}$.

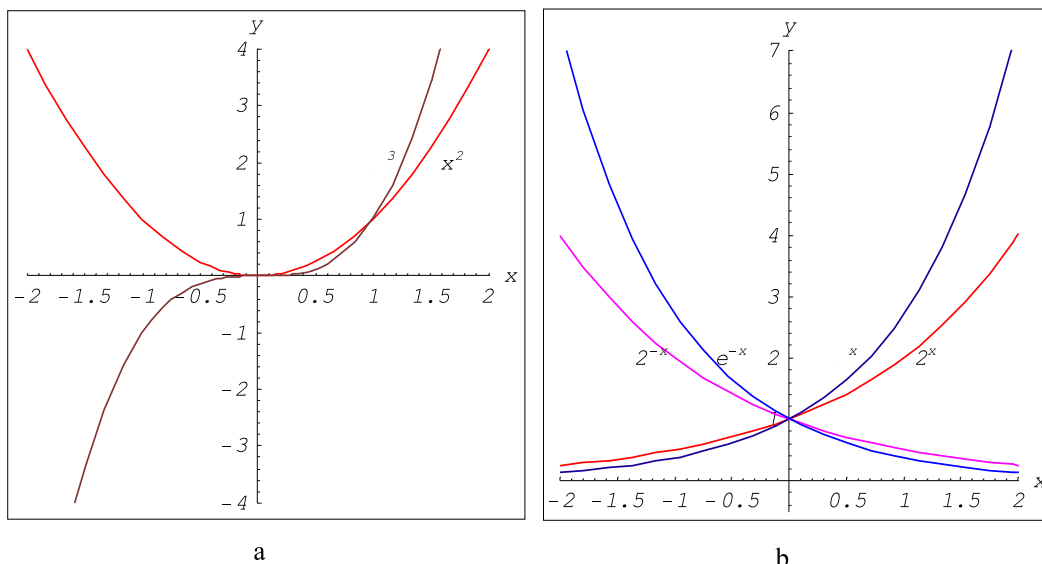
$$\log y = \log 10^{x^2+1} = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \log y - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\log y - 1}.$$

Seega $f^{-1}(x) = \sqrt{\log x - 1}$ ja määramispiirkond on $X = [0, \infty[$.

3.2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud, määramis- ja muutumispiirkonnad.

Joonisel 1a on toodud kahe astmefunktsiooni $y = x^2$ ja $y = x^3$ graafikud. Astmefunktsioonidel on määramispiirkonnaks kogu reaalarvude hulk: $X = \mathcal{R}$. Paarisarvulise astendajaga astmefunktsioonide muutumispiirkond on $Y = [0, \infty[$, paarituurvulise astendaja korral $Y = \mathcal{R}$.

Joonisel 1b on toodud nelja eksponentfunktsiooni: $y = 2^x, y = e^x, y = 2^{-x}, y = e^{-x}$ graafikud. Juhul, kui astendaja on positiivne, siis mida suurem on astme alus, seda kiiremini funktsioon x suurenemisel kasvab. Ning vastupidi, negatiivse astendaja korral - mida suurem on astme alus, seda kiiremini funktsioon x suurenemisel kahaneb (läheneb nullile). Astmefunktsioonidel on määramispiirkonnaks kogu reaalarvude hulk: $X = \mathcal{R}$. Muutumispiirkonnaks on vahemik $Y =]0; \infty[$.



Joonis 12: a) Astmefunktsioonide graafikud. b) eksponentfunktsioonide graafikud.

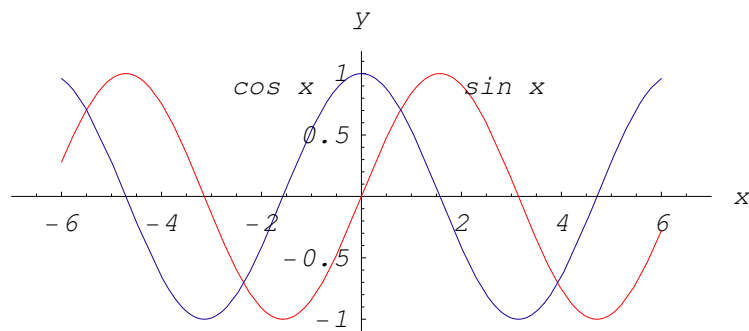
Joonisel 2 on toodud kahe trigonomeetrilise funktsiooni graafikud. Nii siinus- kui ka koosinusfunktsiooni ($y = \sin(x), y = \cos(x)$) määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk: $X = \mathcal{R}$, muutumispiirkond on $Y = [-1, 1]$. Kuivõrd $\cos(-x) = \cos x$, siis on koosinusfunktsioon paarisfunktsioon (graafik on sümmeetriline y -telje suhtes). $\sin(-x) = -\sin x$, seega on siinusfunktsioon paaritu funktsioon - tema graafik on sümmeetriline 0-punkti suhtes.

Joonisel 3 on toodud tangens- ja kootangensfunktsioonide graafikud. Funktsiooni $y = \tan(x)$ määramispiirkond $X = \mathcal{R} \setminus \bigcup \{ \frac{\pi}{2} \pm \pi n \}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. St funktsioonil on lõpmata arv katkevuspunkte: $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$. Muutumispiirkond on $Y = \mathcal{R}$.

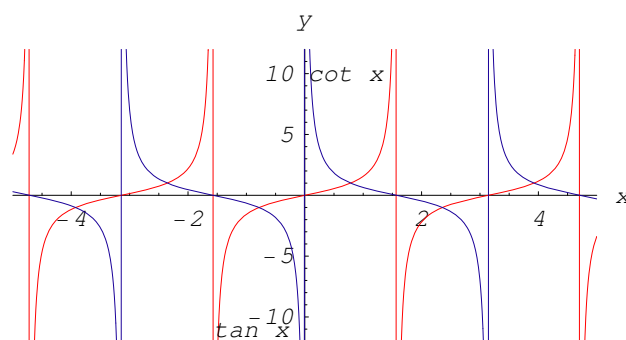
Funktsiooni $y = \cot x$ määramispiirkond on $X = \mathcal{R} \setminus \{ \pi n \}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Muutumispiirkond $Y = \mathcal{R}$.

Joonisel 4 on toodud astmefunktsioonide pöördfunktsioonide graafikud. Määramispiirkond mõlemal juhul $X = [0, \infty[$, muutumispiirkond $Y = [0, \infty[$.

EkspONENTI pöördfunktsiooniks on logaritmfunktsioon. Kaks logaritmfunktsiooni graafikut (erinevate alustega) on toodud joonisel 5. Määramispiirkond: $X =]0; \infty[$, muutumispiirkond $Y = \mathcal{R}$.



Joonis 13: Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud.



Joonis 14: Tangens- ja kootangensfunktsioonide graafikud.

Joonisel 6 on toodud arkussinuse ja arkuskosinuse funktsioonide graafikud. Funktsiooni $y = \arcsin x$ määramispiirkond $X = [-1, 1]$, muutumispiirkond $Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Funktsioonil $y = \arccos x$ määramispiirkond $X = [-1, 1]$, muutumispiirkond $Y = [0, \pi]$.

Funktsiooni $y = \arctan x$ määramispiirkond $X = \mathcal{R}$, muutumispiirkond $Y =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Funktsiooni

$y = \text{arccot } x$ määramispiirkond $X = \mathcal{R} \setminus \{0\}$, muutumispiirkond $Y =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Funktsioonide graafikud on toodud joonisel 7.

Üks sagedamini kasutatavaid funktsiooni on *polünoomfunktsioon*. n -järku polünoomfunktsioon avaldub järgmiselt:

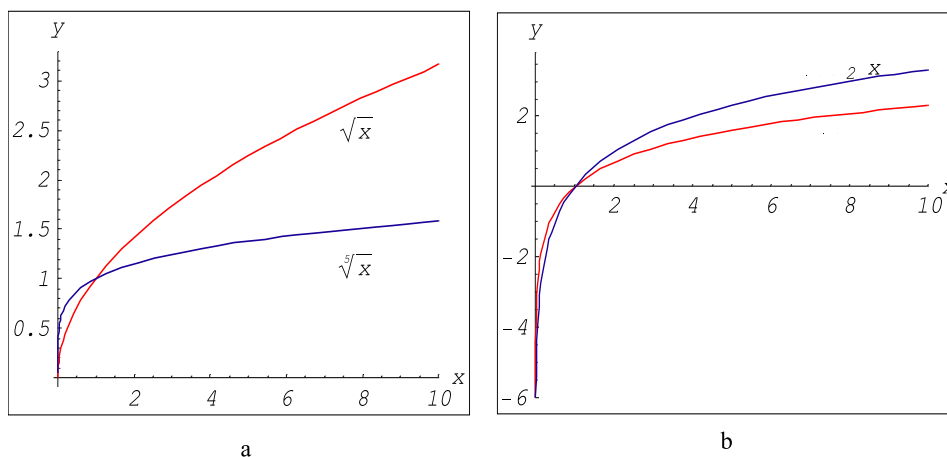
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

ja $a_n \neq 0$.

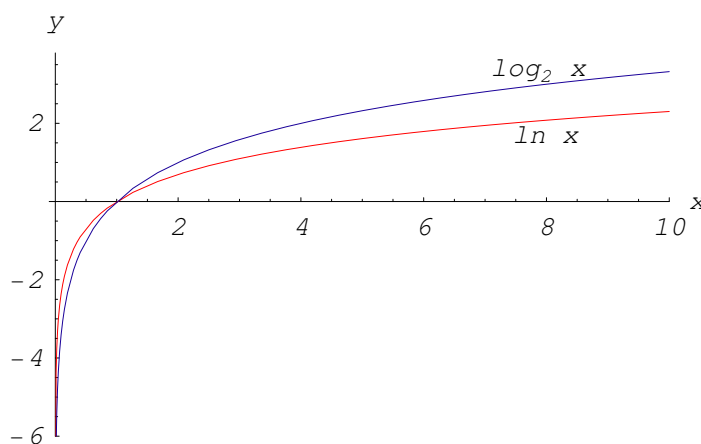
3.3. Näited funktsionaalsete sõltuvuste kohta

Näide 1. Keha kukkumist $25m$ kõrguselt tornist kirjutab õhutakistuse puudumise korral funktsioon: $h(t) = 25 - 4,9t^2$, kus h - keha kõrgus maapinnast. Tegemist on 2. järku polünoomfunktsiooniga ehk ruutfunktsiooniga. Antud funktsiooni graafikuks on allapoole avanev parabool, mis on toodud joonisel 8. Puhtmatemaatiliselt võttes oleks antud funktsiooni määramispiirkonnaks $X = \mathcal{R}$, muutumispiirkond $Y =]-\infty, 25]$. Füüsikas jäetakse tihtipeale aja negatiivsed väärtused välja (me ei tea, mis võis antud kehaga juhtuda avrasematel ajamomentidel, kus, kuidas ja miks paiknes), st $X = [0; \infty[$. Muutumispiirkond $Y = [0; 25]$ - antud näites tuleb ilmselt eeldada, et kui keha kukub tornist, siis jääb ta maapinnale püsima.

Näide 2. Antud näites vaatame, kuidas ilmnevad polünoomfunktsioonid keemias. Vaatame keemilise



Joonis 15: Astmefunktsioonide pöördfunktsioonide graafikud.



Joonis 16: Logaritmifunktsioonide graafikud.

reaktsiooni kiirust. Olgu tegemist kahe elemendi ühinemisreaktsiooniga $A + B \rightarrow AB$. Reaktsiooni kiirus (rate), millega antud reaktsioon toimub sõltub sellest, kui tihti elementide A ja B aatomid põrkuvad. Seega sõltub reaktsiooni kiirus reageerivate ainete kontsentratsioonist (molekulide või aatomite arv ruumalaühikus). (Siin jätame arvestamata füüsikalised tingimused - temperatuur, rõhk jne, mis samuti põrkumiste sagedust mõjutavad. Uurime sõltuvust vaid kontsentratsioonidest).

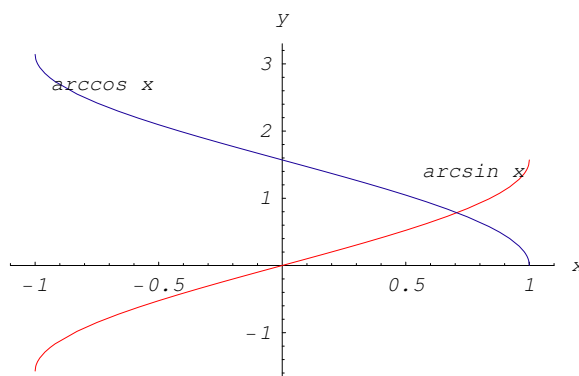
Tähistame reaktsiooni kiiruse - elementaarreaktsioonide arvu ajaühikus - tähega R . Olgu elementide A ja B hetkelised kontsentratsioonid $[A]$ ja $[B]$ vastavalt. Siis $R \propto [a]$, $R \propto [B]$. Seega

$$R = [A][B], \quad k > 0, \quad [A], [B] > 0.$$

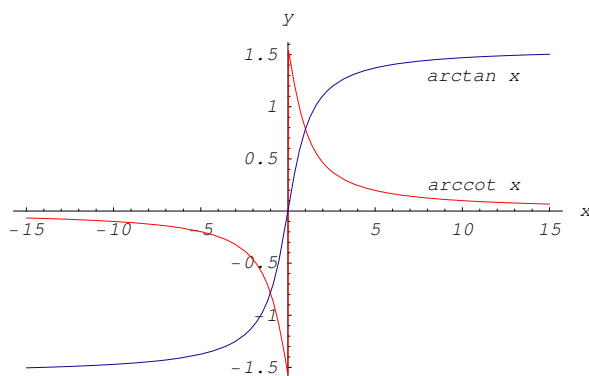
kus k on mingi konstant. Eeldame, et tegemist on suletud süsteemiga - ainete koguhulk on konstantne. Olgu nende ainete algkontsentratsiooni a ja b vastavalt ning tähistagu $x = [AB]$ - uue keemilise aine hetkelist kontsentratsiooni. Ilmselt $[A] = a - x$, $[B] = b - x$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq x \leq b$. (AB kontsentratsioon ei saa ületada algkontsentratsioone a ja b). Saame võrrandi:

$$R(x) = k(a - x)(b - x) = kx^2 - k(a + b)x + kab.$$

Saadud tulemus näitab reaktsiooni kiiruse sõltuvust lõpptulemusena saadava aine kontsentratsioonist. Olgu meil näiteks $k = 5$, $a = 20$, $b = 50$. Siis kujutab polünoomfunktsiooni graafik, mis on toodud joonisel 9. Joonisel on näha üks osa paraboolist. Märgime, et kuigi matemaatiliselt poleks mingeid piiranguid, mis keelaks aine AB kontsentratsioonil omada negatiivseid väärtusi või väärtusi, mis on suuremad kui



Joonis 17: Arkussinus- ja arkuskoosinusfunktsioonide graafikud.



Joonis 18: Arkustangens- ja arkuskotangensfunktsioonide graafikud.

$\max(a, b)$, siis ülesande püstitus ei luba selliseid väärtusi omada. Seetõttu on antud juhul funktsiooni $r(x)$ määramispiirkond $X = [0, 20]$ ja muutumispiirkond $Y = [0, 5000]$.

Ratsionaalfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mis on kahe polünoomi $p(x)$ ja $q(x)$ jagatis:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

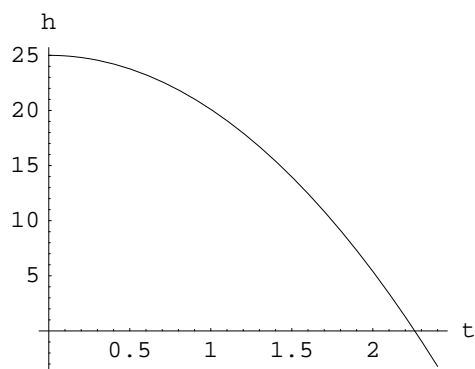
Näited: $y = \frac{1}{x}$, kui $x \neq 0$; $y = \frac{x^2+2x-1}{x-1}$, kui $x \neq 1$.

Näide 3. Vaatame piiratud toitainete koguse korral populatsiooni kasvu kiirust R (*growth rate*). Bioloogias kasutatakse tihti terminit kasvu kiirus ühe isendi kohta (*growth rate per capita*) r . Olgu toitainete kontsentratsioon N . Siis $r(N)$ antakse nn Monod' kasvufunktsiooniga:

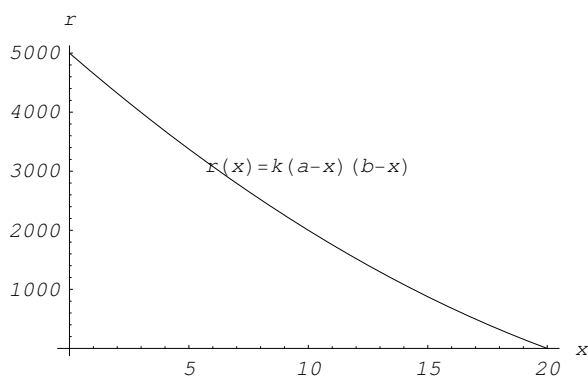
$$r(N) = a \frac{N}{k + N}, \quad N \geq 0,$$

kus $a, k > 0$ on konstandid. Populatsiooni kasvukiiruse sõltuvus $r(N)$ on kujutatud graafikul 10. Graafikult on näha, et kontsentratsiooni N kasvamisel läheneb kasvukiirus konstandile a : $r \rightarrow a$. St, et populatsiooni kasvukiirus on saavutanud nn küllastustaseme - toitainete hulga kasvamisel populatsiooni kasvukiirus ei suurene enam oluliselt.

Juhul, kui toitainete kontsentratsioon on saavutanud taseme $N = k$, siis $r(N) = \frac{a}{2}$ - populatsiooni kasvukiirus on saavutanud poole küllastustaseme kasvust. Seetõttu nimetatakse konstanti k poolküllastuskonstandiks.



Joonis 19: Keha kõrguse sõltuvus ajast.



Joonis 20: Keemilise reaktsiooni kiiruse sõltuvus saadava aine kontsentratsioonist.

EkspONENTFUNKTSIOONID.

EkspONENTFUNKTSIOONIDEL on väga palju erinevaid rakendusi füüsikas, bioloogias ja mujal. Järgnevas vaatame kahte näidet.

Näide 4. Bioloogias isendite populatsiooni eksponentsiaalne kasv piiramatu toitainete hulga korral.

Vaatame bakterite pooldumist. Uued bakterid tekivad emaraku pooldumisel kaheks. Oletame, et see toimub keskmiselt ühe ajaühiku järel. Olgu meil ajahetkel 0 N isendit. Siis järgmisel ajahetkel on isendite arv kahekordistunud: $N(1) = 2N(0) \equiv 2N_0$. Ajahetkel $t = 2$: $N(2) = 2N(1) = 2 \cdot 2N_0 = 2^2 N_0$. Sellist rida jätkates saame:

$$N(t) = N_0 2^t.$$

Seega - piiramatu toitainete varu korral paljuneb bakterite populatsioon ajas eksponentsiaalselt. Tihti väljendatakse eksponentsiaalne kasv $e \approx 2,71828$ abil. Arvestades, et $2 = e^{\ln 2}$, saame:

$$N(t) = N_0 (e^{\ln 2})^t = N_0 e^{t \ln 2} \approx N_0 e^{0,693t}.$$

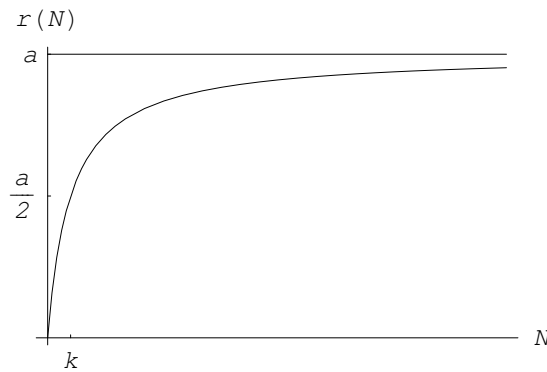
Näide 5. Radioaktiivne lagunemine.

Radioaktiivse aine (elemendi) lagunemist kirjeldab järgmine matemaatiline seos:

$$N(t) \equiv N = N_0 e^{-\lambda t},$$

kus $N(t)$ - süsiniku hulk ajahetkel t , N_0 - süsiniku hulk ajahetkel $t = 0$ ning λ näitab lagunemise kiirust. Füüsikas kasutatakse lagunemise iseloomustamiseks terminit poolestusaeg - τ - see on aeg, mille jooksul laguneb pool algsest radioaktiivsest elemendist. λ ja τ on omavahel seotud järgmiselt: $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \approx \frac{0,693}{\tau}$. Võttes $t = \tau$, leiame

$$N(\tau) = N_0 e^{-\lambda \tau} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{\tau} \tau} = N_0 e^{-\ln 2} = N_0 \frac{1}{e^{\ln 2}} = N_0 \frac{1}{2}.$$



Joonis 21: Populatsiooni paljunemiskiiruse sõltuvus toitainete kontsentratsioonist.

Seega, tõepoolest, aja τ möödumisel, on lagunenud pool algsest radioaktiivse elemendi hulgast (aatomite arvust).

Geoloogias kasutatakse fossiilide, mineraalide ja erinevate kivististe vanuse määramiseks radioaktiivse süsiniku meetodit. Radioaktiivne süsinik tekib vaid atmosfääris tänu kosmilise kiirguse ja tavalise süsinike aatomite vahelisele vastasmõjule (vt lähemalt füüsika õpikuid). Radioaktiivset süsinikku seotakse elusaine (taimede) molekulidega praktiliselt ainult õhust ning haaratakse taimedesse vaid taime eluperioodil. Pärast taime hukkumist radioaktiivset süsinikku enam ei lisandu, algne radioaktiivne süsinik hakkab aga lagunema. Arheoloogilistel kaevamistel saadud puutükikestel analüüsitakse, milline on tavalise süsiniku ja radioaktiivse süsiniku vaheline suhteline osakaal ning võrreldakse seda elusa taime osakaaluga. Radioaktiivse süsiniku C_{14}^1 poolestusaeg on $\tau = 5730$ aastat.

Arheoloogilistel kaevamistel leiti, et puu sisaldab 23% radioaktiivsest süsinikust, mis peaks olema elus puul. Määrata puu hukkumise aeg.

$$N = 23\%N_0 = 0,23N_0.$$

$$\begin{aligned} 0,23N_0 &= N_0 e^{-\frac{0,693}{5730}t} && | \div N_0 \\ 0,23 &= e^{-\frac{0,693}{5730}t} && | \ln(..) \\ \ln 0,23 &= -\frac{0,693}{5730}t \\ t &= -\frac{5730 \ln 0,23}{0,693} \approx 12150 \text{ aastat} \end{aligned}$$

3.4. Graafikud ja funktsioonide põhilised teisendused.

Joon tasandil

Loodusteadustes (ja mitte ainult) on lihtsaimaks kahe suuruse vaheliseks sõltuvuseks lineaarne sõltuvus. Näiteks füüsikast teadaolev seos - vedru pikkus y on võrdeline vedru otsa riputatud keha massiga x :

$$y = y_0 + kx. \quad (3.13)$$

See on tuntud kui Hooke'i seadus. y_0 on siin vedru pikkus juhul, kui vedru otsa pole midagi riputatud. k on võrdelisuse tegur. Öeldakse, et vedru pikenemine on võrdeline massiga:

$$y - y_0 \propto x.$$

Lineaarse sõltuvuse traditsioonilise vormi võime kirjutada kujul

$$Ax + By + C = 0,$$

kus A , B ja C on konstandid, A ja B ei ole korruga võrdsed nulliga; x ja y on kaks muutujat. Lineaarse sõltuvuse graafikuks on sirgjoon (sirge).

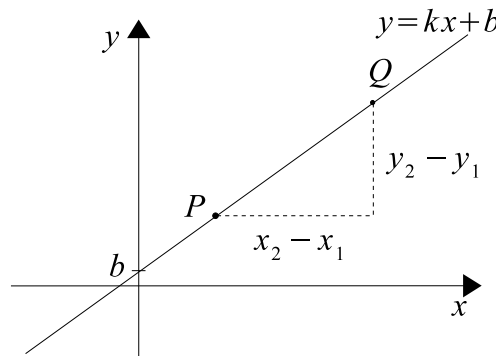
Olgu meil teada kaks punkti $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$. Siis neid punkte läbiva sirge tõus on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.14)$$

Sirge võrrand tõusu ning sirgel oleva punkti $P(x_1, y_1)$ abil:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (3.15)$$

Sirge võrrand tõusu ja vabaliikme abil - $y = kx + b$ (vt joonis 11). Erijuhud: $y = c$ - horisontaaljoon, $x = h$ - vertikaaljoon.



Joonis 22: Sirge graafik läbi kahe punkti.

Näide Määrata sirge võrrand, kui see läbib punkte $A(-2; 1)$ ja $B(3; -0, 5)$.

Määrame esmalt sirge tõusu kasutades valemit (3.14):

$$k = \frac{-0,5 - 1}{3 - (-2)} = -\frac{1,5}{5} = -\frac{3}{10} = -0,3.$$

Kasutame nüüd seost (3.15):

$$y - 1 = -0,3(x - (-2)) \quad \Rightarrow \quad y = -0,3x + 0,4.$$

3.5. Funktsioonide (graafikute) lineariseerimine.

Funktsioonide, katse- ja mõõtmisandemete puhul on tihtipeale nii, et kogu meid huvitav piirkond ei pruugi mahtuda ühele graafikule. Näiteks astme- või eksponentfunktsioonide korral on funktsiooni kas väga kiire - kui graafiku alumises otsas on mõned iseärasused, ei pruugi need silma paista. Neil juhtudel kasutatakse tihti andmete lineariseerimist. St, tuleb leida uued muutujad, mille vahel oleks lineaarne sõltuvus, mida graafikul kujutab sirge.

Teine juhtum, mille korral kasutatakse andmete lineariseerimist, on seotud mõõtmistulemuste interpreteerimisega. Oletame näiteks, et mõõtetulemused peaksid graafikul paiknema mööda parabooli osa. Absoluutselt täpseid mõõtmisi ei eksisteeri, seetõttu paiknevad mõõdetud andmepunktid tavaliselt pisut ülal- või allpool ideaalset graafikut. Küsides, kas mõõtetulemused kinnitavad teooriat või mitte (graafik on sarnane paraboolile või mitte), on silma järgi raske hinnata (aga nii antakse tavaliselt esmane hinnang!). Ka sel juhul on mõistlik andmed lineariseerida, uued tulemused peaksid paiknema mööda sirget ning silma järgi on sellist paigutust hõlpsam hinnata.

Järgnevalt vaatame mõnes näites, kuidas toimub funktsioonide (ja vastavalt nende funktsioonide graafikute) lineariseerimine.

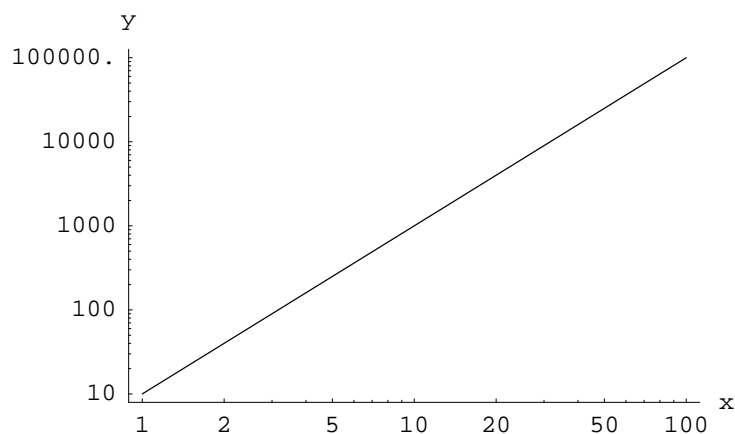
Näide. Funktsioon $y = 10x^2$.

1. variant. - logaritmineerimine.

Võtame võrduse $y = 10x^2$ mõlemalt poolt kümnendlogaritmi.

$$\begin{aligned}\log y &= \log(10x^2) \\ \log y &= 2 \log x + \log 10.\end{aligned}$$

Valides uued muutujad $Y = \log y$, $X = \log x$ ning tähistades $k = 2$, $b = \log 10 = 1$, oleme saanud lineaarse seose $Y = kX + b$



Joonis 23: Logaritmiline graafik funktsioonist $y = 10x^2$.

Logaritmilisi graafikuid (Log-log-graafikuid) kasutatakse astmefunktsioonide korral. Juhul, kui on tegemist eksponentfunktsioonidega, siis kasutatakse poollogaritmilisi (log-lineaar) graafikuid.

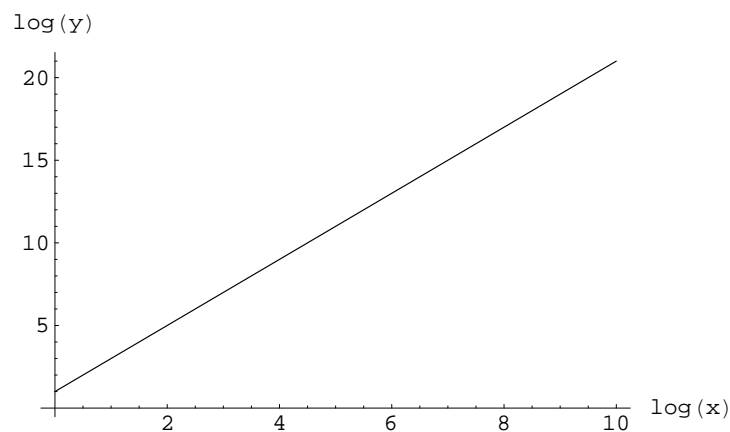
Näide. Funktsioon $y = 2e^{-3x}$.

Võtame mõlemalt poolt logaritmi

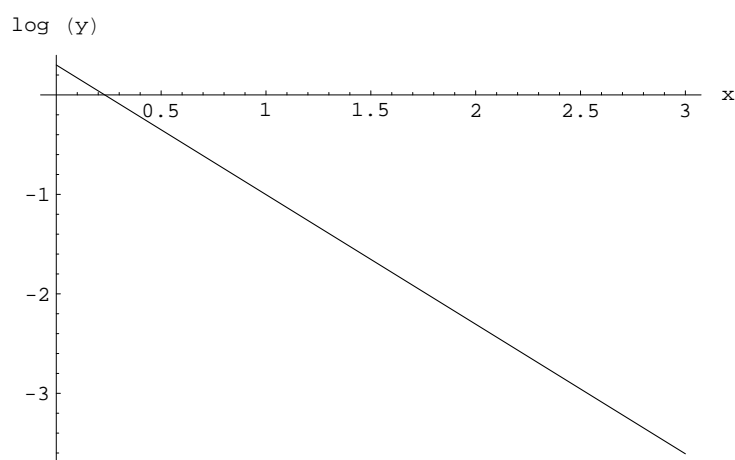
$$\begin{aligned}\log y &= -3x \log e + \log 2 \\ \log y &= -1,303x + 0,301.\end{aligned}$$

Seega on mõistlik teha graafik, kus horisontaalteljel on x ning vertikaalteljel $\log y$:

Järgnevas vaatame, kuidas andmete logaritmilist esitust ja logaritmilisi graafikuid loodusteadustes kasutatakse.



Joonis 24: Logaritmitud funktsiooni graafik ehk graafik $\log(y) = 2\log(x) + \log 10$.



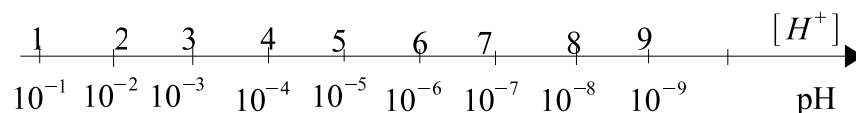
Joonis 25: Logaritmitud funktsiooni graafik ehk graafik $\log(y) = 1,303x + 0,301$.

Näide. Lahuse happelisust mõõdetakse pH-ühikutega (pondus hydrogenii) - ehk vesiniku osakaaluga. pH kirjeldab vesiniku ionide aktiivsust. Näiteks maohappel on pH=1, puhtal veel pH=7, söögisooda pH=9.

pH väärtus on ligikaudu võrdne negatiivse kümnendlogaritmiga vesiniku aatomite kontsentratsioonist. Olgu $[H^+]$ - vesiniku H ionide kontsentratsioon (ioonide hulk moolides 1 liitri lahuse kohta). Siis

$$pH = -\log[H^+].$$

Happelisuse skaala pH-des ja kontsentratsiooni abil on antud järgmisel joonisel. Kui kahe erineva lahuse



Joonis 26: Happelisus kontsentratsiooni ja pH kaudu antuna.

happelisused pH-des erinevad ühe võrra, siis vesinikuioonide sisaldus lahustes erineb 10 korda.

Näide. Kui taimed kasvavad piisavalt suure algtihedusega, täheldatakse tihti, et taimese suuremaks kasvades nende arv väheneb. Joonistades biomassi kuivmassi kaalu ühe taime kohta sõltuvusena ellujäänud

taimede arvust log-log-graafikul, leitakse sageli, et andmed kujundavad joone tõusuga $-\frac{3}{2}$. Oletame, et mingi konkreetse liigi kohta kehtib selline seos taimede tiheduse korral $10^2 \dots 10^4 \text{1/m}^2$ ja kuivmass ühe taime kohta on umbes $10g$ tiheduse 10^21/m^2 korral. Leida seos kuivmassi ja taimede tiheduse vahel.

Lahendus. Olgu tihedus tähistatud ρ , kuivmass M , siis kehtib lineaarne sõltuvus

$$\log M = C - \frac{3}{2} \log \rho,$$

kus C on mingi konstant, mis tulebki leida. Pannes antud võrdusesse sisse $M = 10$ ning $\rho = 100$, saame $C = 4$. Seega $M = 10^4 \rho^{-3/2}$.

Näide. Polonium Po^{210} on radioaktiivne element. Et leida tema poolestusaeg eksperimentaalselt, tuleb mõõta tema (radio)aktiivsust ning leida radioaktiivse lagunemise konstant. Radioaktiivsus väheneb võrdeliselt allesjäänud (lagunemata) elemendi hulgaga. Tähistame aktiivsuse A , ning arvestame radioaktiivse lagunemise seadust

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

kus N_0 - radioaktiivse aine kogus alguses, $N(t)$ - radioaktiivse aine hulk aja t möödudes, λ - lagunemist iseloomustav konstant. Aine aktiivsuse langus toimub samasuguse seaduse kohaselt:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t},$$

kus A_0 - aktiivsus alguses, $A(t)$ - aktiivsus aja t möödumisel. Logaritmides viimast seost, leiame

$$\ln A(t) = \ln A_0 - \lambda t.$$

Seega tuleks mõõta polooniumi aktiivsust pika aja vältel, teha graafik, mille horisontaalteljel on aeg t ning vertikaalteljel A . Sirge tõus on λ ehk radioaktiivse lagunemise konstant. Poolestusaeg $\tau = \ln 2/\lambda$.

4. Piirväärtused. Funktsiooni pidevus. Diferentsiaal ja tuletis.

4.1. Funktsiooni piirväärtus, pidevus

Definitsioon: Funktsiooni $y = f(x)$ piirväärtus x lähenemisel c -le on võrdne L -ga, st $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ tähendab, et $\forall \varepsilon > 0$ leidub selline $\delta > 0$, et $|f(x) - L| < \varepsilon$, kui $0 < |x - c| < \delta$.

Piirväärtuse mitteformaalne definitsioon:

Funktsiooni $f(x)$ piirväärtus x lähenemisel c on võrdne L -ga, st $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, tähendab, et funktsiooni $f(x)$ väärtuse võib L -le kuitahes lähendale viia, valides c -le piisavalt lähedal oleva x .

Vaatame esmalt mitteformaalse definitsiooni sisu ja tähendust. Olgu meil funktsioon näiteks $y = f(x) = x^2$ ning leiame

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Vastavalt mitteformaalsele definitsioonile tähendab see, et $f(x)$ väärtuse võime lähendada 4-le juhul, kui valime x , mis on $c = 2$ -le piisavalt lähedal. Alljärgnevas tabelis on see läbi viidud, algul lähedes 4-le altpoolt, hiljem ülaltpoolt:

x^2	x	x^2	x
3,61	1,9	4,41	2,1
3,9601	1,99	4,0401	2,01
3,996001	1,999	4,004001	2,001

Formaalse definitsiooni järgi - võttes $\varepsilon = 0,41$, siis juhul kui valime $\delta < 0,1$, siis võttes x väärtuse piisavalt $c = 2$ lähedale, st $1,9 < x < 2,1$, saame igal juhul ($L = 4$): $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Kui võtame ε väiksema, nt $\varepsilon = 0,041$, peame valima $\delta < 0,01$ jne. Ning selliselt peab saama valida iga $\varepsilon > 0$ korral - mida lähemale läheb funktsiooni $f(x)$ väärtus piirväärtusele, seda lähemale peab x minema c -le.

Tähistusi: x läheneb c -le paremalt (parempoolne piirväärtus): $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$;

x läheneb c -le vasakult (vasakpoolne piirväärtus): $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$.

Funktsiooni parem- ja vasakpoolne piirväärtus ei pea kokku langema.

Piirväärtuste võtmise reegleid:

- $\lim_{x \rightarrow c} af(x) = a \lim_{x \rightarrow c} f(x)$, a - konstant.
- $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$, kui $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$.

Piirväärtuste leidmisel on kaks olulisemat piirväärtust, mida me siin tõesta. Tõestusi vt näiteks Piskonov 'Diferentsiaal- ja integraalarvutus I'.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (4.16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828\dots \quad (4.17)$$

Ülesanded.

- Leida $\lim_{x \rightarrow 5} \left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$.

Antud juhul on ilmselt:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2}{25} = 1 - \frac{25}{25} = 0.$$

2. Leida $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Kui võtaksime siin otse $x = 3$, siis tuleks tulemus $\frac{0}{0}$ ehk määramatus. Antud juhul saab talitada teistmoodi:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6.$$

Antud funktsioonil leidub piirväärtus punktis $x = 3$, kuid see punkt ise ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda.

3. Leida $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2e^x}{x^2 - 25}$.

Ka antud juhul on mõistlik nimetaja umma ja vahe korrutisena kirjutada:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2e^x}{(x - 5)(x + 5)}.$$

Lugeja on piirväärtuse all olevas avaldises kohal $x = 5$ lõplik $2e^5$. Nimetajas tuleb sisse lõpmatus (nulliga jagamine). Vaatame siin kahte juhtumit - kui $x \rightarrow 5+$ ja $x \rightarrow 5-$:

$$\lim_{x \rightarrow 5+} \frac{2e^x}{(x - 5)(x + 5)}.$$

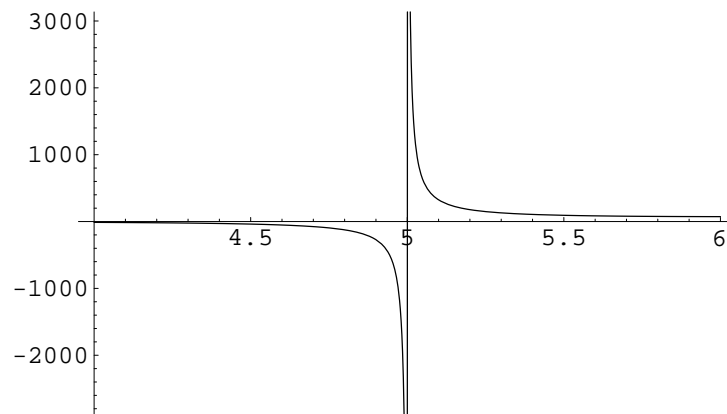
Sel juhul jääb $x - 5 > 0$. Ka nimetaja ning $x + 5 > 0$. Seega - nimetaja läheneb nõ pluss-nullile (positiivselt poolt). Seega:

$$\lim_{x \rightarrow 5+} \frac{2e^x}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{2e^5}{10} \lim_{x \rightarrow 5+} \frac{1}{x - 5} \rightarrow \frac{2e^5}{10} \cdot \frac{1}{+0} = \frac{2e^5}{10} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Kui $x \rightarrow 5-$, saame analoogiliselt, et $x - 5 < 0$ ning kokkuvõttes:

$$\lim_{x \rightarrow 5-} \frac{2e^x}{(x - 5)(x + 5)} = -\infty.$$

Antud funktsiooni graafik $x = 5$ juures on toodud järgmisel joonisel:



Joonis 27: Funktsiooni $y = \frac{2e^x}{(x - 5)(x + 5)}$ graafik.

4. Leida $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.

Arvestame, et $x = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geq 0, \\ -x, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$. Siis parempoolne piirväärtus:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1.$$

Vasakpoolne piirväärtus:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Kuivõrd $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$, siis piirväärtust $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ ei eksisteeri.

5. Leida $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 7}{2x - 3x^3}$.

Otse asendades saame $\frac{\infty}{\infty}$ -tüüpi avaldise. Kui nii nimetajas kui ka lugejas on polünoomid, siis sel juhul tuuakse mõlemast suurim x aste välja:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 7}{2x - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3})}{x^3(\frac{2}{x^2} - 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3})}{x^3(\frac{2}{x^2} - 3)} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - 3} = -\frac{2}{3}.$$

6. Leida piirväärtus $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 7t^2}{2t}$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 7t^2}{2t} &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{7t \sin 7t^2}{7t \cdot t} = \frac{7}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin 7t^2}{7t^2} \\ &= \frac{7}{2} \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 7t^2}{7t^2} = \frac{7}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

7. Leida $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t+1} \right)^{-3t}$.

Arvestame, et

$$\frac{t}{t+1} = 1 : \left(\frac{t+1}{t} \right) = \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-1}.$$

Siis saame piirväärtusest:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t+1} \right)^{-3t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-1} \right]^{-3t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{3t} = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^3 = e^3.$$

Näiteid rakenduste kohta.

Näide 1. Isendite populatsiooni kasv aja jooksul.

Lihtsaim võimalus on nn eksponentsiaalne kasv. Olgu isendite arv mingil konkreetsel ajahetkel, olgu selleks ajahetkeks $t = 0$ (alati võime nii võtta, et hakkama aega lugema näiteks praegusest hetkest) N_0 . Siis $N = N(t) = N_0 e^{at}$, kus $a > 0$ on kasvu kiirust (juurdekasv ajaühikus) iseloomustav konstant. Ilmselt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} N_0 e^{at} = \infty.$$

Loomulikult looduses sellist paljunemist ei eksisteeri. Eksponentsiaalne kasv võib toimuda mingi (lühikese) aja jooksul, aga mitte lõpmata kaua.

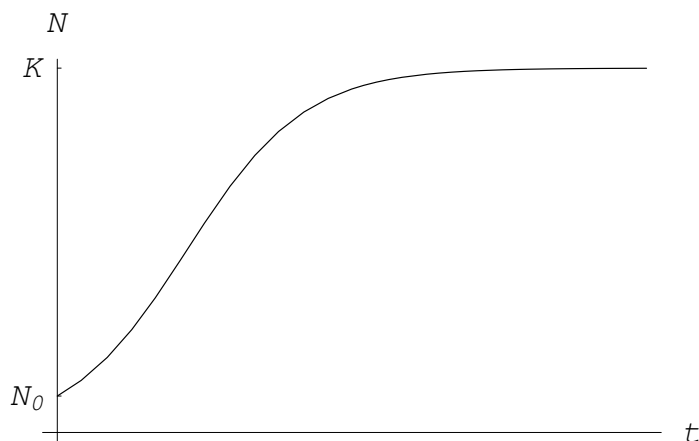
Üks tuntumaid mudeleid populatsiooni arvukuse kasvu kirjeldamiseks on logistiline kasv (Verhulsti võrrandi ehk logistilise võrrandi abil). Logistiline kasv määratakse ära populatsiooni mahutavusega K ehk populatsiooni statsionaarse arvukusega, ning populatsiooni *maksimaalse* suhtelise kasvukiirusega ühe isendi kohta r (arvukuse muutus muutus ajaühikus jagatud isendite koguarvuga). Sel juhul kasvukiirus isendi kohta kahaneb populatsiooni suurenemisel. Logistilist kasvu kirjeldab võrdus:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) e^{-rt}}, \quad t \geq 0,$$

kus N_0 - populatsiooni arvukus ajahetkel $t = 0$. Vaatame, mis juhtub populatsiooni arvukusega, kui $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1 \right) e^{-rt}} = \frac{K}{1 + 0} = K.$$

Logistilist kasvu kirjeldab järgmine graafik.



Joonis 28: Logistilise kasvu graafik.

4.2. Funktsiooni pidevus.

Definitsioon. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse pidevaks punktis $x = c$, kui

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Funktsiooni pidevuse uurimisel tuleb kontrollida kolme tingimust:

- 1) Kas funktsioon $f(x)$ on määratud punktis c .
- 2) Kas piirväärtus $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ eksisteerib.
- 3) Kas $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$?

Näide. Uurida funktsiooni $y = f(x)$ pidevust, kui

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & \text{kui } x \neq 3 \\ 5, & \text{kui } x = 3 \end{cases}.$$

Ilmselt on funktsioon $f(x)$ pidev kõikjal peale $x = 3$. Sel kohal tuleks funktsiooni pidevust täiendavalt uurida. Selleks leiame piirväärtuse:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5.$$

Kuivõrd viimane piirväärtus langeb kokku funktsiooni $f(x)$ väärtusega kohal $x = 3$, st $f(3) = 5$ (vt funktsiooni definitsioon), siis on antud funktsioon pidev kõikjal.

Elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas. See kehtib ka näiteks ratsionaalfunktsioonide kohta. Näiteks funktsioon $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ on määratud kõikjal välja arvatud $x = 3$, st $X = \mathcal{R} \setminus \{3\}$ ja on kogu oma määramispiirkonnas pidev. Pidevad oma määramispiirkonnas on näiteks polünoomfunktsioonid, astmefunktsioonid, trigonomeetrilised, eksponentfunktsioonid jne.

Üks näide mittepidevate funktsioonide kohta - Heaviside'i funktsioon, mis on defineeritud järgmiselt:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0 \\ 1, & \text{kui } x \geq 0 \end{cases}.$$

Teoreem. Kui funktsioon $g(x)$ on pidev kohas $x = c$ ja $g(c) = L$ ning funktsioon $f(x)$ on pidev kohal $x = L$, siis liitfunktsioon $f(g(x)) \equiv (f \circ g)(x)$ on pidev kohal $x = c$, kusjuures

$$\lim_{x \rightarrow c} (f \circ g)(x) \equiv \lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f[\lim_{x \rightarrow c} g(x)] = f(g(c)) = f(L).$$

Näide. Uurime funktsiooni $y = e^{-x^2}$ pidevust. Antud funktsioon on liitfunktsioon. Võtame $f(x) = e^x$ ning $g(x) = -x^2$. Siis funktsiooni $g(x)$ määramispiirkond on $X = \mathcal{R}$, muutumispiirkond $Y =] -\infty, 0]$. Seega on funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonnaks $] -\infty, 0]$ ning on selles määramispiirkonnas pidev funktsioon. Seega liitfunktsioon $y = f(g(x)) = e^{-x^2}$ on pidev piirkonnas $x \in \mathcal{R}$.

Näide. Funktsioon $y = \sin \frac{1}{x}$. Võtame $h(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Siis $y = h(g(x)) = \sin \frac{1}{x}$. Funktsiooni $g(x)$ määramispiirkond on $X = \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Seega on ka funktsioon $h(g(x))$ määratud piirkonnas $\mathcal{R} \setminus \{0\}$ ning järelikult on ta kohal $x = 0$ katkev.

Rääkides ökoloogia ja bioloogia süsteemidest, mis kirjeldavad populatsioonide arvukust, arvukuse muutumist, siis need funktsioonid ei ole tegelikult pidevad. Populatsiooni arvukus on täisarv, st populatsiooniteoorias kasutatavad funktsioonid on tegelikult diskreetsed ka pole neil negatiivseid väärtusi. Lihtsuse mõttes võime neid aga käsitseda kui pidevaid (eriti arvukuse suurte väärtuste korral).

Keskväertusteoreem. Olgu funktsioon $f(x)$ pidev funktsioon suletud vahemikus $x \in [a, b]$. Kui $L \in [f(a), f(b)]$, siis leidub vähemalt üks arv c , et $f(c) = L$.

Antud teoreem tähendab, et kui funktsiooni väärtus muutub $f(a)$ -st kuni $f(b)$ -ni, siis peab ta läbima ka kõik vahepealsed väärtused. (Funktsioon võib võtta vahepeal suuremaid või väiksemaid väärtusi kui $f(a)$ või $f(b)$, kuid nende vahepealsed väärtused peab kõik läbima).

Definitsioon. Olgu funktsioon $f(x)$ defineeritud hulgal $x \in D$ nii, et arv $c \in D$. Siis leidub funktsioonil $f(x)$ *absoluutne maksimum* kohal $x = c$, kui $f(x) \leq f(c) \forall x \in D$. Funktsioonil $f(x)$ leidub kohal $x = c$ *absoluutne miinimum*, kui $f(x) \geq f(c) \forall x \in D$.

5. Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal.

5.1. Funktsiooni muutumise kiirus. Tuletis.

Kiirus on füüsikas on tuntud mõiste. Keskmise kiiruse all mõistame suhet $v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, kus Δx on aja Δt jooksul läbitud teepikkus. Pikemalt:

$$\text{kiirus} = \frac{\text{koordinaadi muutus}}{\text{ajavahemiku pikkus}}.$$

Võttes $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ ning $\Delta t = t + \Delta t - t = \Delta t$, siis saame

$$v = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Analoogiliselt võime bioloogias defineerida populatsiooni muutumise (keskmise) kiiruse kui ajavahemiku Δt jooksul toimunud populatsiooni arvukuse muutuse ΔN suhte: $r = \frac{\Delta N}{\Delta t}$. Samuti kehtiks ka muude mingi muu suuruse muutumise kiiruse defineerimisel (kristalli kasvu kiirus ehk massi kasvamise kiirus, vedeliku paagist väljavoolamisel - vedeliku ruumala muutumise kiirus jne).

Hetkkiiruse (füüsikas) leiame $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$.

Üldjuhul, kui käsitleme funktsiooni $y = f(x)$, siis funktsiooni $f(x)$ tuletis on defineeritud järgmiselt:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (5.18)$$

Tuletise erinevaid tähistusi: kui $x \rightarrow c$ ehk $Q(x, f(x)) \rightarrow P(c, f(c))$, siis tuletis kohal $x = c$:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

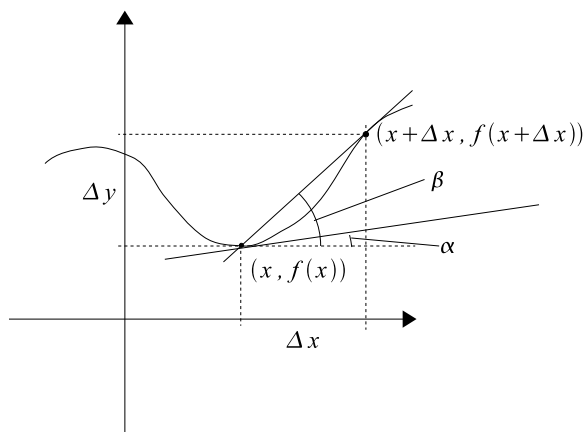
Tuletise Leibnizi tähistus:

$$f'(c) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=c}.$$

Leides tuletise kohal $x = c$ tuleb esmalt leida tuletis ja alles siis panna x asemele väärtus c .

5.1.1. Tuletise geomeetriline tähendus.

Tuletise geomeetriline tähendus tuleneb järgmisest joonisest. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta$. Joonistame funktsioonile



Joonis 29: Funktsioon ja tema puutuja.

$y = f(x)$ punktis x puutuja; puutuja tõus on $\tan \beta$. Minnes $\Delta x \rightarrow 0$, siis sirge, mille oleme tõmmanud

läbi punktide $(x, f(x))$ ning $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ läheneb puutujasirgele. Ka $\tan \beta \rightarrow \tan \alpha$. Seega võime kirjutada $\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

Tuletise geomeetiline tähendus - funktsiooni $f(x)$ puutuja tõus kohal $x = x_0$ on võrdne funktsiooni tuletisega punktis x_0 , st $\tan \beta_{x=x_0} = f'(x)|_{x_0} \equiv f'(x_0)$.

Teoreem. Kui funktsioonil $y = f(x)$ on olemas lõplik tuletis punktis x , siis on funktsioon selles punktis pidev.

Vastupidine ei ole alati tõene. St, funktsiooni pidevusest ei järeldu, et funktsioonil selles punktis leiduks tuletis.

Näide. Leiame funktsiooni $y = |x|$ tuletise punktis $x = 0$.

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geq 0, \\ -x, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Siis leiame piirväärtused, arvestades, et kui $x_0 = 0+$, siis $x \geq 0$ ning $\Delta y = x - x_0 = \Delta x$. Kui $x_0 = 0-$, siis $\Delta y = x - x_0 = -\Delta x$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} 1 = 1,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} -1 = -1.$$

Kuivõrd parem- ja vasakpoolne piirväärtus kohal $x = 0$ ei ole võrdsed, siis tuletis antud punktis puudub. Aga funktsioon on pidev. Seega - antud näide demonstreeris, et funktsiooni pidevusest ei järeldu diferentseeruvus.

5.1.2. Elementaarfunktsioonide tuletised. Diferentseerimisreeglid.

Elementaarfunktsioonide tuletised on toodud järgmises tablis.

$f(x)$	$f'(x)$
$c, c = \text{const}$	0
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x, (x > 0)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$a^x, (a > 0)$	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Diferentseerimisreeglid.

Eeldame, et funktsioonidel $u(x)$ ja $v(x)$ leiduvad tuletised, siis

1) $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$.

2) kui $c = \text{const}$, siis $(c \cdot u(x) = cu'(x))$.

3) $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$.

4) Kui leiduvad $u'(x)$ ja $v'(x)$, ning $v(x) \neq 0$, siis leidub ka $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'$, kusjuures

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

5.1.3. Pöörd- ja liitfunktsioonide tuletised.

Pöördfunktsiooni tuletis.

Eeldame, et funktsioonil $y = f(x)$ leidub mingis määramispiirkonna punktis x_0 pöördfunktsioon $x = \varphi(y)$. Juhul, kui funktsioonil $y = f(x)$ on kohal $x = x_0$ olemas tuletis $f'(x_0) \neq 0$, siis on pöördfunktsioonil olemas tuletis kohal $y_0 = f(x_0)$, kusjuures kehtib järgmine seos:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Oletame, funktsioonil $y = f(x)$ leidub pöördfunktsioon mingis määramispiirkonna osas X' (või kogu piirkonnas) $x = \varphi(y)$ ning $f'(x) \neq 0 \forall x \in X'$, siis võime pöördfunktsiooni tuletisfunktsiooni avaldada järgmiselt:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Liitfunktsiooni tuletis.

Olgu funktsioonid $\varphi(x)$ ja $f(u)$ diferentseeruvad vastavalt punktides x ja $u = \varphi(x)$, siis on liitfunktsioon $y = f[\varphi(x)]$ diferentseeruv punktis x ja tuletis avaldub kujul:

$$(f[\varphi(x)])' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \quad (5.19)$$

Ülesanne. Leida tuletis. $y = 2e^{2x}$.

Elementaarfunktsiooniks on $f(u) = e^u$. Siis võime võtta $\varphi(x) = 2x$. Vastavalt valemile (5.19) saame

$$y' = 2f'[\varphi(x)] = 2f'(u) \cdot \varphi'(x) = 2e^u \cdot (2x)' = 2e^u \cdot 2 = 4e^{2x}.$$

Ülesanne. Leida tuletis. $y = \ln \frac{1}{\sin x}$.

Siin on tegemist keerukama liitfunktsiooniga kujul $y = f[u(v(x))]$, kus $f(u) = \ln u$, $u(v) = \frac{1}{v}$ ning $v(x) = \sin x$. Siis üldvalemi kohaselt $y' = f'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(x)$. Seega

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln \frac{1}{\sin x}\right)' = (\ln u)' \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' \cdot (\sin x)' = \frac{1}{u} \cdot \left(-\frac{1}{v^2}\right) \cdot \cos x = -\frac{1}{\frac{1}{v}} \cdot \frac{1}{v^2} \cos x = \\ &= -\frac{v}{v^2} \cos x = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\cot x. \end{aligned}$$

Ülesanne. Leida tuletis funktsioonist $y = \sqrt{\cos^3(2x)}$.

Esmalt teisendame funktsiooni avaldist.

$$y = \sqrt{\cos^3(2x)} = (\cos(2x))^{\frac{3}{2}}.$$

Võtame nüüd $f(u) = u^{\frac{3}{2}}$, $u(v) = \cos v$, $v(x) = 2x$. Siis saame

$$\begin{aligned} y' &= f'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(x) = \left(u^{\frac{3}{2}}\right)' \cdot (\cos v)' \cdot (2x)' = \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}} \cdot (-\sin v) \cdot 2 = \\ &= -3(\cos(2x))^{\frac{1}{2}} \sin(2x) = -3 \sin(2x) \sqrt{\cos(2x)}. \end{aligned}$$

Näiteid tuletiste rakendamise kohta.

Näide. Kaugus kilomeetripostist, mis rattaga läbitakse, sõltub ajast järgmise valemi kohaselt: $s(t) = -0,2t^2 + 5t + 10(m)$. Milline on hetkkiiruse avaldis? Kiirenduse avaldis? Milline on hetkkiirus ajal $t = 2s$; $20s$? Kui kaugel on rattur kilomeetripostist nendel ajamomentidel?

$$\begin{aligned}v(t) &= \frac{ds}{dt} = s'(t) = -0,4t + 5, \\v(2) &= -0,4 \cdot 2 + 5 = 4,2m/s, \\v(20) &= -0,4 \cdot 20 + 5 = -3m/s, \\s(2) &= -0,2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 10 = 19,2m, \\s(20) &= 30m,\end{aligned}$$

Kiirendus on tuletis kiirusest (kiiruse muutumise kiirus):

$$a(t) = v'(t) = -0,4m/s^2.$$

Ajahetkel $t = 20s$ saadud negatiivne kiiruse avaldis näitab, et rattur sõidab kilomeetriposti poole.

Kõrgemat järku tuletised.

Eeldame, et funktsioon $y = f(x)$ on pidev ja diferentseeruv kohal mingis piirkonnas X ning, et $g(x)$ on funktsiooni $f(x)$ tuletisfunktsioon, $g(x) = f'(x)$. Eeldame, et ka funktsioon $g(x)$ on piirkonnas X pidev ja diferentseeruv, st leidub $h(x) = g'(x)$. Siis öeldakse, et $g'(x)$ on funktsiooni $f(x)$ teist järku tuletiseks ja tähistatakse $y''(x) = f''(x) = g'(x) = h(x)$. Analoogiliselt võime defineerida funktsiooni $f(x)$ kolmandat järku tuletise $f'''(x)$, ... ja üldisemalt n -järku tuletise: $f^{(n)}(x)$.

5.2. Funktsiooni ekstreemumid. Kasvamis- ja kahanemispiirkond. Funktsiooni uurimine.

Funktsiooni $y = f(x)$ statsionaarseks punktiks nimetatakse punkti c , kui $f'(c) = 0$.

Fermat' teoreem väidab, et kui funktsioonil on ekstremaalne väärtus määramispiirkonna X sisepunktis $x = c$, kus funktsioon on diferentseeruv, siis on punkt c statsionaarne punkt, st $f'(c) = 0$.

Olgu punkt a funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkonna sisepunkt. Öeldakse, et punktis a on lokaalne maksimum, kui leidub punkti a selline ümbrus u , et $f(x) \leq f(a)$, kui $x \in u$.

Öeldakse, et punktis a on lokaalne miinimum, kui leidub punkti a selline ümbrus u , et $f(x) \geq f(a)$, kui $x \in u$.

Funktsiooni kriitilisteks punktideks nimetatakse funktsiooni statsionaarseid punkte ning punkte, kus funktsioon pole diferentseeruv. Funktsioonil võib (aga ei pruugi) olla lokaalne ekstreemum vaid kriitilistes punktides.

Saab näidata, et kui funktsiooni $y = f(x)$ statsionaarses punktis a kehtib võrratus $f''(a) < 0$ ($f''(a) > 0$), siis on funktsioonil punktis a lokaalne maksimum (lokaalne miinimum).

Joonisel 22 on toodud funktsioon $f(x)$, mille määramispiirkond on $X = [x_0, x_5]$. Antud funktsiooni statsionaarseteks punktideks (x väärtused) on x_1, x_2, x_4 . Neis punktides on funktsiooni puutuja paralleelne x -teljega. Kriitiliste punktide hulka kuulub lisaks eelpoolnimetatudetele veel x_3 (aga mitte x_0 ja x_5 , mis pole funktsiooni määramispiirkonna sisepunktid (on otspunktid). Joonise järgi võib öelda, et lokaalseteks miinimumideks on punktid $(x_2, f(x_2))$ ja $(x_4, f(x_4))$; lokaalsed maksimumid on $(x_1, f(x_1))$ ning $(x_3, f(x_3))$.

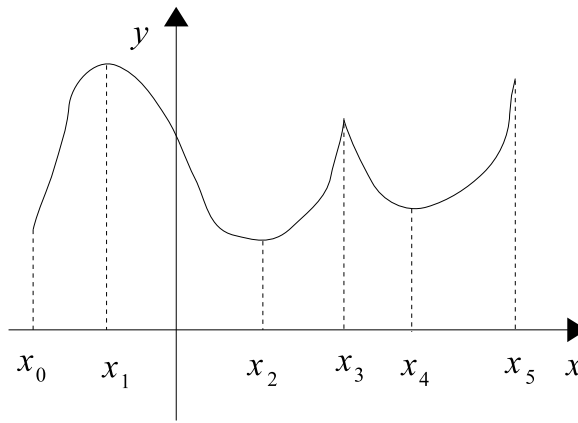
Funktsioon $y = f(x)$ on kasvav (kahanev), kui $x_1 < x_2$ järel, et $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Juhul, kui võrratusest $x_1 < x_2$ järel, et $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), siis öeldakse, et funktsioon on monotoonselt kasvav (kahanev).

Saab näidata, et kui $f'(x) > 0$ piirkonnas X , siis funktsioon on kasvav, siis on funktsioon selles piirkonnas kasvav (funktsiooni puutuja kalle on positiivne); kui $f'(x) < 0$ piirkonnas X , siis on funktsioon selles piirkonnas kahanev.

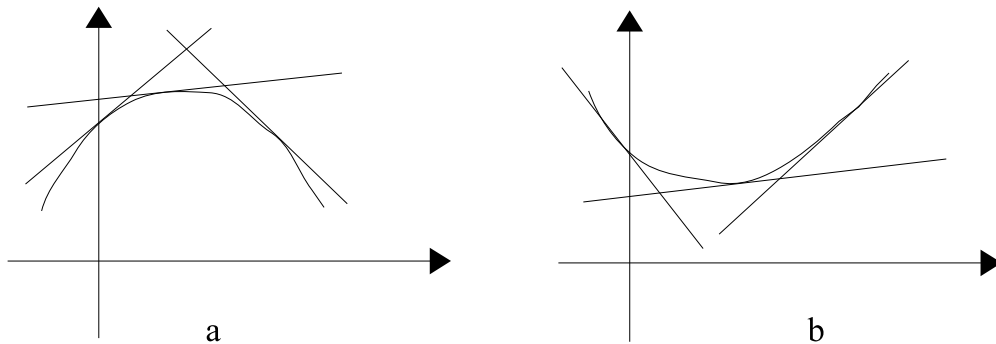
Seega, funktsiooni $f(x)$ kasvamispiirkond X^\uparrow ja kahanemispiirkond X^\downarrow :

$$X^\uparrow = \{x | f'(x) > 0\}, \quad X^\downarrow = \{x | f'(x) < 0\}.$$



Joonis 30: Funktsiooni kriitilised punktid ja ekstreemumid.

Joonisel 23a on toodud näide kumeruspiirkonna kohta, joonisel 23b on kujutatud funktsiooni nõgususpiirkonda.



Joonis 31: Funktsiooni kumerus ja nõgusus.

Definitsioon. Olgu funktsioon $f(x)$ defineeritud hulgal D nii, et arv $c \in D$. Siis leidub funktsioonil $f(x)$ **absoluutne maksimum** (globaalne maksimum) punktis c , kui $f(c) \geq f(x) \forall x \in D$.

Definitsioon. Olgu funktsioon $f(x)$ defineeritud hulgal D nii, et arv $c \in D$. Siis leidub funktsioonil $f(x)$ **absoluutne miinumum** (globaalne miinumum) punktis c , kui $f(c) \leq f(x) \forall x \in D$.

Funktsiooni absoluutse maksimumi (miinumumi) leidmiseks peab võrdlema omavahel funktsiooni väärtusi kõigi lokaalsetes maksimumides ning määramispiirkonna otspunktides.

Definitsioon Öeldakse, et funktsioon $y = f(x)$ on kumer (nõgus) piirkonnas X , kui selles piirkonnas kulgeb funktsiooni graafiku puutuja ülalpool (allpool) seda graafikut. Sellisel juhul öeldakse, et joon on kumer (nõgus).

Piirkonnas X diferentseeruv funktsioon on kumer (nõgus) selles piirkonnas parajasti siis, kui funktsiooni tuletsi on monotoonselt kasvav (kahanev) selles piirkonnas. St, kumeruspiirkond X^\cap ja nõgususpiirkond X^\cup on vastavalt:

$$X^\cap = \{x | f''(x) \leq 0\}, \quad X^\cup = \{x | f''(x) \geq 0\}.$$

Näide. Leida funktsiooni $y = f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2$ lokaalsed ekstreemumid, kasvamis- ja kahane- mispiirkonnad, käänupunktid ning nõgusus- ja kumeruspiirkonnad.

Leime funktsiooni esimese ja teise tuletise:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^3 - 9x^2 + 4x = x(4x^2 - 9x + 4), \\ f''(x) &= 12x^2 - 18x + 4. \end{aligned}$$

Funktsioonil $f(x)$ pole katkevuspunkte, seega võivad lokaalsed ekstreemumid olla vaid statsionaarsetes punktides. Leiame need:

$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 \approx 0,61, \quad x_3 \approx 1,64.$$

Lokaalsete ekstreemumite iseloomu määramiseks leiame funktsiooni $f(x)$ teise tuletise väärtused statsionaarsetes punktides:

$$f''(0) = 4 > 0; \quad f''(0,61) = -2,51 < 0; \quad f''(1,64) = 6,75 > 0.$$

Seega on punktides $x = 0$ ja $x = 1,64$ lokaalsed miinimumid ning punktis $x = 0,61$ lokaalne maksimum. Kasvamispiirkond on seega $X^\uparrow = \{x | (0 < x < 0,61) \wedge (x > 1,64)\}$, kahanemispiirkond on $X^\downarrow = \{x | (x < 0) \wedge (0,61 < x < 1,64)\}$. Funktsiooni väärtused neis punktides: $f(0) = 0$, $f(0,61) = 0,202$, $f(1,64) = -0,62$. Järelikult: $X_{min_1}(0; 0)$, $X_{min_2}(1,64; -0,62)$, $X_{max}(0,61; 0,202)$.

Funktsiooni käänupunktiks on punkt, kus funktsiooni graafik muutub nõgusast kumeraks või vastupidi, st selles punktis $f(x)'' = 0$.

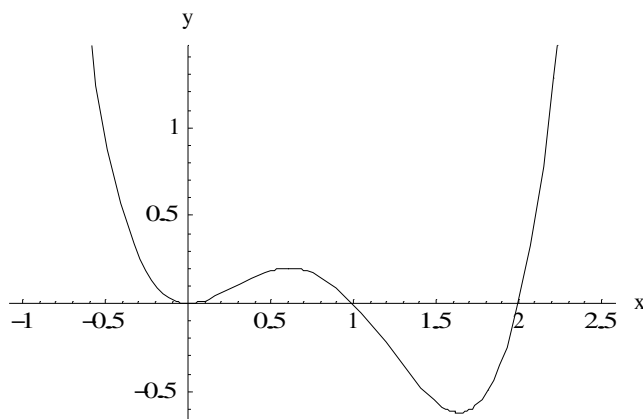
$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 0,271; \quad x_5 = 1,229.$$

Funktsiooni väärtused neis punktides: $f(0,271) = 0,093$, $f(1,229) = -0,226$. Käänupunktid on seega $X_{k_1}(0,271; 0,093)$, $X_{k_2}(1,229; -0,226)$. Kumeruspiirkonna leidmiseks peame lahendama võrratuse:

$$12x^2 - 18x + 4 < 0$$

Selle lahendamisel saame: $X^\cap = \{x | 0,271 < x < 1,229\}$. Analoogiliselt leiame nõgususpiirkonna jaoks $X^\cup = \{x | (x < 0,271) \wedge (x > 1,229)\}$.

Uuritud funktsiooni graafik on toodud joonisel 24.



Joonis 32: Funktsiooni uurimine.

Näide. Sõiduki liikumisvõrrand (võrrand, mis kirjeldab koordinaadi sõltuvust ajast) on $x(t) = -0,001t^3 + 0,5t^2 + 10t + 50$. Milline võrrand kirjeldab kiiruse ning milline kiirenduse sõltuvust ajast? Millal on sõiduk koordinaadi alguspunktis maksimaalsel kaugusel (positiivses suunas)? Milline on sõiduki maksimaalne ja milline minimaalne kiirus?

$$v(t) = x'(t) = -0,003t^2 + t + 10, a(t) = v'(t) = x''(t) = 1 - 0,006t.$$

Kaugus koordinaatide alguspunktist on maksimaalne, kui $x'(t_{max}) = 0$ ning $x'(t_{max}) < 0$. Statsionaarsed punktid:

$$x'(x) = 0, \quad \Rightarrow \quad t_1 = -9,72; t_2 = 343.$$

Füüsikas arvestatakse tavaliselt, et aeg $t > 0$, st - selline liikumisvõrrand kirjeldab sõiduki liikumist kui $t > 0$, tegelikult on ka mingi t_{max} määratud, st funktsiooni $x(t)$ määramispiirkond oleks $D = [0, t_{max}]$. Jätame antud juhul t_{max} arvestamata. Kuid t_1 jätame vaatluse alt välja. Leiame nüüd $x''(t)|_{t=t_2}$:

$$x''(343) = -1,05 < 0.$$

Seega on ajahetkel $t = 343$ kaugus koordinaatide alguspunktist maksimaalne ja see on võrdne $x(343) = 21591$ kauguseühikuga.

Kiirusel on maksimaalne (minimaalne) väärtus, kui $v'(t) = a(t) = 0$ ning $v''(t) = a'(t) < 0$ ($v''(t) = a'(t) > 0$).

$$v'(t) = a(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad t_3 = 167.$$

$a'(t) = -0,006$, seega $a'(167) = -0,006 < 0$, seega on kiirus maksimaalne hetkel $t_3 = 167$ ajahetket ning selle väärtus on $v(167) = 93,3$ kiiruseühikut. Minimaalne kiirus on antud ülesande tingimuste kohaselt ilmselt $-\infty$ (kiirus kasvab maksimaalse väärtuseni ja hakkab siis kahanema, läheb negatiivseks, st sõiduk hakkab liikuma algse liikumisega vastassuunas, st kiiruse absoluutväärtus kasvab lõpmatuseni). Füüsika seisukohalt on see võimatu.

Näide. Bakterite populatsiooni arvukust kirjeldab võrrand $n(t) = 1000e^{0,1t}(-0,5t^2 + 20t + 5)$. Milline on populatsiooni isendite maksimaalne arvukus? Minimaalne arvukus? Milline on arvukuse kasvu (arvukuse muutumise) maksimaalne kiirus? Aeg on antud tundides.

Populatsiooni arvukuse muutumise kiirus on $n'(t)$. $n(t)$ -l on maksimaalne väärtus (juhul, kui isendite arvukus ei kasva lõpmatuseni), kui $n'(t) = 0$ ning $n''(t) < 0$.

$$n'(t) = 1000 [0,1e^{0,1t}(-0,5t^2 + 20t + 5)] = 1000e^{0,1t}(-0,05t^2 + t + 20,5).$$

$$n'(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad 1000e^{0,1t}(-0,05t^2 + t + 20,5) = 0, \quad \Rightarrow \quad -0,05t^2 + t + 20,5 = 0.$$

Saame $t_1 = -12,6$, $t_2 = 32,6$. Kuivõrd $t_1 < 0$, siis jätame selle edasise vaatluse alt välja. $n''(t) = 1000e^{0,1t}(3,05 - 0,005t^2)$. $n''(32,6) = -58,9 < 0$. Seega on maksimaalne arvukus ajahetkel $t = 2,6$ tundi ning see on

$$n(32,6) = 3,272 \cdot 10^6.$$

Minimaalne arvukus on ilmselt 0, kui $t = 40,2$ tundi. (Isendite arvukus ei saa minna negatiivseks).

Kasvu kiirus $r(t) = n'(t)$ on maksimaalne, kui $r'(t) = 0$ ning $r''(t) < 0$.

$r'(t) = n''(t) = 0$, kui $t = 24,7$ tundi. $r''(t) = 1000e^{0,1t}(-0,0005t^2 - 0,01t + 0,305)$. $r''(24,7) = -2,92 < 0$. Seega on bakterite populatsiooni arvukuse kasvu kiirus maksimaalne hetkel $t = 24,7$ tundi ning see on $r(24,7) = 173000$ bakterit tunnis.

Näide. Ristküliku pinna maksimeerimine. Olgu ristküliku ümbermõõt $L = 160cm$. Milliste küljepikkuste a ja b korral on ristküliku pindala maksimaalne ja millised on need a ja b väärtused?

Ristküliku ümbermõõt $L = 2a + 2b$. Seega $b = \frac{L}{2} - a$.

Ristküliku pindala $S = a \cdot b = a \left(\frac{L}{2} - a \right) = a(80 - a)$.

Katkevuspunktid funktsioonil $S(a)$ puuduvad. Statsionaarsed punktid: $S'(a) = 0$:

$$S'(a) = (80 - a) - a = 80 - 2a = 0, \quad \Rightarrow \quad a = 40.$$

$b = 40$. $S = 1600$. Seega on ristküliku pindala maksimaalne kui, tema küljed on ühepikkused, st $a = b = 40$ (kujundiks on ruut).

Näide. Põllukultuuri hulk (mass) Y sõltub lämmastiku hulgast N sellel maalapil. Olgu see sõltuvus järgmine: $Y(N) = \frac{N}{1 + N^2}$, $N \geq 0$. Millise N väärtuse korral on viljasaak suurim?

Tegemist on tavalise ekstreemumülesandega. Funktsioonil $Y'(N)$ ei ole katkevuspunkte. Seega leidub ekstreemum vaid juhul, kui $Y(N) = 0$.

$$Y'(N) = \frac{1 + N^2 - N \cdot 2N}{(1 + N^2)^2} = \frac{1 - N^2}{(1 + N^2)^2} = \frac{(1 - N)(1 + N)}{(1 + N^2)^2}.$$

Viimane avaldis on võrdne nulliga siis, kui selle lugeja võrdub nulliga (nimetaja on sel avaldisel alati positiivne). Nullkohad: $N_1 = -1, N_2 = 1$. N_1 ei kuulu avaldise määramispiirkonda. Uurime, kas tegemist on lokaalse maksimumiga. Selleks leiame

$$Y''(N) = \frac{2N(N^2 - 3)}{(1 + N^2)^3}.$$

$Y''(1) = -0,5 < 0$. Juhul, kui $N = 1$ ühikut, siis on $Y(1) = 0,5$. Uurime nüüd saagikust määramispiirkonna otstes. Kui $N = 0$, siis $Y(0) = 0$, st saaki pole.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{(1 + N^2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{N^2} \frac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{N^2} + 1} = 0.$$

St, kui lämmastiku hulk põllul läheb väga suureks, siis saagikus kahaneb olematuks. Seega on põllukultuuri saagikus suurim, kui $N = 1$ ühikut.

5.3. Parameetriselt antud funktsiooni tuletis. Ilmutamata kujul antud funktsiooni tuletis.

Olgu funktsioon antud parameetriselt:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in T.$$

Siis piirkonnas, kus $x'(t) = \frac{dx}{dt} \neq 0$, võime **parameetriselt antud funktsiooni tuletise** $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ avaldada järgmiselt:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

NB! Siin tuleb jälgida kõikjal, et tuletis on võetud funktsiooni argumendi järgi.

Näide. Olgu funktsioon $y(x)$ antud parameetriselt:

$$\begin{cases} x = 2 \sin 2t \\ y = 3 \cos 2t \end{cases}$$

Leida selle funktsiooni tuletis $y'(x)$ punktis $t = 2$. Märgime, et antud parameetriselise funktsiooni graafikuks on ellips. Leiame:

$$y'(t) = -3 \cdot 2 \sin(2t). \quad x'(t) = 2 \cdot 2 \cos(2t).$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6 \sin(2t)}{4 \cos(2t)} = -1,5 \tan(2t).$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_t = 2 = -1,5 \tan 4 \approx -1,737$$

$\tan(2t)$ arvutamisel tuleb silmas pidada, et sarnastes ülesannetes tuleb trigonomeetriseliste funktsioonide argument anda radiaanides (kui pole eraldi just nurgakraadides antud). Seega ka $2t = 4 \text{ rad}$.

Ilmutamata kujul antud funktsiooni tuletis.

5.4. Funktsiooni diferentsiaal.

Funktsiooni $y = f(x)$ muut defineeritakse järgmiselt:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Öeldakse, et funktsioon on diferentseeruv (tal leidub tuletis), kui funktsiooni muut $\Delta f(x)$ avaldub kujul

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha, \quad \text{kusjuures} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0.$$

Siis leidub funktsioonil $f(x)$ lõplik tuletis punktis x .

Definitsioon. Funktsiooni muudu lineaarset osa $A \cdot \Delta x$ ehk $f'(x) \cdot \Delta x \equiv f'(x)dx$ nimetatakse funktsiooni diferentsiaaliks. St funktsiooni diferentsiaal:

$$\begin{aligned} df(x) &= f'(x)dx, \\ dy &= y' \cdot dx. \end{aligned}$$

Diferentsiaali rakendusi ligikaudsetes arvutustes.

Ligikaudsete arvutuste korral eeldatakse, et funktsiooni muut on ligikaudu võrdne funktsiooni diferentsiaaliga:

$$\Delta f(x) \approx df(x).$$

Tähistame nüüd edaspidi $x \rightarrow x_0$, siis $\Delta x \rightarrow x - x_0$, $x + \Delta x \rightarrow x$. Siis

$$\Delta f(x) = f(x_0) - f(x) = f'(x_0)\Delta x + \alpha.$$

Seega

$$f(x_0) \approx f(x) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Märkus: tuleb arvestada, et $f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}$, st alguses tuleb võtta tuletis funktsioonist $f(x)$, seejärel anda x asemel väärtus x_0 .

Näide. Leida $\sqrt{8,94}$.

Funktsioon $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Täpselt on teada $f(9) = \sqrt{9} = 3$. Seega on mõistlik võtta $x_0 = 3$. Siis $\Delta x = 8,94 - 9 = -0,06$. Leime funktsiooni $f(x)$ tuletise:

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Siis saame:

$$\sqrt{8,94} = f(8,94) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot (-0,06) = 3 + \frac{1}{6}(-0,06) = 2,99.$$

Seega, $\sqrt{8,94} \approx 2,99$.

Näide. Leida $\sin(0,03)$ ($0,03$ on antud radiaanides).

Võtame $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = 0,03$, siis $\Delta x = x - x_0 = 0,03$. $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$. Seega

$$\sin 0,03 = f(0,03) \approx f(0) + f'(0)\Delta x = \sin 0 + \cos 0 \cdot 0,03 = 0,03.$$

Näide. Leida $\ln 0,9$.

Võtame $f(x) = \ln x$. $x_0 = 1$, $x = 0,9$. Siis $\Delta x = 0,9 - 1 = -0,1$. $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$$\ln 0,9 \approx \ln 1 + \frac{1}{1}(-0,1) = -0,1.$$

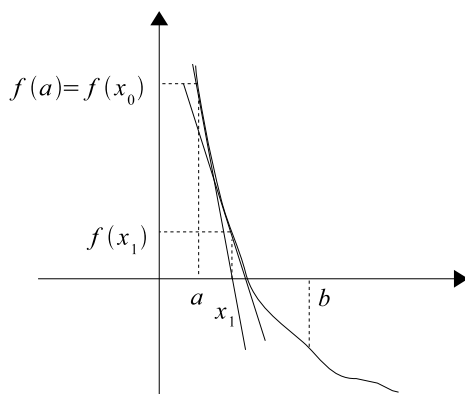
5.5. Tuletise rakendamine võrrandi ligikaudsel lahendamisel.

Olgu meil tegemist võrrandiga $h(x) = g(x)$. Viies $g(x)$ vasakule poole võrdusmärgi, saame uue võrrandi $h(x) - g(x) \equiv f(x) = 0$. Järgnevas näitame, kuidas leida selle võrrandi nullkohti Newtoni iteratsioonimeetodil. Selleks kaks eeldust:

1) peab olema teada lõik $[a, b]$, mille otspunktides on funktsiooni $f(x)$ väärtustel erinevad märgid, st $f(a) \cdot f(b) < 0$.

2) funktsiooni $f(x)$ on lõigus $[a, b]$ diferentseeruv ning leidub ka $f''(x)$.

Meetodi idee (graafiline selgitus): Tõmbame funktsiooni $f(x)$ graafikule kohal $x = a$ ja $x = b$, (st graafikul punktis $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$) puutujad. Valime neist punkti, mille korral puutujasirge lõikepunkt x -teljega jääb lõiku $[a, b]$. Olgu selleks näiteks a , tähistame selle $x_0 = a$ (vt ka joonis 25). Puutuja tõus on $f'(x_0)$, puutuja võrrand on



Joonis 33: Newtoni iteratsioonimeetodi graafiline selgitus.

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

kus $y_0 = f(x_0)$. Puutuja lõikepunkti x -teljega saame võttes puutuja võrrandis $y = 0$, st $f(x_0) = -f'(x_0)(x - x_0)$, millest lõikekoht:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Lõikekoht $x_1 = x$ on uueks lähendkohaks nullkoha jaoks. Nüüd võtame uueks lähenduspunktiks nullkoha jaoks x_0 asemele x_1 ja hakkame otsima paremat-täpsemat lähendkohta, see avaldub samasuguse valemiga:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Samamoodi n -järku lähendus:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

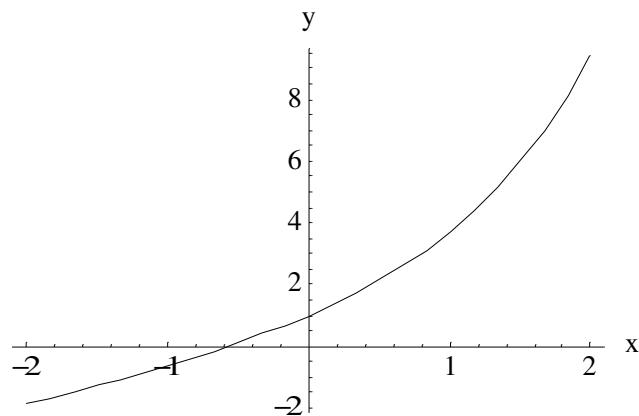
Newtoni iteratsioonimeetodit nullkohtade leidmiseks peaks rakendama nii kaua, kuni oleme saavutanud nõutava täpsuse.

Näide. Leiame funktsiooni $f(x) = e^x + x$ nullkoha kolme numbrikoha täpsusega. Esimese lähendpunkti leidmiseks skitseerime joonise (joonis 26): Nagu jooniselt näha, on esimene lõikepunkt $x = 0$ juures. Seega võime võtta $a = x_0 = 0$. Järgmise lähendpunkti jaoks on vaja teada ka tuletist:

$$f'(x) = e^x + 1.$$

Siis järgmise lähendpunkti jaoks saame:

$$x_1 = 0 - \frac{e^0 + 0}{e^0 + 1} = -\frac{1}{2}.$$



Joonis 34: Funktsiooni $f(x) = e^x + x$ graafik.

Analoogiliselt leiame

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{e^{-0,5} - 0,5}{e^{-0,5} + 1} = -0,5 - 0,0663 = -0,5663,$$

$$x_3 = -0,5663 - \frac{e^{-0,5663} - 0,5663}{e^{-0,5663} + 1} = -0,56714.$$

Edasised arvutused näitavad, et x_4 juba enam ei muuda enam kolme esimest numbrikohta. Seega on antud võrrandi ligikaudseks lahendiks $x \approx 0,567$.

5.6. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised. Osatuletiste rakendusi vea arvutamisel.

Vaatame esialgu kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$. Selle funktsiooni osatuletis muutuja x järgi defineeritakse analoogiliselt tavalise tuletisega:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Samamoodi defineeritakse osatulets muutuja y järgi:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Kuivõrd see alapunkt on suunatud rakenduslikuna vea arvutamise juhule, siis eeldame, et funktsioon $z = f(x, y)$ on pidev ja diferentseeruv vaadeldavas piirkonnas.

Näide. Leida osatuletised funktsioonist $z = \frac{x^2 + y}{x}$ f_x ja f_y .

Leides osatuletist x järgi, võtame y sel juhul konstandiks:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \left(\frac{x^2 + y}{x} \right)_x = \frac{2x \cdot x - (x^2 + y) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 + y}{x^2}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{x^2 + y}{x} \right)_y = \left(x + \frac{y}{x} \right)_y = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Juhul, kui meil on muutujaid rohkem kui kaks, on osatuletised teiste muutujate järgi analoogiliselt ülaltooduga defineeritavad.

5.6.1. Osatuletiste rakendamine vea hindamisel.

Olgu meil mingi füüsikaline suurus S määratud funktsioonina kolmest suurusest: $S = S(a, b, c)$. Ja eeldame, et suurust S ei saa otseselt mõõta, vaid arvutatakse suuruste a, b, c kaudu. Lihtsamal juhul võib suuruse S määramise viga hinnata järgmise seose abil:

$$\Delta S = \left| \frac{\partial S}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial S}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial S}{\partial c} \right| \Delta c, \quad (5.20)$$

kus $\Delta a, \Delta b$ ja Δc on vastavalt suuruste a, b ja c määramise mõõtevead (mõõtemääramatused). Pisut keerulisem (kuid täpsem valem vea või dispersiooni hindamiseks on järgmine:

$$\Delta S = \sqrt{\left| \frac{\partial S}{\partial a} \right|^2 (\Delta a)^2 + \left| \frac{\partial S}{\partial b} \right|^2 (\Delta b)^2 + \left| \frac{\partial S}{\partial c} \right|^2 (\Delta c)^2}. \quad (5.21)$$

Näide. isttahuka tihedus määratakse järgmiselt: mõõdetakse tema külgede pikkused, ja mass ning keha tihedus leitakse valemist:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a \cdot b \cdot h}.$$

Leida tiheduse määramise viga, kui $a = 21,3 \text{ mm}$, $b = 43,2 \text{ mm}$, $h = 12,1 \text{ mm}$ ning $\Delta a = \Delta b = \Delta h = 0,1 \text{ mm}$. $m = 82,20 \text{ g}$, $\Delta m = 0,05 \text{ g}$.

Üldvalemi (5.20) kohaselt

$$\Delta \rho = \left| \frac{\partial \rho}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial \rho}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial \rho}{\partial h} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right| \Delta m.$$

Seega

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \left| -\frac{m}{a^2 b h} \right| \Delta a + \left| -\frac{m}{a b^2 h} \right| \Delta b + \left| -\frac{m}{a b h^2} \right| \Delta h + \left| \frac{1}{a b h} \right| \Delta m = \\ &= \frac{m}{a^2 b h} \Delta a + \frac{m}{a b^2 h} \Delta b + \frac{m}{a b h^2} \Delta h + \frac{1}{a b h} \Delta m \\ \Delta \rho &= \frac{82,2}{21,3^2 \cdot 43,2 \cdot 12,1} \cdot 0,1 + \frac{82,2}{21,3 \cdot 43,2^2 \cdot 12,1} \cdot 0,1 + \frac{82,2}{21,3 \cdot 43,2 \cdot 12,1^2} \cdot 0,1 + \\ &+ \frac{1}{21,3 \cdot 43,2 \cdot 12,1} \cdot 0,05 = 0,00018 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} \end{aligned}$$

Näide bioloogiast.

1959.a uuris Holling, kuidas sõltub aja T jooksul kiskja poolt ära söödud saakloomade arv P_s saakloomade ruumilisest tihedusest N (täpsemalt pindtihedusest - kui palju saakloomi on ühe pinnaühiku, nt km^2 , kohta) ja saagi hankimisele kuluvast ajast T_s . T_s on aeg, mis läheb saagi püüdmisele ja ärasöömisele. Holling pani selle sõltuvuse väljendamiseks kirja järgmise seose:

$$P_s = \frac{aNT}{1 + aT_s N}.$$

$a > 0$ on kiskja "ründamise kiirus" - näitab, mitu korda ajaühikus (tund, päev, nädal) kiskja saaki ründab.

Uurime, kuidas mõjutab ärasöödud loomade arvukust ühele loomale kuluv aeg. St, mis juhtub, kui T_s suureneb? Leiame osatuletise:

$$\frac{\partial P_s}{\partial T_s} = -\frac{aNT}{(1 + aT_s N)^2} \cdot a \cdot N = -\frac{a^2 N^2 T}{(1 + aT_s N)^2}.$$

Kuivõrd leitud avaldise nimetaja on alati positiivne ning ka a^2N^2 on alati positiivsed, siis iga $T > 0$ korral on leitud avaldis negatiivne, st $\frac{\partial P_s}{\partial T_s} < 0$ ning seega T_s suurenemisel P_s väheneb - aja T jooksul ärasöödud saakloomade arv väheneb.

$$\frac{\partial P_s}{\partial N} = \frac{aT(1 + aT_s N) - aNT \cdot aT_s}{(1 + aT_s N)^2} = \frac{aT}{(1 + aT_s N)^2} > 0.$$

Seega, saakloomade tiheduse N kasvamisel aja T jooksul ärasöödud loomade arv suureneb.

6. Integraalid.

6.1. Määramata integraal.

Definitsioon. Funktsiooni $y = F(x)$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ algfunktsiooniks piirkonnas X , kui $F'(x) = f(x)$, kui $x \in X$.

Integraalarvutuse üks põhiülesandeid - kuidas leida funktsiooni tuletise järgi ($f(x)$) funktsioon ($F(x)$). Kui $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon, siis on selleks ka iga funktsioon $G(x) = F(x) + C$, kus C on suvaline konstant. Selle kohta öeldakse, et algfunktsioon $F(x)$ on määratud otsaliidetava ehk aditiivse konstandi täpsusega.

Määramata integraal tähistatakse järgmiselt:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Integraalide tabel.

$$\begin{aligned}\int 0dx &= C \\ \int dx &= x + C \\ \int x^\alpha &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1 \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= 2\sqrt{x} + C \\ \int \frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{x} + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C = -\arccos x + \bar{C} \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + \bar{C}\end{aligned}$$

Määramata integraali omadusi:

Kui leiduvad määramata integraalid $\int f(x)dx = F(x) + C_1$ ja $\int g(x)dx = G(x) + C_2$, siis kehtib:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C.$$

St, integraal summast on integraalide summa ja nullist erineva konstandi võib alati integraali märgi alt välja tuua.

6.1.1. Muutujate vahetus määramata integraalis.

Olgu funktsioonil $f(x)$ olemas algfunktsion $F(x)$ piirkonnas X ning $x = \varphi(t)$ on piirkonnas T diferentseeruv funktsioon ning selle funktsiooni väärtused kuuluvad piirkonda X (St kui $t \in T$, siis $x = \varphi(t) \in X$). Siis kehtib seos:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt.$$

Erijuhtum. Olgu $\int f(x)dx = F(x) + C$, siis

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C,$$

kus a ja b on konstandid. Näitame seda. Lähtume seosest $\int f(x)dx = F(x) + C$. Leidmaks $\int f(ax + b)dx$ teeme muutujate vahetuse:

$$ax + b = t \quad \Rightarrow \quad adx = dt \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{a},$$

seega

$$\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax + b) + C. \quad (6.22)$$

Näiteid muutujate vahetuse kohta integreerimisel.

1. $\int \sin(2x)dx$. Teeme muutujate vahetuse $2x = t$. Siis $2dx = dt$, seega $dx = \frac{1}{2}dt$. Saame:

$$\int \sin(2x)dx = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C.$$

2. $\int xe^{-x^2}dx$. Teeme muutujate vahetuse $x^2 = t$. Siis $dt = 2x dx$. Seega

$$\int xe^{-x^2}dx = \int e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

3. $\int \cos^4 x \sin x dx$. Muutujate vahetus $t = \cos x$, siis $dt = -\sin x dx$. Saame

$$\int \cos^4 x \sin x dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

4. $\int \frac{dx}{x^2 + 5}$. Antud integraal on sarnane tabeliintegraalile $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + C$. Teisendame esmalt integraali:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5} = \int \frac{dx}{5 \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}.$$

Muutujate vahetus: $\frac{x}{\sqrt{5}} = t, \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{5}} = dt, dx = \sqrt{5}dt$.

$$\frac{1}{5} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan t + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

5. $\int \frac{6xdx}{8x^2 + 9}$. Muutujate vahetus $t = 8x^2 + 9$, siis $dt = 16xdx$, $dx = \frac{1}{16}dt$.

$$\int \frac{6xdx}{8x^2 + 9} = \frac{6}{16} \int \frac{dt}{t} = \frac{3}{8} \ln |t| + C = \frac{3}{8} \ln(8x^2 + 9) + C.$$

6. $\int \frac{2dx}{1-3x}$. See integraal käib valemi (6.22) alla:

$$\int \frac{2dx}{1-3x} = 2 \int \frac{dx}{1-3x} = -\frac{2}{3} \ln|1-3x| + C$$

7. $\int \frac{4x+2}{x^2+6x+12} dx$. Antud ülesanne on keerulisem ja tuleb lahendada järgmiselt. Kui me teeme muutuja vahetuse $t = x^2 + 6x + 12$, siis $dt = (2x+6)dx$. Seega teisendame esmalt integraali:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x+2}{x^2+6x+12} dx = 2 \int \frac{2x+1}{x^2+6x+12} dx = 2 \int \frac{2x+6-5}{x^2+6x+12} dx = \\ &= 2 \int \frac{2x+6}{x^2+6x+12} - 10 \int \frac{dx}{x^2+6x+12} := I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Esimeses integraalis teeme ülalmainitud muutuja vahetuse:

$$I_1 = 2 \int \frac{2x+6}{x^2+6x+12} = 2 \int \frac{dt}{t} = 2 \ln|t| = 2 \ln(x^2+6x+12) + C_1 = \ln(x^2+6x+12)^2 + C_1.$$

Teise integraali nimetaja on 2.järku polünoom, mida ei anna lahutada kahe esimest järku polünoomi korrutiseks (me ei saa esitada seda kujul $(x+a)(x+b)$, kus a ja b on mingid konstandid). Teisendame teist integraali:

$$\begin{aligned} I_2 &= -10 \int \frac{dx}{x^2+6x+12} = -10 \int \frac{dx}{x^2+6x+9+3} = -10 \int \frac{dx}{(x+3)^2+3} = \\ &= -\frac{10}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{3}\right)^2+1} = -\frac{10}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \end{aligned}$$

Nüüd teeme muutujate vahetuse $u = \frac{x+3}{\sqrt{3}}$, siis $du = \frac{dx}{\sqrt{3}}$, ehk $dx = \sqrt{3}du$. Kokkuvõttes saame

$$I_2 = -\frac{10\sqrt{3}}{3} \int \frac{du}{u^2+1} = -\frac{10}{\sqrt{3}} \arctan u + C_2 = -\frac{10}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+3}{\sqrt{3}} + C_2.$$

Lõppvastus:

$$\int \frac{4x+2}{x^2+6x+12} dx = \ln(x^2+6x+12)^2 - \frac{10}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+3}{\sqrt{3}} + C.$$

6.1.2. Ositi integreerimine.

Korrutise integreerimiseks pole üldist valemit olemas, osaliselt asendab seda ositi integreerimise valem.

Kui leidub integraal $\int v(x)u'(x)dx$, kus $u(x)$ ja $v(x)$ on diferentseeruvad funktsioonid, siis on olemas ka integraal $\int u(x)v'(x)dx$, kusjuures kehtib seos:

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))' dx - \int u'(x)v(x)dx = (u(x)v(x)) - \int u'(x)v(x)dx. \quad (6.23)$$

Tuletame valemi (6.23). Võtame tuletise funktsioonide u ja v korrutisest:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

siit saame

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$

Korrutame saadud võrduse mõlemat poolt dx -ga ning integreerime:

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx = (u(x)v(x)) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Viimane avaldis ongi ositi integreerimise valem. Tähistades diferentsiaalid $du = u'(x)dx$ ja $dv = v'(x)dx$, ning jättes funktsioonide argumentid kirjutamata, saame lihtsamalt:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Näited ositi integreerimise kohta.

1. $\int x \sin x dx$. Võtame

$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx, \\ dv &= \sin x dx, & v &= \int \sin x dx = -\cos x. \end{aligned}$$

Saame valemi (6.23) kohaselt:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - (-\int \cos x dx) = -x \cos x + \sin x + C.$$

2. $\int x \ln x dx$. Võtame

$$\begin{aligned} u &= \ln x, & du &= \frac{1}{x} dx, \\ dv &= x dx, & v &= \int x dx = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Saame:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

3. $\int 2xe^{3x} dx$.

$$\begin{aligned} u &= 2x & \Rightarrow & du = 2dx \\ dv &= e^{3x} & \Rightarrow & v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}. \end{aligned}$$

v leidmisel kasutasime muutuja vahetust (vt valem (6.22)).

$$\int 2xe^{3x} dx = \frac{2}{3}xe^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx = \frac{2}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

4. $\int \ln x dx$.

$$\begin{aligned} u &= \ln x, & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= 1 \cdot dx & v &= x. \end{aligned}$$

Saame

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

5. $\int x^2 e^{2x} dx$. Siin tuleb ositi integreerimist kaks korda rakendada.

$$u = x^2, \quad du = 2x dx,$$

$$dv = e^{2x} dx, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{2}{2} \int x e^{2x} dx = I.$$

Viimase avaldise teise liikme (integraali) jaoks rakendame uuesti ositi integreerimist:

$$u = x, \quad du = dx,$$

$$dv = e^{2x} dx, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Kokkuvõttes saame

$$I = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

6.1.3. Ratsionaalmurdude integreerimine.

Ratsionaalmurruks või ratsionaalfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kus $P(x)$ ja $Q(x)$ on muutuja x polünoomid.

Paljude funktsioonide integreerimisel on võimalik teha niisugune muutujate vahetus, mis teisendab integraaliluse funktsiooni ratsionaalfunktsiooniks.

Ratsionaalfunktsioonide näited:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4 - x + 2}, \\ f_2(x) &= \frac{x^5 + 8x^2}{x - 3}, \\ f_3(x) &= \frac{2}{4 + x^3}. \end{aligned}$$

Kui ratsionaalmurru nimetaja aste ei ületa lugeja astet, nimetatakse murd liigmurruks. Kui aga nimetaja aste on suurem lugeja astmest, siis lihtmurruks. Funktsioonid f_1 ja f_2 on liigmurrud, f_3 on lihtmurd. Saab näidata, et iga liigmurd on ühesel viisil avaldatav kujul

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

kus $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ on lihtmurd ja $R(x)$ on polünoom. (vt Piskunov. Diferentsiaal- ja integraalarvutus. I, II). Seega ka integraal

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int R(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx.$$

Polünoomi integreerimine on väga lihtne. Seega taandub ratsionaalmurru integreerimine lihtmurru integreerimisele.

Vaatame edasi vaid lihtmurde $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (jätame indeksi 1 ära). Iga polünoom $Q(x)$ on avaldatav kujul

$$Q(x) = (x - a)^k \dots (x - b)^l (x^2 + px + q)^\lambda \dots (x^2 + rx + s)^\mu,$$

kus a ja b on reaalarvulised nullkohad, mille kordused on vastavalt k, \dots, l . Ruutkolmliikmetele $x^2 + px + q, \dots, x^2 + rx + s$ puuduvad reaalarvulised nullkohad, nende diskriminandid on negatiivsed.

A Ratsionaalmurdude lahutamine summaks.

Kui lihtmurru $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nimetaja on kujul

$$Q(x) = (x - a)^k \dots (x - b)^l (x^2 + px + q)^\lambda \dots (x^2 + rx + s)^\mu,$$

siis kehtib niinimetatud osamurdudeks lahutamise valem:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k} + \dots + \\ &+ \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x - b)^l} + \dots + \\ &+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \dots + \\ &+ \frac{R_1 x + S_1}{x^2 + rx + s} + \frac{R_2 x + S_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2 + rx + s)^\mu}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Siin $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l, M_1, N_1, \dots, M_\lambda, N_\lambda, \dots, R_\mu, S_\mu$ on tundmatud kordajad, mida on võimalik määrata spetsiaalsete meetodite abil.

Näide. Lahutada osamurdudeks ratsionaalfunktsioon $\frac{2x}{(x - 2)^2(x + 3)}$.

Vastavalt valemile (6.24) saame:

$$\frac{2x}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B}{x+3}.$$

Laiendame parema poole esimest murdu $(x-2)(x+3)$ -ga, teist liidetavat $(x+3)$ -ga ja kolmandat $(x-2)^2$ -ga ning viime siis saadud avaldise ühisele nimetajale:

$$\frac{2x}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_1(x-2)(x+3) + A_2(x+3) + B(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}.$$

Viimase võrduse vasakul ja paremal poolel olevate murdude nimetajad on võrdsed. Seega on võrdsed ka lugejad, saame avaldise kordajate A_1, A_2, B määramiseks:

$$2x = A_1(x-2)(x+3) + A_2(x+3) + B(x-2)^2.$$

Sellest võrdusest otsitavate kordajate määramiseks on kaks viisi: kas anname x -le ette erinevad väärtused (antud juhul 3 väärtust) ja saame vajaliku hulga võrrandeid või võrdleme x erinevate astmete kordajaid võrduse mõlemal poolel. Anname ette erinevad väärtused:

$$x = 2: \quad 2 \cdot 2 = A_1 \cdot 0 + A_2(2+3) + B \cdot 0.$$

Siit saame $A_2 = 0,8$.

$$x = -3: \quad -6 = B(-5)^2 = 25B.$$

Seega $B = -0,24$.

$$x = 0: \quad 0 = -6A_1 + 3 \cdot 0,8 - 0,24 \cdot 4.$$

$A_1 = -0,24$. Oleme saanud:

$$\frac{2x}{(x-2)^2(x+3)} = -\frac{0,24}{x-2} + \frac{0,8}{(x-2)^2} - \frac{0,24}{x+3}.$$

B Osamurdude integreerimine.

Osamurde on nelja tüüpi.

1. $\frac{A}{x-a}$.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

2. $\frac{A}{(x-a)^k}$.

Integraali $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx$ leidmiseks teeme muutujate vahetuse $(x-a) = t$, $dx = dt$. Siis saame

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \int \frac{A}{t^k} dt = A \int t^{-k} dt = A \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, kus $p^2 - 4q < 0$. Sellise murru üldkujulist integreerimist siin ei käsitle (vt Piskunov. Integraal- ja diferentsiaalarvutus I.). Näited sellise murru integreerimise kohta on toodud alapunktis 6.1.1, näited 4 ja 7.

4. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}^k$. Siin lähemalt ei käsitle. (Vt Piskunov. Integraal- ja diferentsiaalarvutus I.).

Näide. Leida $\int \frac{3x dx}{x^2 - 5x + 6}$.

Integraalialune avaldis on lihtmurd, kusjuures nimetaja diskriminant $(-5)^2 - 4 \cdot 6 > 0$. Seega saab nimetaja lahutada korrutiseks:

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2}, \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Seega $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ ja järelikult saame integraalialuse murru lahutada summaks:

$$\frac{3x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}.$$

Laiendades viimase võrduse paremal poolel olevat esimest liidetavat $(x - 2)$ -ga ja teist $(x - 3)$ -ga, saame

$$\frac{3x}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{A(x - 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x - 2)}.$$

Võrdleme nüüd viimase võrduse vasakul ja paremal poolel olevate murdude lugejaid:

$$3x = A(x - 2) + B(x - 3).$$

Anname x -le erinevad väärtused:

$$\begin{aligned} x = 2: \quad 3 \cdot 2 &= 0 - B, & \Rightarrow & \quad B = -6, \\ x = 3, \quad 3 \cdot 3 &= A + 0, & \Rightarrow & \quad A = 9. \end{aligned}$$

Otsitav integraal lihtsustub siis järgmiselt:

$$\int \frac{3x dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \left(\frac{9}{x - 2} - \frac{6}{x - 3} \right) dx = 9 \int \frac{dx}{x - 2} - 6 \int \frac{dx}{x - 3} = 9 \ln |x - 2| - 6 \ln |x - 3| + C.$$

6.2. Määratud integraal.

6.2.1. Riemanni integraal.

Olgu lõigus $[a, b]$ antud funktsioon $y = f(x)$. Jaotame lõigu $[a, b]$ suvaliselt n osaks punktidega $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$ (vt joonis 27). Valime nüüd igas lõigus $[x_{i-1}, x_i]$ ühe punkti ξ_i . Tähistame veel $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, mis on i -nda lõigu pikkus. Nüüd moodustame summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (6.25)$$

(Võime valida ka kõik lõigud Δx_i ühe pikkused). Vaatleme nüüd suurust $\lambda = \max_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i$.

Definitsioon. Kui on olemas lõplik piirväärtus

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma,$$

siis nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ integreeruvaks Riemanni mõttes lõigus $[a, b]$, seda piirväärtust aga nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks rajades a -st b -ni ja tähistatakse $\int_a^b f(x) dx$.

Seega

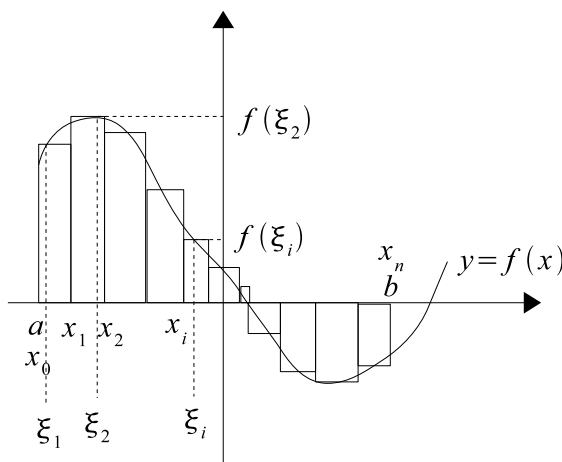
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (6.26)$$

Summat σ nimetatakse integraalsummaks (vahel ka Riemanni summaks). Seega on integraal integraalsummade piirväärtus.

Piirprotsess $\lambda \rightarrow 0$ garanteerib ka seda, et $n \rightarrow \infty$, kuid mitte vastupidi (vastupidi kehtiks juhul, kui kõik Δx_i -d ühesugused).

Juhul, kui funktsioon $f(x)$ on mittenegatiivne, siis võrdub integraalsumma vastava treppkujundi pindalaga. Piirprotsessis $\lambda \rightarrow 0$ läheneb integraalsumma vastavale kõvertrapetsile. Seega võrdub integraal

$\int_a^b f(x) dx$ vastava kõvertrapetsi pindalaga.



Joonis 35: Integraalsumma.

6.2.2. Määratud integraali omadused.

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$.

$$2. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

3. Kui $f(x)$ on integreeruv lõikudes $[a, c]$ ja $[c, b]$, siis on ta integreeruv ka lõigus $[a, b]$, kusjuures

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (6.27)$$

4. Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on integreeruvad lõigus $[a, b]$, siis mistahes konstantide α ja β korral on funktsioon $\alpha f(x) + \beta g(x)$ integreeruv selles lõigus, kusjuures

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx. \quad (6.28)$$

5. Kui lõigus $[a, b]$ integreeruvad funktsioonid f ja g rahuldavad selles lõigus võrratust $f(x) \leq g(x)$, siis rahuldavad samasugust võrratust ka määratud integraalid;

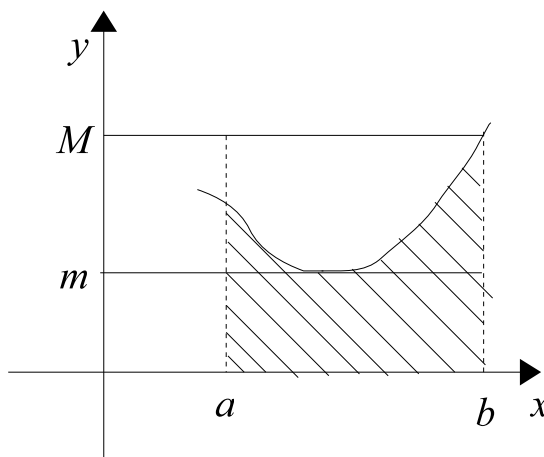
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \quad (6.29)$$

6. Kui funktsioon $f(x)$ on lõigus $[a, b]$ integreeruv ja mittenegatiivne funktsioon, siis

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \quad (6.30)$$

7. Kui $m \leq f(x) \leq M$ iga $x \in [a, b]$, siis kehtib järgmine võrratus:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \quad (6.31)$$



Joonis 36: Integraalsumma.

Ülaltoodult jooniselt on näha, et $m(b-a)$ moodustab väiksema ristküliku pindala. $M(b-a)$ on pindalaks ristkülikule, mis on piiratud x -telje, joone $y = M$ ning joontega $x = a$, $x = b$ -ga. Kuivõrd vastavalt määratud integraali geomeetrilisele interpretatsioonile on positiivse funktsiooni määratud integraal tõlgendatav funktsiooni ja x -telje vahele jääva pinna pindalana, siis jooniselt selge, et see pindala

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ on suurem kui } m(b-a) \text{ ning väiksem kui } M(b-a).$$

Eeldame, et funktsioon $f(x)$ on pidev lõigus $[a, b]$, siis on tal ses lõigus olemas algfunktsioon $F(x)$. Siis kehtib

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (6.32)$$

Valem (6.32) on Newton-Leibnizi valem. Määratud integraali võib algfunktsiooni abil anda ka kuju (teine tähistus):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ülesanne 1. Leida $\int_2^5 (\frac{1}{2x} - x^3)dx$.

$$\begin{aligned} \int_2^5 (\frac{1}{2x} - x^3)dx &= \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{dx}{x} - \int_2^5 x^3 dx = \frac{1}{2} \ln|x|\Big|_2^5 - \frac{1}{4} x^4 \Big|_2^5 = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2) - \frac{1}{4} (5^4 - 2^4) \approx -151,8. \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Näidata, et $0 \leq \int_0^\pi \sin x dx \leq \pi$.

Esmalt arvestame, et $\forall x \in [0, \pi]$ on $0 \leq \sin x \leq 1$. Seega kehtib vastavalt omadusele 6 $0 \leq \int_0^\pi \sin x dx$. Kasutades omaduse 7 võrratuse paremat poolt (teist võrratuse osa) võtame $M = 1$, $a = 0$, $b = \pi$ ning $M(b - a) = 1 \cdot (\pi - 0) = \pi$. Seega kehtib $\int_0^\pi \sin x dx \leq \pi$ ning järelikult ka kogu võrratus.

Integraalarvutuse põhiteoreem. Kui $f(u)$ on pidev funktsioon lõigus $u \in [a, b]$, siis funktsioon

$$F(x) = \int_a^x f(u)du, \quad \text{kus} \quad a \leq x \leq b \quad (6.33)$$

on pidev funktsioon lõigus $x \in [a, b]$ ning diferentseeruv vahemikus $x \in]a, b[$, kusjuures

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x). \quad (6.34)$$

Ülesanne 3. Leida tuletis

$$\frac{d}{dx} \int_a^x (\sin u - e^{-u})du, \quad \text{kui} \quad x > 0.$$

Esmalt arvestame, et funktsioon $f(u) = \sin u - e^{-u}$ on pidev kui $u > 0$, st teoreemi eeldus kehtib. Siis vastavalt integraalarvutuse põhiteoreemile

$$\frac{d}{dx} \int_a^x (\sin u - e^{-u})du = \sin x - e^{-x}$$

piirkonnas $x > 0$.

Leibnizi reegel. Kui funktsioonid $g(x)$ ja $h(x)$ on diferentseeruvad funktsioonid ning $f(u)$ on pidev funktsioon lõigus $u \in [g(x), h(x)]$, siis kehtib järgmine seos:

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(u)du = f[h(x)]h'(x) - f[g(x)]g'(x). \quad (6.35)$$

Ülesanne 4. Leida järgmine tuletis: $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^1 u^2 du$.

Võrreldes antud ülesannet valemiga (6.35) leiame, et $f(u) = u^2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = 1$. Siis saame

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^1 u^2 du = 1^2 \cdot 1' - (\sin x)^2 (\sin x)' = 0 - \sin^2 x \cdot \cos x.$$

Ülesanne 5. Leida tuletis $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} e^u du$.

Kasutades Leibnizi reeglit saame

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} e^u du = e^{x^3} (x^3)' - e^{x^2} (x^2)' = 3x^2 e^{x^3} - 2x e^{x^2}.$$

6.3. Ositi integreerimine ja muutujate vahetus määratud integraalis.

6.3.1. Ositi integreerimine

Olgu $u(x)$ ja $v(x)$ lõigus $[a, b]$ diferentseeruvad funktsioonid ning $u'(x)$, $v'(x)$ integreeruvad funktsioonid lõigus $[a, b]$. Siis kehtib ositi integreerimisel seos:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx$$

ehk lihtsamalt kirjutatuna:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Ülesanded Leida ositi integreerides järgmised integraalid.

1. $\int_1^3 x^2 \ln x dx$,

$$\begin{aligned} u &= \ln x, & u' &= \frac{1}{x} dx \\ v' &= x^2 & v &= \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{3} \int_1^3 \frac{x^3}{x} dx = \frac{1}{3} (3^3 \ln 3 - 1^3 \ln 1) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^3 = \\ &= 9 \ln 3 - \frac{1}{9} (27 - 1) = 9 \ln 3 - \frac{26}{9}. \end{aligned}$$

2. $\int_1^4 \sqrt{2x} \ln \sqrt{2x} dx$

$$\begin{aligned} u &= \ln \sqrt{2x}, & u' &= \frac{1}{\sqrt{2x}} (\sqrt{2x})' = \frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{2x} \\ v' &= \sqrt{2x} = \sqrt{2} x^{\frac{1}{2}}, & v &= \sqrt{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{x^3}. \end{aligned}$$

Rakendades ositi integreerimise valemit saame seega

$$\begin{aligned} \int_1^4 \sqrt{2x} \ln \sqrt{2x} dx &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{x^3} \ln \sqrt{2x} \Big|_1^4 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2x} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sqrt{4^3} \ln \sqrt{8} - \\ &- \sqrt{1^3} \ln \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3} \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = 7.51 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = 7.51 - 3, 20 = 5, 31. \end{aligned}$$

6.3.2. Muutujate vahetus määratud integraalis.

Olgu $u = g(x)$, siis

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du. \quad (6.36)$$

Ülesanne 3. Leiame integraali $\int_{-1}^3 x^2 e^{-x^3} dx$ muutujate vahetuse abil.

Võtame uue muutuja $u = -x^3$ (st $u = g(x) = -x^3$), siis

$$du = g'(x)dx = (-x^3)'dx = -2x^2 dx, \quad \Rightarrow \quad x^2 dx = -\frac{1}{2} du.$$

Uued rajad: $g(-1) = (-1)^3 = -1$, $g(3) = 27$. Kokkuvõttes saame

$$\int_{-1}^3 x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{27} e^u du = -0,5(e^u) \Big|_{-1}^{27} = -0,5(e^{27} - e^{-1}) = -1,226 \cdot 10^{11}.$$

Ülesanne 4. Leida määratud integraalid a) $\int_2^4 \frac{3x^3}{2x^4+2} dx$, b) $\int_0^3 \frac{x}{x^4+1} dx$.

a) $\int_2^4 \frac{3x^3}{2x^4+2} dx = \int_2^4 \frac{x^3 dx}{2x^4+2}$. Siin tuleb tähele panna, et juhul, kui võtaksime uueks muutujaks antud murru nimetaja, st $u = g(x) = 2x^4 + 2$, siis sellest tuletise võtmisel väheneb x aste ühe võrra: $du = g'(x)dx = 8x^3 dx$. St - antud murru lugeja erineb du -st vaid mingi konstant korda: $x^3 dx = \frac{1}{8} du$.

$$\int_2^4 \frac{3x^3}{2x^4+2} dx = \frac{3}{8} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} = \frac{3}{8} \ln |u| \Big|_{u_1}^{u_2} = \frac{3}{8} \ln |2x^4+2| \Big|_2^4 = \frac{3}{8} (\ln |2 \cdot 4^4+2| - \ln |2 \cdot 2^4+2|) \approx 1,018$$

b) $\int_0^3 \frac{x}{x^4+1} dx$. Siin ei saa rakendada eelmise ülesande muutujate vahetust, kuivõrd lugejas on x aste mitte ühe, vaid kolme astme võrra väiksem. Siin peaks uueks muutujaks võtma $u = g(x) = x^2$. Sel juhul saame

$$du = (x^2)'dx = 2x dx, \quad \Rightarrow \quad x dx = \frac{1}{2} du.$$

$$\int_0^3 \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2} \arctan u \Big|_0^3 = \frac{1}{2} \arctan x^2 \Big|_0^3 = \frac{1}{2} (\arctan 3 - \arctan 0) = \frac{1}{2} 1,25 = 0,625$$

Märkus. Tulemus tuleb arkusfunktsioonide korral anda kindlasti radiaanides!

Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks: Leida järgmised integraalid kasutades muutujate vahetust:

$$1) \int_0^\pi -3x^2 \sin x dx, \quad 2) \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx \quad 3) \int_0^3 \frac{6x^2+16x}{x^3+4x^2+7} \quad 4) \int_{0,5}^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

Vastused: 1) -17,61; 2) $\frac{\pi}{8} - 0,25$; 3) 4,605; 4) 4,67.

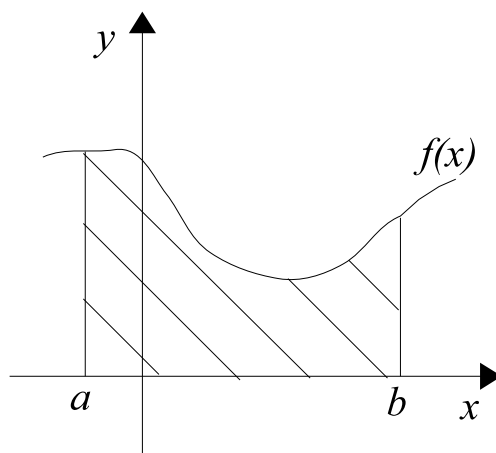
6.4. Määratud integraali rakendusi.

6.4.1. Pindala arvutamine.

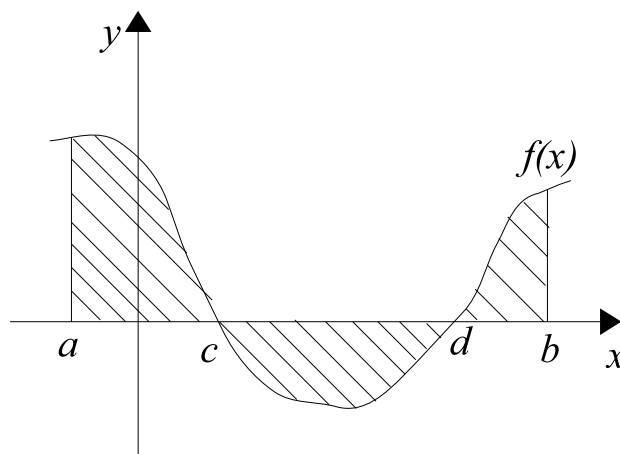
Olgu $f(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis lähtudes määratud integraali geomeetrisest tähendusest on $\int_a^b f(x) dx$ võrdne kõvertrapetsi pindala, kusjuures kõvertrapets on saadud piiratud järgmiste joontega: x -telg, $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ (vt joonis 3 allpool).

Juhul, kui otsida x -telje ja funktsiooni $y = f(x)$ graafiku vahele jääva pinna pindala ning $f(x)$ graafik lõikab piirkonnas $x \in [a, b]$ vahepeal ühe või mitu korda x -telge, tuleb integreerimispiirkond tükeldada. Lõigaku $f(x)$ x -telge näiteks punktides c ja d , siis x -telje ja funktsiooni $f(x)$ graafiku vahele jääva pinna pindala on

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^d f(x) dx \right| + \left| \int_d^b f(x) dx \right|$$



Joonis 37: Kõvertrapetsi pindala.



Joonis 38: Kõvertrapetsi pindala.

Vt ka joonis 4.

Kui $f(x)$ ja $g(x)$ on pidevad funktsioonid piirkonnas $x \in [a, b]$ ning $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, siis on funktsioonide $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ graafikute vaheline pind piirkonnas $x \in [a, b]$ võrdne järgmise integraaliga:

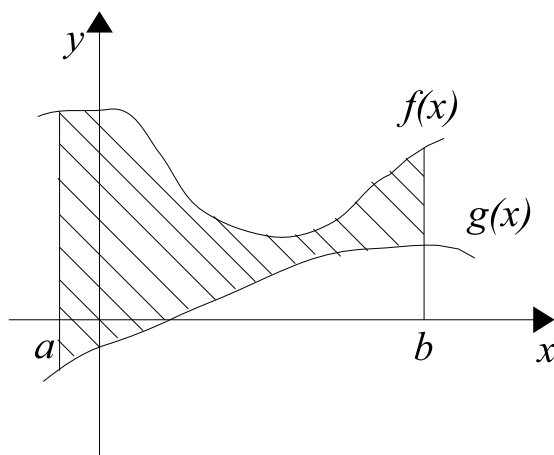
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad (6.37)$$

Vt ka joonis 5.

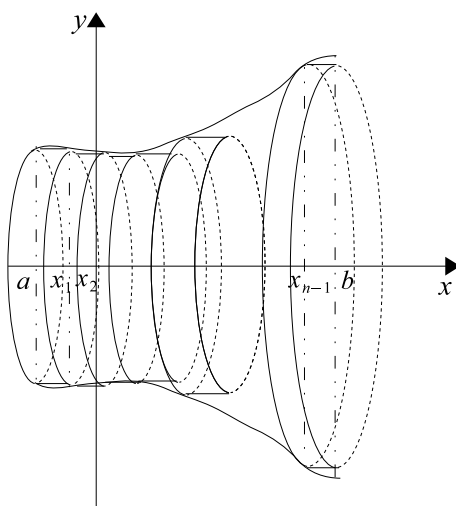
6.4.2. Pöördkeha ruumala leidmine.

Olgu meil antud pöördkeha, mis on saadud funktsiooni $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ pööramisel ümber x-telje. Selleks, et leida selle pöördkeha ruumala (ligikaudsel meetodil), jagame lõigu $[a, b]$ n tükiks (alamlõiguks) punktidega x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Tähistame veel $x_0 = a$ ja $x_n = b$. Joonistame pöördkeha sisse silindrid selliselt nagu näidatud joonisel 6, st esimese silindri põhja raadius on $f(x_0)$ ning kõrgus (paksus) on $\Delta x_1 = (x_1 - x_0)$, teise silindri põhja raadius on $f(x_1)$ ning kõrgus on $\Delta x_2 = (x_2 - x_1)$ jne.

Seega oleme joonistanud pöördkeha sisse n silindrit, milles igaihe põhja raadius on funktsiooni väärtus vastava silindri algpunkti kohal. St, i -nda silindri põhja raadius on $f(x_{i-1})$ ning kõrgus $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$.



Joonis 39: Kõvertrapetsi pindala.



Joonis 40: Pöördkeha ruumala leidmine.

Arvestame, et iga silindri ruumala on põhja pindala ja kõrguse korrutis:

$$V_i = S_i h_i = \pi [f(x_{i-1})]^2 \cdot \Delta x_i.$$

Siis saame pöördkeha ruumala ligikaudse arvutusega järgmise:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1})]^2 \cdot \Delta x_i.$$

Pöördkeha ruumala täpsemaks leidmiseks peame lõigu $[a, b]$ tükeldama väiksemateks tükkeks, st $n \rightarrow \infty$ ning $\Delta x_i \rightarrow 0$. Kokkuvõttes saame pöördkeha ruumala täpse valemi:

$$V = \pi \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1})]^2 \cdot \Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{6.38}$$

Valem (6.38) ongi pöördkeha ruumala valem, kus pöördkeha on saadud funktsiooni $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ pööramisele ümber x -telje.

Näide. Leiame pöörkeha ruumala, kui pöörkeha saadakse poolkaare, raadiusega r , pööramisel ümber x -telje.

Ringi, mille raadius on r , võrrand on $x^2 + y^2 = r^2$. Siit saame

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Juhul, kui ruutjuure ees on miinusmärk, joonistub välja ringi alumine pool (jäab y -teljest allapoole); kui plussmärk, siis ülemine. Valime $f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Kui pöörame antud funktsiooni graafikut ümber x -telje, on tulemuseks kera, mille ruumala on vastavalt valemile (6.38):

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \\ &= \pi \left[r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} - \left(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

6.4.3. Funktsiooni keskvärtuse leidmine.

Funktsiooni keskvärtuse avaldise leidmiseks vaatame järgmist näidet. Maapind on saastunud ammoni-aagiga. Keskmise saaste määramiseks mõõdeti saastaine kontsentratsiooni pinnases saastekohast alates 1 meetriste vahedega ning saadi tulemised, mis on kantud tabelisse 1:

Tabel 1. Saastaine kontsentratsiooni c sõltuvus kauguses x .

Kaugus saasteallikast x (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kontsentratsioon c (g/m^3)	589	603	619	667	641	658	673	661	652	644

Leiame keskmise kontsentratsiooni. Ilmselt

$$\bar{c} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} c(x_i) = \frac{1}{10} (589 + 603 + \dots + 670) \approx 641 \frac{g}{m^3}.$$

Täpsema tulemuse saamiseks peaks mõõtmisi sooritama väiksema vahemaa järel. Tähistades lõpp-punkti (10m) tähega b ning algpunkti ($x=0$) tähega a võime kirjutada vahemaa $\Delta x = 1m$ jaoks: $\Delta x = \frac{10-0}{10}$.

Üldjuhu jaoks $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Avaldame siit $\frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b-a}$. Seega:

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(x_i) = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n c(x_i) \Delta x_i.$$

Kui $n \rightarrow \infty$, siis võime kirjutada

$$\bar{c} = \frac{1}{b-a} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n c(x_i) \Delta x_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b c(x) dx. \quad (6.39)$$

Suvalise lõiguse $x \in [a, b]$ pideva funktsiooni $f(x)$ keskvärtuse lõigusb $[a, b]$ võib järelikult leida valemiga:

$$\bar{f} = f_{keskm} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (6.40)$$

Näide 1. Leida funktsiooni $y = f(x) = 4 - x^2$ keskvärtus piirkonnas $x \in [-1; 3]$

6.4.4. Kumulatiivne muutus

Vaatleme süsteemi, mille dünaamika on kirjeldatav järgmiselt:

$$\frac{dN}{dt} = f(t), \quad N(0) = N_0, \quad (6.41)$$

$N(t)$ leidmiseks võtame võrdusest (6.41) integraali:

$$N(t) = \int_0^t N'(u)du + C = \int_0^t f(u)du + C,$$

Saab näidata, et $C = N(0) = N_0$. Seega, suuruse N kasv vahemikus $t \in [0, t_2]$ on

$$\Delta N = N(t) - N(0) = \int_0^t f(u) du. \quad (6.42)$$

Näide 1.

Oletame, et populatsiooni arvukuse kiirus sõltub ajast järgmiselt: $\frac{dN}{dt} = e^{-0,2t}$, kus N on antud miljonites.

Leida $N(t)$ ning ΔN , kui $t \in [0; 5]$.

Näide 2.

Olgu biomassi muutumise kiirus $B'(t)$ ajavahemiku $t \in [0; 12]$, kus t on antud kuudes, antav järgmiselt:

$$\frac{dB}{dt} = \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right).$$

Joonestada sõltuvuse $B'(t)$ graafik. Leida $B(t)$. Oletame, et $B(0) = B_0$. Leida sel juhul ΔB , $t \in [0; 12]$. Milline on selles ajavahemikus keskmine biomass \bar{B} ?

Näide 3.

Olgu keha kiirendus $a(t) = 0,01 \cos(0,1t)$. Milline on antud keha kiiruse sõltuvus ajast $v(t)$? Milline on Δv ajavahemikus $t \in [0, 10\pi]$, kui $v_0 = 1$? Milline on keha kiirendus?

6.5. Määratud integraali ligikaudne arvutamine.

7. Diferentsiaalvõrrandid

7.1. Mõned näited diferentsiaalvõrranditest

Kõige lihtsama populatsiooni mudeli korral on populatsiooni kasvu kiirus ehk sündide ja surmade vahe ajaühikus võrdeline populatsiooni suurusega:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx r \cdot N,$$

Et $N = N(t)$, siis võime kirjutada antud seose täpsemalt:

$$N'(t) = \frac{dN}{dt} = r \cdot N(t). \quad (7.43)$$

Võrrandis (7.43) sisalduvad nii funktsioon $N(t)$ kui ka tema tuletis $N'(t)$. Sellist võrrandit, mis sisaldab funktsiooni n -järku tuletist nimetatakse n -järku diferentsiaalvõrrandiks. Üldiselt ei pea diferentsiaalvõrrandid sisaldama funktsiooni ennast, kuid võivad sisaldada ka seda funktsiooni suvalises kombinatsioonis tema argumendiga. Näiteks

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = xy, \quad \text{ehk} \quad y'' + y' - xy = 0$$

on teist järku diferentsiaalvõrrand.

Alljärgnevas näide füüsikast, milles ilmneb, kuidas tuletatakse võnkumisi kirjeldav teist järku diferentsiaalvõrrand. Olgu meil tegemist vedru otsas rippuva raskusega, mille mass on m . Vedru jäikus on k . Siis, kui raskust venitada allapoole, st tasakaaluasendist välja, hakkab raskusele mõjuma Hooke'i jõuk, mis tõmbab vedrut tagasi, kusjuures $F = -kx$, kus x on vedru deformatsioon. Teisalt vastavalt Newtoni teisele seadusele on $F = ma$, kus a - kiirendus. $a = v'(t) = x''(t)$. Seega oleme saanud võrrandi

$$mx''(t) = -kx(t), \quad \text{ehk} \quad x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

Tegemist on teist järku diferentsiaalvõrrandiga, mille lahend $x(t)$ näitab, kuidas vedru deformatsioon aja jooksul muutub. Antud võrrandi lahendiks on perioodiliselt muutuv funktsioon, mis kirjeldab üles-alla võnkumist. Sellised perioodilised muutused aga ilmnevad mitte ainult füüsikalistes, vaid ka ökoloogilistes, bioloogilistes vms protsesside käigus.

7.2. Lihtsamate diferentsiaalvõrrandite lahendamine

7.2.1. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrranditeks nimetatakse DV-sid, mis on kirjutatavad järgmiselt:

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad (7.44)$$

Nimetatud DV-i lahendamiseks sobib järgmine meetod: viime x -dega liikmed ühele poole ning y -tega liikmed teisele poole:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x)g(y), \\ \frac{dy}{g(y)} &= f(x)dx, \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)dx. \end{aligned}$$

Näide:

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

Arvestame, et $e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$. Seega on diferentsiaalvõrrandi parem pool kirjutatav kahe funktsiooni $f(x) = e^x$ ning $g(y) = e^{-y}$ korrutisena. Korrutades DV-i pooli dx -ga ning jagades e^{-y} , saame

$$e^y dy = e^x dx.$$

Võtame mõlemalt poolt integraali, siis saame:

$$\begin{aligned}\int e^y dy &= \int e^x dx \\ e^y &= e^x + C.\end{aligned}$$

Lõpliku vastuse leidmiseks avaldame viimasest võrrandist y , selleks võtame võrduse mõlemalt poolelt naturaallogaritm:

$$y = \ln(e^x + C). \quad (7.45)$$

Saadud lahend on määratud konstandi täpsusega, kusjuures konstant C määratakse mõnest lisatingimusest. Olgu selleks tingimuseks antud juhul $y(0) = y_0$. (On antud funktsiooni y väärtus punktis $x = 0$). Paneme selle tingimuse lahendisse (7.45):

$$y(0) = y_0 = \ln(e^0 + C).$$

Võtame mõlemad pooled e astmesse:

$$e^{y_0} = e^{\ln(e^0 + C)} = e^0 + C = 1 + C.$$

Viimasest seosest saame $C = e^{y_0} - 1$. Seega, juhul, kui algtingimuse $y(0) = y_0$ korral on diferentsiaalvõrrandi lahendiks

$$y(x) = \ln(e^x + e^{y_0} - 1).$$

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandil on 2 lihtsamata alaliiki.

A. DV $y' = f(x)$, mille lahendamine viib tavalise integraali võtmiseni:

$$y(x) = \int f(x) dx + C$$

või teise kirjutusviisina:

$$y(x) = \int_0^x f(u) du + y(0),$$

kui on antud ka $y(0)$. St, tegemist on integraali leidmisega (vt alapunkte 6.3 ja 6.4).

B Autonoomne DV: $y' = g(y)$.

Antud diferentsiaalvõrrandi lahendamisel tuleb toimida järgmiselt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(y)$$

Korrutame DV-i mõlemalt poolt dx -ga, jagame $g(y)$ -ga ning integreerime, siis saame:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int dx = x + C.$$

Prast vasakult poolt integraali võtmist tuleb võrdusest avaldada $y(x)$.

Nide: Lahendada diferentsiaalvõrrand $y' = 2 - 3y$.

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 3y, \quad \Rightarrow \text{quad} \int \frac{dy}{2 - 3y} = \int dx,$$

Vasaku poole integreerimisel kasutame muutuja vahetust $t = 2 - 3y$, siis $dt = -3dy$ ning seega $dy = -\frac{dt}{3}$.

$$\int \frac{dy}{2 - 3y} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln |t| = -\frac{1}{3} \ln |2 - 3y|$$

Seega oleme saanud:

$$-\frac{1}{3} \ln |2 - 3y| = x + C_1.$$

Korrutades vrduse mlemat poolt -3 -ga ning vttes seejrel mlemad pooled e astmesse, saame avaldada y -i:

$$y = -\frac{1}{3}C e^{-3x} - \frac{2}{3},$$

kus $C = e^{-3C_1}$.

Vastavalt von Bertalanffy vrrandile on kalade kasvu kiirus seotud kala pikkusega jrgmiselt:

$$L' = \frac{dL}{dt} = k(A - L),$$

kus k ja A on positiivsed konstandid. Leida kala pikkuse sltuvus ajast ldjuhul. Skitseerida graafik, kui $L_0 = L(0) = 0,1$, $k = 0,2$, $A = 0,5$.

Piiratud toiteainete hulga puhul vib populatsiooni arvukuse N kasvu modelleerida nn logistilise vrrandiga, mille korral populatsiooni arvukuse muutumise kiirus on jrgmine:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \left(1 - \frac{N}{k}\right).$$

Nidata, et antud vrrandi lahend on

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

Analsida lahendi kitumist juhul, kui $t \rightarrow \text{infity}$ kahel erineval juhul: $N_0 > K$ ning $N_0 < K$.

7.3. Diferentsiaalvõrrandi lahendi kontrollimine

Kuidas kontrollida, kas antud lahend on ikka tegelikult diferentsiaalvõrrandi lahendiks?