

Tallinna Pedagoogikaülikool
Loodusteaduste osakond

Matemaatilise füüsika võrrandid

Loengukonspekt koos ülesannetega

Tõnu Laas

Kirjandus:

1. Piir I. Matemaatilise füüsika meetodid. Tartu: TRÜ, 1988.
2. Loide R.-K., Mankin R., Reiter E., Veimer V. Matemaatika üldfüüsika kursuses II. Tallinn: TPI kirjastus, 1987.
3. Lõhmus A., Petersen I., Roos H. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu. Tallinn: TRÜ, 1988.
4. Piskunov N. Diferentsiaal- ja integraalarvutus I. Tallinn: Valgus, 1981.
5. Piskunov N. Diferentsiaal- ja integraalarvutus II. Tallinn: Valgus, 1983.
6. Arfken G.B., Weber H.J. Mathematical methods for physicists. Academic Press, 2000.

Sissejuhatus

Matemaatilise füüsika võrranditeks nimetatakse üldiselt 2. järku osatuletistega lineaarseid diferentsiaalvõrrandeid (DV). Viimasel ajal pakuvad siiski huvi ka mitmed mittelineaarsed võrrandid.

Kordamiseks

Tuletame meelde esimest järku DVite põhitüübid.

1. Eralduvate muutujatega DV.

Eralduvate muutujatega DV on esitatav kujul

$$y'(x) \equiv \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (0.1)$$

Selle võrrandi üldlahend on ilmutamata kujul esitatav järgmiselt:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad (0.2)$$

kus C on suvaline konstant. Võrrandi (0.1) lahend, mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$ on järgmine:

$$\int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} - \int_{x_0}^x f(t)dt = 0. \quad (0.3)$$

Ülesanne 0.1.

$$y'(x) = 3y^2 \sin x$$

Selle võrrandi lahend $y(x) = \frac{1}{6 \cos x + C}$.

2. Esimest järku lineaarne diferentsiaalvõrrand on esitatav kujul:

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x). \quad (0.4)$$

Võrrandi (0.4) üldlahend avaldub järgmiselt:

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left[C + \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx \right]. \quad (0.5)$$

Algtingimust $y(x_0) = y_0$ rahuldava võrrandi lahendi võime anda kujul

$$y = e^{-\int_{x_0}^x f(t)dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^x g(t)e^{\int_{x_0}^t f(s)ds} dt \right]. \quad (0.6)$$

Ülesanne 0.2.

$$y'(x) + \frac{1}{2}y(x) = x^3.$$

3. Eksaktne võrrand on selline DV, mille saab esitada kujul

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0, \quad (0.7)$$

kui on rahuldatud tingimus $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$. Sellise võrrandi üldlahend on antud ilmutamata kujul

$$\int_{y_0}^y g(x, s)ds + \int_{x_0}^x f(t, y_0)dt = C. \quad (0.8)$$

Siin x_0 ja y_0 on mingid fikseeritud konstandid ja C - suvaline konstant. Algtingimust $y(x_0) = y_0$ rahuldava lahendi saame võrdusest (0.8) kui $C = 0$.

1. Teist järku diferentsiaalvõrrandid

1.1. Teist järku konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrand

1.1.1. Homogeenne võrrand

Vaatleme alguses ühe muutujaga teist järku konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandit:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy \equiv ay'' + by' + cy = 0, \quad (1.1)$$

kus a, b, c on konstandid. Viimast võrrandit nimetatakse homogeenseks lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks (HLDV). Selle võrrandi *karakteristlikuks võrrandiks* nimetatakse võrrandit

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (1.2)$$

Sõltuvalt karakteristliku võrrandi lahenditest eristatakse kolme juhtu.

1. Karakteristliku võrrandi diskriminant on positiivne $D = b^2 - 4ac > 0$. Karakteristliku võrrandi lahendid on positiivsed ja erinevad:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Võrrandil (1.1) on siis järgmised erilahendid: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, üldlahend avaldub kujul

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (1.3)$$

kus C_1, C_2 on suvalised konstandid.

2. $D = b^2 - 4ac = 0$. Karakteristliku võrrandi lahendid $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a}$. Üldlahend avaldub kujul

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \quad (1.4)$$

kus C_1, C_2 - suvalised konstandid.

3. $D = b^2 - 4ac < 0$. Karakteristliku võrrandi lahendid on kompleksarvud, mille võime esitada kujul $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, kus

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}. \quad (1.5)$$

Võrrandi (1.1) üldlahendi võib esitada siis kujul:

$$y = e^{\alpha x} (C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x}).$$

Füüsikas pakub suuremat huvi võrrandi (1.4) reaalarvuline lahend. Erilahendid on $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ja $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$. Reaalarvuline üldlahend avaldub erilahendite kaudu järgmiselt

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)). \quad (1.6)$$

Lahendi (1.6) võime esitada ka kas siinuste või koosinuste abil:

$$y = e^{\alpha x} C_3 \cos(\beta x + C_4), \quad (1.7)$$

$$y = e^{\alpha x} C_5 \sin(\beta x + C_6), \quad (1.8)$$

kus konstandid $C_1, \dots, C_6$ määratakse algtingimustest.

Võrrand (1.1) kirjeldab füüsikas vabavõnkumisi. Juhul, kui $b = 0$, siis on tegemist mittesumbuvate vabavõnkumistega, vastasel juhul sumbuvate võnkumistega.

Ülesanne 1.1 Lahendada võrrand $y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) = 0$ lisatingimustel $y(0) = 0$, $y'(1) = 2$.

Lahendus. Antud diferentsiaalvõrrandi karakteristlik võrrand on

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

selle diskriminant $D = 4^2 - (-5) \cdot 4 = 36 > 0$. Seega on karakteristliku võrrandi lahendid $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$ ja diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$$

Konstantide C_1, C_2 määramiseks kasutame algtingimusi.

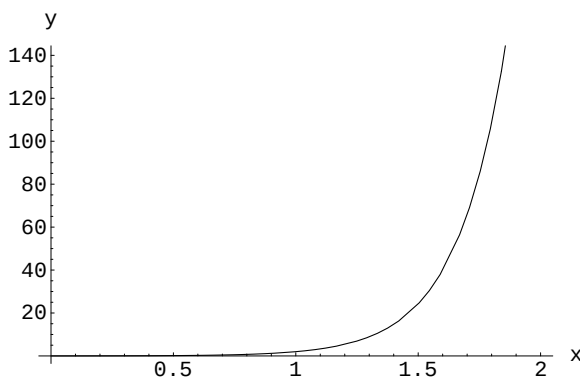
$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 0, \quad \text{seega} \quad C_1 = -C_2.$$

Kasutame nüüd saadud seost teise tingimuse jaoks.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{5x} = C_2(e^{-x} + 5e^{5x}) \\ y'(1) &= C_2(e^{-1} + e^5) = 2 \\ C_2 &= \frac{2}{e^{-1} + e^5} \approx 0,0134. \end{aligned}$$

Antud ülesande lõpplahend on seega

$$y(x) = 0,0134(e^{5x} - e^{-x})$$



Joonis 1: Joonis 1. Funktsiooni $y(x) = 0,0134(e^{5x} - e^{-x})$ graafik ülesandest 1.1.

Ülesanne 1.2. Lahendada diferentsiaalvõrrand $2x''(t) + 9x(t) = 0$ lisatingimustel $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$.

Lahendus. Antud diferentsiaalvõrrandi karakteristik võrrand on $2\lambda^2 + 9 = 0$. Selle diskriminant on $D = -4 \cdot 2 \cdot 9 = -72 < 0$. Seega on meil tegemist juhtumiga 3 ning võrrandi üldlahendiks on

$$x(t) = C_1 \sin\left(\frac{3t}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \cos\left(\frac{3t}{\sqrt{2}}\right)$$

Leiame konstandid.

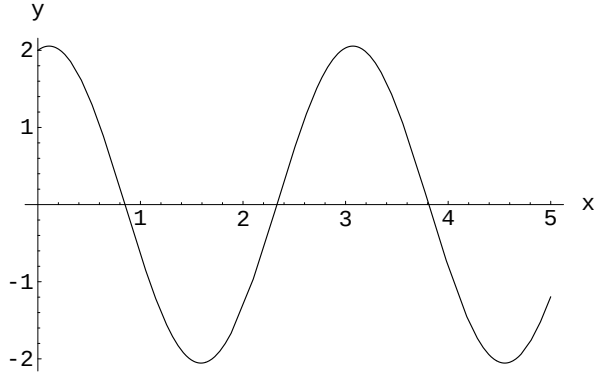
$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 2, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2. \\ x'(t) &= \frac{3}{\sqrt{2}} C_1 \cos\left(\frac{3t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{\sqrt{2}} C_2 \sin\left(\frac{3t}{\sqrt{2}}\right) \\ x'(0) &= \frac{3}{\sqrt{2}} C_1 = 1, \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Antud ülesande lahend

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(\frac{3t}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cos\left(\frac{3t}{\sqrt{2}}\right)$$

Antud ülesanne kirjeldab füüsikas mitesumbuvaid vabavõnkumisi. Nagu jooniselt 2 on näha, on selle funktsiooni graafikuks perioodiline funktsioon. Võnkumiste puhul leitakse sellise ülesande lahend kujul

$x(t) = A \sin\left(\frac{3t}{\sqrt{2}} + B\right)$, kus A on võnkumise amplituud ja B - algfaas. Määrake need ise.



Joonis 2: Joonis 1. Funktsiooni $x(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sin\left(\frac{3t}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cos\left(\frac{3t}{\sqrt{2}}\right)$ graafik ülesandest 1.2.

1.1.2. Mittehomogeenne võrrand

Teist järku konstantsete kordajatega mittehomogeenseks lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks (MHLDV) nimetatakse võrrandit

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \quad (1.9)$$

Võrrandi (1.9) üldlahend on esitatav sellele võrrandile vastava homogeense võrrandi lahendi y_h ja võrrandi (1.9) mingi erilahendi y_e summana:

$$y = y_h + y_e.$$

Vastavalt homogeense DV karakteristliku võrrandi lahenditele võib erilahendi leidmiseks kasutada järgmisi valemeid.

1. $b^2 - 4ac > 0$.

$$y_e = \frac{1}{a(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_{x_0}^x f(t) \left[e^{\lambda_2(x-t)} - e^{\lambda_1(x-t)} \right] dt. \quad (1.10)$$

2. $b = 4ac$.

$$y_e = \frac{1}{a} e^{\lambda x} \int_{x_0}^x f(t) (x-t) e^{-\lambda t} dt. \quad (1.11)$$

3. $b^2 - 4ac < 0$.

$$y_e = \frac{1}{a\beta} e^{\alpha x} \int_{x_0}^x f(t) e^{-\alpha t} \sin(\beta(x-t)) dt, \quad (1.12)$$

kus x_0 on mingi konstant.

Üldjuhul võib erilahendis sisalduva integraali leidmine olla keerukas ning sel juhul võib erilahendi leida mingitest füüsikalistest kaalutlustest lähtudes. Üheks selliseks näiteks, mil see on võimalik, on juhtum, kui $b^2 - 4ac < 0$ ja $f(x)$ on mingi perioodiline funktsioon:

$$f(x) = F_0 \cos(\omega x), \quad (1.13)$$

kus F_0 ja ω on mingid konstandid. Sellisel juhul on teada, et erilahendi saame esitada kujul

$$y_e = C_1 \cos(\omega x + C_2), \quad (1.14)$$

kus C_1, C_2 on leitavad võrrandist (1.9). Leides y_e tuletised ning asendades y_e ja tema tuletised võrrandisse (1.9), saame:

$$C_1 = \frac{F_0}{\sqrt{(c - a\omega)^2 + b^2\omega^2}}, \quad (1.15)$$

$$\tan C_2 = \frac{b}{a\omega^2 - c}, \quad (1.16)$$

Ülalkirjeldatud juhtum on füüsikast tuntud sundvõnkumiste korral, kus sundiv jõud on perioodiline jõud amplituudiga F_0 ja omasagedusega ω .

1.1.3. Vedru vabavõnkumine.

Vaatame vedru jäikusega k , mille otsa on riputatud mass m . Eeldame, et esialgne hälve tasakaaluasendist x on väike ning välist jõudu ei mõju. Siis võib kirjutada $F = -kx$. Teisalt $F = ma = m\ddot{x}$. Seega saame võrrandi

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0,$$

Tähistades $\omega^2 := k/m$, võime kirjutada

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (1.17)$$

Viimase võrrandi üldlahendiks on $x(t) = C_1 \cos(\omega t + C_2)$.

1.1.4. Sumbuvad elektrilised võnkumised.

1.1.5. Elektrilised sundvõnkumised.

1.2. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid. Klassifitseerimine.

Tavaliselt peetakse matemaatilise füüsika võrrandite all silmas 2.järku *osatulestitega* diferentsiaalvõrrandeid, mida võib esitada kujul:

$$Lu := \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad (1.18)$$

kus $a_{ik} = a_{ik}(x_1, \dots, x_n)$, $b_i = b_i(x_1, \dots, x_n)$, $u = u(x_1, \dots, x_n)$. Kuivõrd $u_{x_i x_k} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$, siis järelikult ka $a_{ik} = a_{ki}$. Kui $f = 0$, on tegemist *homogeense* DViga, vastasel juhul *mittehomogeense* DViga. Füüsilikes üks tavalisemaid juhtumeid (näiteks hüdromehaanikas, kvantmehaanikas, elektrodünaamikas ja mujal) on see, kus sõltumatuteks muutujateks on aeg t ja ristkoordinaadid x, y, z või sfäärilised koordinaadid r, φ, ϑ (või ka silindrilised koordinaadid). Tegemist võib olla veel tegemist diferentsiaalvõrrandite (1.18) süsteemiga otsitavate funktsioonide $u, v, w, \dots$ jaoks.

DVit (1.18) võime vaadelda kui diferentsiaaloperaatorit

$$\hat{L} := \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

rakendatuna funktsioonile $u(x_1, \dots, x_n)$. Võrrandi (1.18) klassifitseerimise aluseks on vastava operaatori $\hat{L}$ (vahel tähistatakse ka lihtsalt kui L) omadused.

1.2.1. Osatuletistega diferentsiaalvõrrand kahe sõltumatu muutuja korral. Muutujate vahetus.

Vaatame diferentsiaalvõrrandit

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y). \quad (1.19)$$

Üldine muutujate vahetus. Olgu uued muutujad

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (1.20)$$

kus $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ on 2 korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Et selline teisendus oleks pööratav, ei tohi selle jakobiaan võrduda nulliga:

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.21)$$

Uus võrrand on samuti 2.järku lineaarne diferentsiaalvõrrand:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + cu = F(\xi, \eta). \quad (1.22)$$

Leiame võrrandis (1.22) esinevad kordajad $\bar{a}_{11} \dots \bar{b}_2$. Arvestame, et

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \equiv \eta_x^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_x \eta_x u_{\eta\xi} + \xi_x^2 u_{\xi\xi} \end{aligned}$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned} u_{yy}^2 &= \eta_y^2 u_{\eta\eta} + 2\xi_y \eta_y u_{\eta\xi} + \xi_y^2 u_{\xi\xi} \\ u_{xy}^2 &= \eta_x \eta_y u_{\eta\eta} + (\eta_x \xi_y + \xi_x \eta_y) u_{\eta\xi} + \xi_x \xi_y u_{\xi\xi} \end{aligned}$$

Asendades saadud tulemused võrrandisse (1.22), saame

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\
\bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \\
\bar{b}_1 &= b_1\xi_x + b_2\xi_y + a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy}, \\
\bar{b}_2 &= b_1\eta_x + b_2\eta_y + a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy}, \\
F(\xi, \eta) &= f(x, y).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Seejuures

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22}) \left(\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right)^2. \tag{1.24}$$

1.2.2. 2.järku võrrandite klassifikatsioon kahe sõltumatu muutuja korral. Võrrandite teisendamine kanoonilisele kujule.

Suuruse $\Delta := a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ märk ei muutu muutujate vahetusel, selle märk on invariant. Suuruse Δ märgi järgi saab liigitatakse 2.järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid järgmiselt: võrrand on

- 1) hüperboolset tüüpi, kui $\Delta > 0$,
- 2) paraboolset tüüpi, kui $\Delta = 0$,
- 3) elliptilist tüüpi, kui $\Delta < 0$.

Sobiva teisendusega saab võrrandi viia nn kanoonilisse kujju.

Hüperboolsel juhul on kaks võimalust:

- 1) 1. kanooniline kuju: $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0, a_{12} \neq 0$.
- 2) 2. kanooniline kuju: $\bar{a}_{12} = 0, \bar{a}_{11} = -\bar{a}_{22} \neq 0$.

Paraboolsel juhul $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{12} = 0, \bar{a}_{22} \neq 0$.

Elliptilisel juhul $\bar{a}_{12} = 0, \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \neq 0$.

Vaatame esmalt hüperboolset võrrandit. Meil tuleb määrata funktsioon $\xi(x, y)$ nii, et uutes muutujates oleks $\bar{a}_{11} = 0$ (vt (1.23)). St, tuleb lahendada karakteristlik võrrand

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0. \tag{1.25}$$

Antud võrrandi lahendikõveraaid nimetatakse karakteristikuteks, mille tõus on

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}. \tag{1.26}$$

Seetõttu saame võrrandi (1.25) esitada hariliku diferentsiaalvõrrandina:

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \left(\frac{dy}{dx} \right) + a_{22} = 0, \tag{1.27}$$

Siit saame

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.28}$$

Hüperboolsel juhul on kaks sõltumatut võrrandit, seega 2 parve sõltumatuid karakteristikuid. Diferentsiaalvõrrandite (1.28) lahendamisel saame seega üldlahendid $y = y(x, C_1)$, $y = y(x, C_2)$. Integreerimiskonstante C_1, C_2 võimegi käsitleda uute muutujatena $\xi = C_1$, $\eta = C_2$. Sellisel juhul saame uue võrrandi 1. kanoonilisel kujul. Tehes muutujate vahetuse

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta),$$

saame uue võrrandi 2. kanoonilisel kujul muutujate α, β suhtes.

Paraboolsel juhul on $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ ja seega on diferentsiaalvõrrandil (1.28) vaid üks lahend $y = y(x, C)$. Üks uus muutuja $\xi = C$, teiseks võime võtta $\eta = x$ või $\eta = y$, kontrollides, et tingimus (1.21) oleks täidetud.

Elliptilisel juhul $\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = \pm i\sqrt{|a_{12}^2 - a_{11}a_{22}|}$, st lahendid on kompleksed ja ühtlasi teineteise kaaskompleksid (ühest lahendist saame teise vaid i ees märgi muutmisel. Siis uued kompleksed muutujad on

$$\xi = \alpha(x, y) + i \cdot \beta(x, y), \quad \eta = \alpha(x, y) - i \cdot \beta(x, y).$$

Neis muutujates $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$, $\bar{a}_{12} \neq 0$. Kui valime uuteks muutjateks

$$\alpha = \alpha(x, y) = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \beta(x, y) = \frac{1}{2i}(\xi - \eta).$$

Neis muutjates on $\bar{a}_{12} = 0$.

Ülesanne 1.3. Viia võrrand

$$2u_{xx} + 10u_{xy} + 8u_{yy} + 5u_x - 6u_y + u = 0$$

kanoonilisele kujule. a on positiivne konstant.

Lahendus. Uurime, millise juhuga - hüperboolne, paraboolne, elliptiline - on tegemist.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 5^2 - 16 = 9 > 0.$$

Tegemist on seega hüperboolse diferentsiaalvõrrandiga. Karakteristlik võrrand

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad dy = \frac{5 \pm 3}{2} dx.$$

Integreerime viimaseid võrrandeid, saame kaks lahendit:

$$y = 4x + C_1 \equiv 4x + \xi, \quad y = x + C_2 \equiv x + \eta.$$

Uued muutujad seega $\xi = y - 4x$, $\eta = y - x$.

Uue diferentsiaalvõrrandi kordajate leidmiseks tuleb meil järgmised tuletised: $\xi_x \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x} = -4$, $\xi_y = 1$, $\eta_x = -1$, $\eta_y = 1$, $\eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0$.

Pannes saadud tulemused (1.23), leiame:

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0, \quad \bar{a}_{12} = -25, \quad \bar{b}_1 = -26, \quad \bar{b}_2 = -11.$$

Seega on ülesandes antud võrrandi kanooniline kuju järgmine:

$$-25u_{\xi\eta} - 26u_{\xi} - 11u_{\eta} + u = 0.$$

Ülesanne 1.4. Viia võrrand

$$2xu_{xx} - 6xu_{xy} + 4xu_{yy} + 4x^2u_x = \sin(x)$$

kanoonilisele kujule.

1.2.3. n-muutuja võrrandite klassifitseerimine.

Vt. [1]

2. Matemaatilise füüsika ülesanne

2.1. Matemaatilise füüsika ülesande seade

Konkreetsete füüsika nähtuste kirjeldamisel tuleb vaadata peale võrrandi püstitamise, võrrandis olevate kordajate valiku veel lisatingimusi, mis kajastavad selle konkreetse füüsikanähtuse spetsiifikat. Vastava võrrandi lahend neil lisatingimustel kajastab süsteemi konkreetset käitumist.

Tavalise teist järku DVi korral oli vaja kahte lisatingimust, mille abil sai määrata konstantide väärtused. Sel moel oli lahend üheselt määratud. Osatuletistega DV-i korral ei tule sisse sellised konstandid nagu eelneval juhul, rida suvalisi funktsioone. Näiteks 2. järku osatuletistega DV-i korral tuleb sisse tuua kaks suvalist funktsiooni.

Või esimest järku osatuletistega DV-s

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

üldlahendiks on $u = f(y)$, siin on $f(y)$ suvaline funktsioon, mis ei pea isegi olema diferentseeruv argumenti y järgi.

Siit kaks olulist järeldust:

1. Osatuletistega DVi üldlahendi leidmine on reeglina raske või võimatu.
2. Kui me selle üldlahendi leiaksimegi, siis sobiva erilahendi leidmine, sellise, mis vastaks konkreetsetele lisatingimustele, võib osutuda raskeks või isegi võimatuks.

Seetõttu ei paku praktiliste ülesannete korral osatuletistega DVde lahendamine (üldlahendi leidmine) füüsika seisukohalt praktilist huvi.

Matemaatilise füüsika põhiülesanne - leida vaadeldava osatuletistega DVi teatud erilahendid, mis rahuldavad ülesande füüsikalisest sisust tulenevaid lisatingimusi. Füüsikaprobleemide uurimisel ja lahendamisel on tegemist nn alg- ja ääretingimustega. Ääretingimusi nimetatakse ka rajatingimusteks.

Algtingimusi tuleb kasutada hüperboolsete, paraboolsete ja üldise Schrödingeri võrrandi korral. Hüperboolset tüüpi võrrandi korral on vaja kahte algtingimust, paraboolsete võrrandite korral ühte lisatingimust. Üldiselt, algtingimusi on vaja siis, kui on olemas ajast sõltuvus. Näiteks Laplace'i võrrand on elliptiline, ajast sõltuvust sees ei ole, seega ka algtingimust pole erilahendi leidmiseks vaja.

Hüperboolset tüüpi võrrandite korral on algtingimused:

$$\begin{aligned} 1.liiki : \quad & u(0, x, y, z) := u(0, M) = \varphi(x, y, z), \\ 2.liiki : \quad & u_t(0, x, y, z) := u_t(0, M) = \phi(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Hüperboolset tüüpi võrrandiks on näiteks keele võnkumise võrrand. Algtingimusteks on siin hälve tasakaaluasendist alghetkel $u(0, M) = u_0(M)$ (1. liiki) ja hälbe muutumise kiirus $u_t(0, M) = u_1(M)$ (2.liiki).

Paraboolset tüüpi võrrandite korral kasutatakse tavaliselt 1. liiki algtingimust. Nt soojusjuhtivusvõrrandi puhul on üsna loomulik, et 2. liiki algtingimust ei lähe vaja. Algtingimuseks on siis see, et temperatuur $T(t, M)$ on alghetkel igas ruumipunktis antud, st on teada $T(0, M) = T_0(M)$.

Nendest tingimustest ei piisa, et ülesannet lahendada. Läheb vaja veel ääre- ehk rajatingimusi. Need fikseerivad vaadeldava füüsikalise suuruse väärtuse lõpliku ulatusega piirkonna rajal Σ . Ühe-, kahe- ja kolmemõõtmelise ülesande korral on rajaks vastavalt 2 punkti, joon või pind. Näiteks vardas leviva elastsuslaine korral tuleb ette anda hälbe väärtus radadel erinevatel ajahetkedel, $u(t, M)|_{\Sigma}$.

Ääretingimusi on kolme liiki.

1. liik. Vaadeldava füüsikalise suuruse või otsitava funktsiooni väärtus on teada rajal Σ :

$$u(t, M)|_{\Sigma} = \mu(t, P), \quad \text{kus } P \in \Sigma. \quad (2.2)$$

Näiteks temperatuurijuhtivuse võrrandi/ülesande korral kolmemõõtmelises keras on teada temperatuur igal ajamomendil kera välispinnal.

2. liik. Kui suur on välispinnal antud punktis pinnaga risti olevas suunas funktsiooni muutumise ruumiline kiirus (gradient):

$$\vec{n} \cdot \text{grad } u(t, M)|_{\Sigma} \equiv \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nu(t, P), \quad P \in \Sigma. \quad (2.3)$$

Füüsikaliselt tähendab see, et me teame selle suuruse voogu läbi pinna (täpsemalt, voo tihedust). Näiteks soojusjuhtivusülesande korral - soojusvoo tihedus läbi välispinna.

3. liik. See on esimest ja teist liiki ääritingimuste kombinatsioon.

$$\vec{n} \cdot \text{grad } u(t, M)|_{\Sigma} + \gamma u(t, M)|_{\Sigma} = \beta(t, P), \quad P \in \Sigma, \quad \gamma \neq 0. \quad (2.4)$$

Siin γ - füüsikaline konstant, mis sõltub füüsikalistest tingimustest (näiteks soojusjuhtivusteguri kombinatsioon teiste konstantidega).

Kõik kolm liiki saab võtta kokku järgmiselt:

$$(\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } u + \gamma_2 u)|_{\Sigma} = \beta(t, P), \quad P \in \Sigma, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0.$$

Mõned näited.

Vaatame 1. liiki rajatingimust ühemõõtmelisel juhul. Lõpliku varda või keele pikivõnkumine. Olgu varda pikkus l , siis $0 \leq x \leq l$. Rajatingimus:

$$\begin{aligned} u(t, l) &= \mu_1(t), \\ u(t, 0) &= \mu_2(t). \end{aligned}$$

Kui $\mu = 0$, siis on otspunkt paigal. Kui näiteks $\mu = \sin(kt)$, siis võngub otspunkt pikisuunas perioodiliselt ringsagedusega k .

2. liiki rajatingimus oleks samal juhul. Varda pikivõnkumiste korral on $\vec{n}$ paralleelne võnkumiste sihiga.

$$\begin{aligned} u_x(t, l) &= \nu_1(t), \\ u_x(t, 0) &= \nu_2(t). \end{aligned}$$

Pikivõnkumistel vedru ristlõikele mõjuv pingejõud $T(t, x) = k(x)S(x)u_x(t, x)$, kus k - Youngi moodul, $S(x)$ - varda ristlõike pindala. Seega u_x on otseselt seotud pingejõuga. Kui $\nu = 0$, siis see tähendab, et otspunkt on täiesti vaba, talle ei mõju mingit välist jõudu. Kui $\nu \neq 0$, siis toimub otspunktis võnkumine välise jõu mõjul, st piki varrast peab mõjuma väline jõud $F(t)$:

$$F(t) = \frac{\nu(t)}{k(l)\rho(l)},$$

ρ - aine lineaarne tihedus otspunktis, k - Youngi (elastsus)moodul otspunktis.

Meeldetuletus. NT Maa gravitatsioonivälja potentsiaal on $\phi(r) = -G\frac{M}{r}\vec{n}$. Gravitatsioonijõud ühikmassi kohta: $F = \text{grad } \phi$.

3. liiki rajatingimuse korral on fikseeritud varda otsas olev jõud, kuid see jõud ei määra täielikult varda otsa käitumist - varda ots on osaliselt vaba. St varda otspunktis $x = l$ mõjub elastne jõud liikuva rakenduspunktiga $x = r(t)$ (ka varda otspunkt ju võngub/liigub): $F(t) = \alpha[r(t) - u(t, l)]$, kus α on elastse jõu võrdetegur - vedru jäikus. Seega rajatingimus:

$$u_x(t, l) + \gamma(t, l) = \beta(t), \quad \gamma = \frac{\alpha}{k(l)S(l)}, \quad \beta(t) = \frac{\alpha r(t)}{k(l)S(l)}.$$

Siin tuleb silmas pidada, et positiivne välisjõud tekitab negatiivse deformatsiooni, st $p(t) = -T(t, 0)$.

Soojusjuhtivuse võrrandi korral on 1. liiki rajatingimus raja pinnal etteantud temperatuur. Viimane võib lihtsaimal juhul olla konstantne, keerulisematel sõltuda ajast. 2. liiki rajatingimuseks on etteantud soojusvoog läbi rajapinna. Üldiselt võib kirjutada nii: soojusvoog $Q(t, P)$ (pinnaühikut ajaühikus läbinud soojushulk) läbi raja: $Q(t, P) = -k(P)\vec{n} \cdot \text{grad } u(t, M)|_{\Sigma}$ (positiivne soojusvoog on välja läinud soojusvoog). Soojusvoog läbi raja antakse ette Newtoni soojusvahetusseadusega:

$$Q(t, P) = h(u(t, P) - \Theta(t, P)),$$

kus $\Theta(t, P)$ on väliskeskkonna temperatuur keskkonna rajal ja h - soojusvahetuskoeffitsient.

2.2. Matemaatilise füüsika ülesannete tüübid ja ülesande seade korrektsus.

Alg- ja ääritingimuste klassifitseeritakse matemaatilise füüsika ülesanded veel järgmiselt;

1. Segäülesanded.
2. Rajaülesanded.

3. Siseülesanded.
4. Välisülesanded.

Segaülesanded.

On olemas nii alg- kui ka ääritingimused. Segaülesanne esineb hüperboolsete ja paraboolsete võrrandite korral, kui uuritav protsess toimib lõplikus ruumi piirkonnas. Hüperboolsete võrrandite korral antakse 2 alg- ja 1 ääritingimus. Paraboolsete võrrandite korral 1 alg- ja 1 ääritingimus. Kontranäide - lõpmatu keele võnkumise ülesande korral ei saa me ette anda ääritingimust.

Rajaülesanded.

Ette antakse vaid rajatingimused. Need on elliptilist tüüpi võrrandid, kus otsitav funktsioon ei sõltu teatavasti ajast. Elliptilise võrrandi võis üldkujul panna kirja järgmiselt:

$$\operatorname{div} [k(M)\operatorname{grad} u(M)] - q(M)u(M) = F(M) \quad (2.5)$$

rajatingimus

$$(\gamma_1 \vec{n} \cdot \operatorname{grad} u(M) + \gamma_2 u(M))|_{\Sigma} = \beta(P).$$

Kui rajatingimus on esimest liiki, st $\gamma_1 = 0$, siis nimetatakse rajaülesannet ka Dirichlet' ülesandeks. 2. liiki rajaülesannet ($\gamma_2 = 0$) nimetatakse Neumanni ülesandeks. 3. liiki rajaülesannet ei taha keegi omaks nimetada.

Sõltuvalt piirkonnast Ω ja selle rajast Σ , saab ülesande liigitada veel sise- ja välisülesanneteks. Juhul, kui Σ asub väljaspool Ω 't, siis nimetatakse ülesannet **siseülesandeks**. Kui piirkond Ω ümbritseb rada Σ , nimetatakse ülesannet välisülesandeks. Viimasel juhul peab olema veel lisainfot selle kohta, kuidas uuritav füüsikaline suurus lõpmatuses käitub.

Näiteks uurides pinnalt kiirguvat ainet või kiirgust (soojsukiirgust), siis peab see olema lõpmatuses null või lõpliku väärtusega.

Hüperboolse ja paraboolse võrrandi korral esineb **Cauchy algväärtusülesanne**, mille lahend määratakse algtingimustega. Rangelt võttes saab Cauchy ülesannet vaadelda vaid tõkestamat piirkonnades. Rajatingimuse asemel peab ette andma sel juhul füüsikalise suuruse käitumise lõpmatuses (kuid mitte alati). Need on näiteks lõpmatu pikkusega keele võnkumine, soojuste levimine tõkestamata ruumis, lõpmatu ulatusega plaadi võnkumine. Praktiliselt huvi pakub Cauchy ülesanne ka juhul, kui lahendeid uuritakse rajast piisavalt kaugel ning lühikese ajavahemiku jooksul, mil rada ei jõua mõju avaldama hakata (signaal ei jõua levida rajani, rajani levinud soojushulk on tühiselt väike jne).

Tihti on ka vastupidi - uurides süsteemi käitumist alghetkest tunduvalt hiljem, on algtingimuste mõju tugevalt nõrgenenud ning segaülesannete lahendid on määratud ainult äretingimustega. Sel juhul vaadeldakse segaülesande asemel algtingimusteta ülesannet.

2.3. Ülesande seade korrektsus.

Et iga matemaatilise füüsika ülesanne modelleerib mingit reaalset füüsikalist protsessi, siis peab ülesande seade ehk püstitus tagama järgmised asjaolud:

1. lahendi olemasolu,
2. lahendi ühesus,
3. lahendi stabiilsuse, st lahend peab sõltuma ülesande lähteandmetest pidevalt. Lahend peab olema selline, et kui alg- ja ääritingimused muutuvad vaid veidi, siis muutub ka lahend vähe. Ülesanded, mis täidavad ülalnimetatud tingimusi, nimetatakse **korrektseteks** ülesanneteks.

2.4. Ülesande redutseerimine lihtsamatele ülesannetele.

Vaatame kõige üldisemat segaülesannet matemaatilise füüsika võrrandile:

$$\hat{L}u(t, M) = F(t, M), \quad (2.6)$$

kus operaator $\hat{L}$ kirjeldab ellipsoideid, paraboolset ja hüperboolset tüüpi võrrandeid. Olgu algtingimused

$$u(0, M) = \varphi(M), \quad u_t(0, M) = \phi(M).$$

Tegemist on üldise rajatingimusega

$$(\gamma_1 \vec{n} \cdot \operatorname{grad} u) + \gamma_2 u|_{\Sigma} = \beta(t, P), \quad P \in \Sigma.$$

Ülesande lihtsustamiseks. 1) tuleb leida võrrandi (2.6) erilahend ilma alg- ja ääritingimusi rahuldamata. Oletame, et me oleme $w(t, M)$, mis rahuldab mittehomogeenset võrrandit

$$\hat{L}w(t, M) = F(t, M).$$

Nüüd otsime lahendit u summana $u(t, M) = w(t, M) + v(t, M)$, kus $v(t, M)$ rahuldab vastavat homogeenset võrrandit $\hat{L}v = 0$ ning lisatingimusi:

$$\begin{aligned} v(0, M) &= \varphi^*(M), & v_t(0, M) &= \phi^*(M), \\ (\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } v) + \gamma_2 v|_{\Sigma} &= \beta^*(t, P), \end{aligned}$$

kus

$$\begin{aligned} \varphi^*(M) &= \varphi(M) - w(0, M), \\ \phi^*(M) &= \phi - w_t(0, M), \\ \beta^*(t, M) &= \beta(t, M) - (\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } w) + \gamma_2 w|_{\Sigma} = \beta(t, P) \end{aligned}$$

Ka viimast ülesannet saab edasi redutseerida. Otsime funktsiooni $v(t, M)$ kahe funktsiooni summana: $v = v_1 + v_2$, kus mõlemad funktsioonid peavad rahuldama homogeenset diferentsiaalvõrrandit nagu rahuldab ka funktsioon v . Ja otsime selliseid funktsioone, et üks neist rahuldaks mittehomogeenseid algtingimusi ning homogeenseid ääritingimusi, teine vastupidi:

$$\begin{aligned} v_1(0, M) &= \varphi^*(M), \\ v_{1,t}(0, M) &= \phi(M), \\ (\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } v_1) + \gamma_2 v_1|_{\Sigma} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(0, M) &= 0, \\ v_{2,t}(0, M) &= 0, \\ (\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } v_2) + \gamma_2 v_2|_{\Sigma} &= \beta^*(t, P). \end{aligned}$$

3. Diferentsiaaloperaatorit omaväärtus ja omafunktsioon.

3.1. Muutujate eraldamine segaülesandes ja omaväärtusülesandes.

Vaatame DVit üldkujul

$$a_1 u_{tt} - \Delta u + b_1 u_t + q(M)u = F(t, M), \quad (3.1)$$

kus a_1, b_1 on konstandid. Tavalisel lainevõrrandil $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $q = 0$. (Üldjuhul peaksime käsitlema pisut üldisemat võrrandit:

$$\rho(M)(a_1 u_{tt} + b_1 u_t) - \text{div}(k(M) \text{grad } u) + q(M)u = F(t, M).$$

Allpool järgnev käsitus on sama ka üldisema võrrandi korral.)

Meid huvitab selle DVi lahend juhul, kui $0 > t \leq \infty$ ja $a_1 \geq 0$. Eelmise alapunkti lõpus nägime, et mittehomogeense võrrandi lahendamise võib redutseerida lihtsamatele juhtumitele. Oletame, et me olemegi selle redutseerimisprotseduuri läbi viinud. Vaatame nüüd homogeenset DVt:

$$a_1 u_{tt} - \Delta u + b_1 u_t + q(M)u = 0, \quad a_1 \geq 0. \quad (3.2)$$

algtingimustega

$$\begin{cases} u(0, M) = \varphi(M), \\ u_t(0, M) = \phi(M). \end{cases} \quad (3.3)$$

Meeldetuletus - näiteks hüperboolset tüüpi võrrandite korral on vaja kahte algtingimust, paraboolset tüüpi võrrandite korral vaid ühte. Lihtsuse mõttes vaatame homogeenset ääritingimust:

$$(\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } u + \gamma_2 u)|_{\Sigma} = 0. \quad (3.4)$$

Muutujate eraldamine tähendab kõigepealt võrrandi (3.2) mittetriviaalsete (samaselt nullist erinevate) erilahendite leidmises, selliste, mis rahuldavad ääritingimust (3.4) ning avaldub korrutisena:

$$u(t, M) = T(t) \cdot V(M). \quad (3.5)$$

St, $T(t)$ on ainult ajast ning $V(M)$ ainult ruumikoordinaatidest sõltuvad funktsioonid.

Muutujate eraldamiseks asendame võrduse (3.5) võrrandisse (3.2). Võtame tuletised ning siis jagame saadud tulemuse läbi $V \cdot T$ -ga, viime T -ga liikmed ühele poole, V -ga teisele poole, kokkuvõttes saame

$$\frac{a_1 T_{tt} + b_1 T_t}{T} = \frac{\Delta V - gV}{V} = \lambda.$$

Ühel pool võrdusmärgi oli vaid aja, teisel ruumifunktsioon. Kuivõrd muutujad on omavahel sõltumatud, siis selline võrdus saab iga t , iga x, y, z jaoks kehtida vaid juhul, kui mõlemad pooled on võrdsed ning võrduvad mingi konstandiga λ . Seega oleme saanud kaks võrrandit:

$$a_1 T_{tt}(t) + b_1 T_t(t) - \lambda T(t) = 0, \quad (3.6)$$

$$\Delta V(M) - (q(M) + \lambda)V(M) = 0. \quad (3.7)$$

Võrrand (3.6) on teist järku konstantsete kordajatega homogeenne lineaarne diferentsiaalvõrrand (vt sissejuhatust). Võrrand (3.7) on eraldamata muutujatega, st osatuletistega DV . Edasiseks muutujate eraldamiseks peaksime nüüd vaatama konkreetset ääritingimust:

$$(\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } V + \gamma_2 V)|_{\Sigma} = 0. \quad (3.8)$$

Seega lõppvastuse saamiseks on meil ülesanne - lahendada võrrandid (3.6), (3.7) koos ääritingimusega (3.8). See ülesanne (3.7)-(3.8) omab mittetriviaalseid lahendeid üksnes parameetri λ kindlatel väärtustel. Neid λ väärtusi nimetatakse **operaatori $\hat{L} = \Delta - (q(M) + \lambda)$ omaväärtusteks**. Vastavaid mittetriviaalseid lahendeid nimetatakse operaatori $\hat{L}$ **omafunktsioonideks** kaaluga $\rho(M)$.

Omaväärtusülesanne seisneb operaatori $\hat{L}$ kõigi omaväärtuste ja neile vastavate omafunktsioonide leidmises, see ülesanne on määratud operaatori $\hat{L}$ ja lineaarse homogeenne ääritingimusega (3.8), st võrrandi

$$\hat{L}V = \lambda V$$

lahendamises, siin λ on operaatori $\hat{L}$ omaväärtus ning V omafunktsioon. Funktsioonile V on esitatud järgmised tingimused:

1) see peab olema vähemalt kaks korda diferentseeruv piirkonnas Ω , milles otsitakse võrrandi lahendit, st nii funktsioon kui ka tema esimest järk tuletised peavad olema kõigis punktides lõpliku suurusega ja pidevad;

2) rajal Σ piisab, kui funktsioonid V on ühe korra diferentseeruvad.

Kõigi selliste funktsioonide hulka nimetatakse operaatori $\hat{L}$ määramispiirionnaks.

3.2. Operaatori omaväärtuste ja omafunktsioonide omadusi.

Vaatame konkreetset operaatorit

$$\hat{L} = \Delta - q(M)$$

1. Operaatori $\hat{L}$ jaoks ääritingimusel (3.8) leidub lõpmatu, kuid loenduv hulk omaväärtusi λ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), kusjuures igale omaväärtusele vastab lõplik arv r_n lineaarselt sõltumatuid omafunktsioone. (Üht OF-i ei saa avaldada lineaarkombinatsioonina teistest OF-dest). Kui mingi $r_n = 1$, siis öeldakse, et vastav omaväärtus on kidumata, vastasel juhul öeldakse, et tegemist on r_n korda kidunud omaväärtus.

2. Erinevatele omaväärtustele vastavad omafunktsioonid on omavahel ortogonaalsed. Olgu meil näiteks kaks erinevat omaväärtust λ_m ja λ_n , millele vastavad omafunktsioonid V_m, V_n . Omafunktsioonide ortogonaalsus:

$$(V_m, V_n) \equiv \int_{\Omega} V_m(M) V_n(M) d\Omega(M) = 0, \quad (3.9)$$

kus Ω - ruumi piirkond, $d\Omega$ - ruumalaelement. Avaldist (V_m, V_n) nimetatakse skalaarkorrutiseks funktsioonide ruumis (funktsiooniruumis). (Pisut üldisemal juhul räägitakse, et omafunktsioonid (OF edaspidi) V_m, V_n on ortogonaalsed kaaluga $\rho(M)$):

$$(\rho V_m, V_n) = (V_m, \rho V_n) \equiv \int_{\Omega} \rho(M) V_m(M) V_n(M) d\Omega(M) = 0,$$

3. Kui omaväärtusele (OV edaspidi) λ_k vastavad OF-d on $V_{k_1}, V_{k_2}, \dots, V_{k_{r_k}}$, siis nende OF-de mistahes lineaarkombinatsioon

$$\sum_{i=1}^{r_k} c_i V_{k_i}$$

on ka sellele OV-ele vastav OF. Alati saab nendest OF-dest moodustada uued, r_k lineaarselt sõltumatut lineaarkombinatsiooni, selliselt, et see uus OF-de hulk oleks samuti omavahel ortogonaalne. Üldjuhul vvõime kõiki lineaarselt sõltumatuid OFe lugeda ortogonaalseteks.

4. Vaadeldud operaatori $\hat{L}$ korral on kõik omaväärtused λ_k reaalsed: $\lambda_k \in \mathcal{R}$.

5. Kui $q(M) \geq 0$ kõikjal $M \in \Omega$ ja konstandid $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ ning $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, siis kõik omaväärtused on mittenegatiivsed, $\forall \lambda_k \geq 0$.

6. Selleks, et $\lambda = 0$ oleks omaväärtus, on tarvilik ja piisav, et $q(M) \equiv 0$ ja $\gamma_2 \equiv 0$.

7. Vaadeldava operaatori korral võib kõiki omafunktsioone lugeda reaalseteks.

8. Kui omafunktsiooni jagada nullist erineva konstandiga, siis saame jällegi OFi. Omafunktsiooni normiks nimetatakse suurust $\sqrt{(V_k, V_k)}$ ja seda tähistatakse:

$$\|V_k\| \equiv \sqrt{(V_k, V_k)}, \quad \text{kus} \quad (V_k, V_k) = \int_{\Omega} V_k^2(M) d\Omega(M)$$

Kui $\|V_k\| = 1$, siis nimetatakse seda OFi normeeritud OF-ks. Kõiki omafunktsioone saab normeerida, kui jagada OF läbi tema kaaluga:

$$V_k \rightarrow W_k = \frac{V_k}{\|V_k\|}, \quad \text{siis} \quad \|W_k\| = 1.$$

(Omafunktsiooni normiks kaaluga ρ nimetatakse suurust $\sqrt{(\rho V_k, V_k)}$ ja ka seda tähistatakse $\|V_k\|$.)

Edaspidi eeldame üldisust kitsendamata, et kõik OFd on ortonormeeritud, st nende norm on 1 ja nad on omavahel ortogonaalsed. Ortonormeeritud (ON) OFe tähistame edaspidi V_{ki} , kus k - omaväärtuste numbrid, i - antud k -ndale omaväärtusele vastav kindel OF. $k = 1, 2, 3, \dots, i = 1, 2, \dots, r_k$.

Ortonormeerituse üldine tingimus:

$$\int_{\Omega} V_{k_1 i_1}(M) V_{k_2 i_2}(M) d\Omega(M) = \delta_{k_1 k_2} \delta_{i_1 i_2}, \quad (3.10)$$

kus $\delta_{i_1 i_2}$ on Kroneckeri sümbol:

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & kui \quad a = b \\ 0, & kui \quad a \neq b. \end{cases}$$

9. Iga vähemalt kaks korda diferentseeruv funktsioon $f(M)$, mis rahuldab ääritingimusi (3.8) on arendatav üldistatud Fourier ritta ortonormeeritud OFde V_{ki} järgi, kusjuures see rida koondub absoluutselt ja ühtlaselt vaadeldavas piirkonnas Ω . St

$$f(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r_k} A_{ki} V_{ki}(M), \quad (3.11)$$

kus A_{ki} on konstandid, mille võib leida järgmise arvutusreegli järgi:

$$A_{ki} = \int_{\Omega} f(M) V_{ki}(M) d\Omega. \quad (3.12)$$

3.3. Sturm-Liouville'i ülesanne.

Sturm-Liouville'i ülesanne on omaväärtusülesanne ühemõõtmelisel juhul (1D-juhul): leida funktsioon $V(x)$, mis lõigul $x \in [a, b]$ rahuldab võrrandit

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dV(x)}{dx} \right) - q(x)V(x) + \lambda \rho(x)V = 0, \quad (3.13)$$

kus $q(x) \geq 0$ on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$, $k(x) > 0$, pidev, diferentseeruv ning ka tuletis $k'(x)$ on pidev funktsioon vaadeldaval lõigul; $\rho(x) > 0$ - pidev funktsioon. Ääreppinnaks on antud juhul kaks punkti: a, b . Ääretingimus:

$$\begin{aligned}\gamma_1 V_x(a) + \gamma_2 V_x(a) &= 0, \\ \delta_1 V_x(b) + \delta_2 V_x(b) &= 0,\end{aligned}$$

kus $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \geq 0$ on konstandid, seejuures $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\delta_1 + \delta_2 > 0$. Kui $k(x) = 1$ ja $\rho(x) = 1$, siis saame eelmises alapunktis käsitletud juhtumi.

Sturm-Liouville'i ülesande omaväärtused on kidumata - igale omaväärtusele vastab vaid üks omafunktsioon. Normeerimistingimus on siin järgmine:

$$\int_a^b \rho(x) V_i(x) V_k(x) dx = \delta_{ik}.$$

Ütleme, et funktsioon $k(x) > 0$, kuid sageli võib $k(x)$ võrduda nulliga mõningates lõigu punktides või ühes või mõlemas otspunktis. Sel juhul tekivad mõningad komplikatsioonid ülesande lahendamisel. Selliseid punkte nimetatakse selle võrrandi **singulaarseteks punktideks**.

Näiteks: Olgu $k(a) = 0$, siis **loomulik ääretingimus** nõuab, et $\lim_{x \rightarrow a} V(x)$ peab olema tõkestatud. Selline kitsendav tingimus piirab muidugi ka funktsioone, mis võivad antud ülesande tingimus rahuldada. Kui üks radadest on lõpmatu, näiteks $b = \infty$, tuleb ka seal kasutada loomulikku ääretingimust:

$$\int_a^\infty \rho(x) V_k^2(x) dx < \infty \text{ peab olema lõplik.}$$

Vastasel juhul puudub omafunktsioonil norm.

4. Operaatorid. Lineaarsed operaatorid. Hermiitilised operaatorid.

4.1. Operaatorid.

Tähistame operaatoreid edaspidi $\hat{L}, \hat{A}, \hat{B}, \dots$. Matemaatikas on operaator defineeritud kui eeskiri, mis määrab kujutise mingist hulgast X hulka Y . Meie vaatleme vaid selliseid operaatoreid, kus hulgad X ja Y on funktsioonide hulgad, st hulkade elementideks on funktsioonid. St.

$$f(M) \in X, \quad M \in \mathcal{R}^3, \quad M = (x, y, z), g(M) \in Y.$$

Eeldame antud peatükis, et funktsioonid võivad omada nii reaalseid kui ka kompleksarvulisi väärtusi. Tähistame

$$\hat{A}f = g.$$

Näited: 1) Võtame hulgast X näiteks elemendi $f(x) = x^2$. Olgu operaatoriks $\hat{A} = \frac{d}{dx}$. Siis

$$\hat{A}f(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x = g_1(x) \in Y.$$

2) $\hat{B} = \frac{d^2}{dx^2}$.

$$\hat{B}f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^2) = 2 = g_2(x).$$

3) Olgu $\hat{C} = x \cdot$.

$$\hat{C}f(x) = x \cdot x^2 = x^3 = g_3(x).$$

4.1.1. Operaatorite omaväärtusülesanne.

Operaatori omaväärtusülesandeks on järgmine: leida võrrandi

$$\hat{L}f = \lambda f, \quad \lambda \in \mathcal{I}. \quad (4.1)$$

kõik lahendid ja operaatori omafunktsioonid. f - omafunktsioonid, λ - omaväärtused. Siin oleme eeldanud, et omaväärtused võivad omada mistahes reaali- või kompleksarvulisi väärtusi, millest igale võib vastata mitu omafunktsiooni. Omaväärtusülesandes on hulk $X = Y$.

Näide. Olgu funktsioon $f(x)$ diferentseeruv ja lõplik vaadeldavad piirkonnas. Olgu $\hat{A} = \frac{d}{dx}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f &= \lambda f \\ f &= Ce^{\lambda x} \end{aligned}$$

4.2. Lineaarne operaator.

Vaatleme edaspidi vaid lineaarseid operaatoreid. Ka eespool käsitletud näidetes ning osatulemistega diferentsiaalvõrrandites olid kõik operaatorid lineaarsed.

Definitsioon. Lineaarseks operaatoriks nimetatakse operaatorit $\hat{A}$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- 1) $\hat{A}(f_1(M) + f_2(M)) = \hat{A}f_1(M) + \hat{A}f_2(M)$.
- 2) $\hat{A}(af(M)) = a\hat{A}f(M)$, kus a - const.

Näiteks operaator Sturm-Liouville'i ülesandes on lineaarne operaator. D'Alembert'i operaator (laineoperaator) on lineaarne.

4.3. Hermiitilised operaatorid.

4.3.1. Kaasoperaatorid.

Antud alapunktis eeldame, et nii operaatorid kui ka funktsioonid võivad olla kompleksed. Olgu meil lineaarne operaator $\hat{L}$. Sellele operaatorile vastab nn kaasoperaator $\hat{L}^+$, mille võime defineerida järgmise seosega. Olgu meil kaks komplekset funktsiooni u ja v antud nende määramispiirkonnas Ω . Eeldame ka, et rajal $u, v \rightarrow 0$. Kaasoperaator on siis määratud järgmiselt:

$$(v^*|Lu) = \int_{\Omega} \hat{L}u d\Omega = \int_{\Omega} u(\hat{L}^+v)^* d\Omega, \quad (4.2)$$

kus v^* on funktsiooni v kaaskompleks. ($\hat{L}^*$ - tähistab komplekselt konjugeeritud operaatorit).

Näide: Olgu $u = xe^{ix}$, siis $u^* = xe^{-ix}$.

Juhul, kui kaasoperaator võrdub operaatori endaga, $\hat{L}^+ = \hat{L}$, nimetatakse operaatorit enesekaasseks operaatoriks.

Näide: Olgu $u(x), v(x)$ suvalised funktsioonid, mis rajal $u, v|_{x=\infty} = 0$. Olgu $\hat{L} = \frac{d}{dx}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^* \hat{L}u dx = \int_{-\infty}^{\infty} v^* \frac{d}{dx}u dx = v^* u|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{d}{dx}v^* dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u^* \frac{d}{dx}v dx$$

Seega $\left(\frac{d}{dx}\right)^+ = -\frac{d}{dx}$. St see operaator ei ole enese kaasoperaator. Kuid võttes operaatoriks $\hat{L} = i\frac{d}{dx}$,

mille komplekselt konjugeeritud on $\hat{L}^+ = -\frac{d}{dx}$. Siis saame

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^* \frac{id}{dx}u dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{id}{dx}v^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \left(\frac{id}{dx}v\right)^* dx$$

Operaatoreid, mis on iseenda kaasoperaatoriteks (on enesekaassed) nimetatakse *hermiitilisteks operaatoriteks*.

Uurime nüüd operaatori $\hat{L}$ omaväärtusi ja omafunktsioone (uurime omaväärtusülesannet):

$$\hat{L}u = \lambda u. \quad (4.3)$$

Korrutame seda avaldist u^* -ga ja integreerime üle piirkonna Ω :

$$(u^*|Lu) \equiv \int_{\Omega} u^* \hat{L}u d\Omega = \int_{\Omega} \lambda u^* u d\Omega \equiv \lambda \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega. \quad (4.4)$$

Viimasest avaldisest saame, et operaatori $\hat{L}$ omaväärtus avaldub kujul:

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} u^* \hat{L}u d\Omega}{\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega}.$$

Järgnevas näitame, et hermiitilise operaatori omaväärtused on reaalsed. Võtame võrrandi (4.3) kaaskompleksse võrrandi:

$$(\hat{L}u)^* = \lambda^2 u^*,$$

korrutame selle mõlemad pooli funktsiooniga u ja integreerime üle piirkonna Ω :

$$\int_{\Omega} u(\hat{L}u)^* d\Omega = \int_{\Omega} u^* \hat{L}u d\Omega = \lambda^* \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega. \quad (4.5)$$

Võrreldes võrdusi (4.4) ja (4.5), näeme, et $\lambda = \lambda^*$. Kuid ainult reaalarv on enda kaaskompleks, seega on hermiitilise operaatori omaväärtused reaalsed.

Hermiitiliste operaatorite omadusi rakendatakse eriti just kvantmehaanikas. Kvantmehaanikas seatakse igale füüsikalisele suurusele vastavusse hermiitiline operaator (HO) ja igale omaväärtusele vastav mõõtmistulemus. Operaatorite hermiitilisuse tõttu on omaväärtused reaalsed ja seega võib neile reaalse mõõtmistulemuse ka vastavusse seada.

Hermiitilised operaatorid on lineaarsed operaatorid.

4.3.2. Teoreeme hermiitiliste operaatorite omafunktsioonide kohta.

Teoreem 1. Erinevatele omaväärtustele vastavad hermiitilise operaatori on ortogonaalsed.

Eeldus: 1) $\hat{L} = \hat{L}^+$,

2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

3) $\lambda_1 \rightarrow u_1, \lambda_2 \rightarrow u_2$.

Väide: $\int_{\Omega} u_1^* u_2 d\Omega = 0$.

Tõestus: Kirjutame u_1 ja u_2 jaoks välja omaväärtusvõrrandid:

$$\hat{L}u_1 = \lambda_1 u_1, \quad (4.6)$$

$$\hat{L}u_2 = \lambda_2 u_2. \quad (4.7)$$

Nüüd korrutame võrrandit (4.6) funktsiooniga u_2^* ja integreerime üle Ω , võrrandit (4.7) korrutame funktsiooniga u_1^* ja integreerime. Saame

$$\int_{\Omega} u_2^* (\hat{L}u_1) d\Omega = \lambda_1 \int_{\Omega} u_2^* u_1 d\Omega, \quad (4.8)$$

$$\int_{\Omega} u_1^* (\hat{L}u_2) d\Omega = \lambda_2 \int_{\Omega} u_1^* u_2 d\Omega. \quad (4.9)$$

Nüüd leiame valemist (4.9) kaaskompleksi ja saadud tulemuse lahutame valemist (4.8). Võrduse vasak pool on siis

$$\int_{\Omega} u_2^* (\hat{L}u_1) d\Omega - \int_{\Omega} (\hat{L}u_2)^* u_1 d\Omega = \int_{\Omega} u_2^* (\hat{L}u_1) d\Omega - \int_{\Omega} u_2^* \hat{L}u_1 d\Omega = 0$$

Siin arvestasime operaatori $\hat{L}$ hermiitilisust: $(u^*|\hat{L}u) = (u|(\hat{L}u)^*)$. Seega peab ka võrduse parem pool tulema null:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega} u_1 u_2^* d\Omega = 0.$$

Kuivõrd $\lambda_1 \neq \lambda_2$, siis $\int_{\Omega} u_1 u_2^* d\Omega = 0$, st omafunktsioonid u_1 ja u_2 on ortogonaalsed.

Teoreem 2. Hermiitilise operaatori erinevate omaväärtustele vastavad omafunktsioonid on lineaarselt sõltumatud.

Eeldus: 1) $\hat{L} = \hat{L}^+$,

2) $\lambda_1 \rightarrow u_1, \lambda_2 \rightarrow u_2, \dots$

3) $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Vaatame siin kogu omaväärtuste hulka, ehk omaväärtuste spektrit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$

Väide: Erinevatele omaväärtustele vastavad omafunktsiooni on lineaarselt sõltumatud. (St, me väidame, et me ei saa avaldada üht omafunktsiooni u_i summana $\sum_{k=1, k \neq i}^{\infty} b_k u_k$, kus on b_k konstandid, mis kõik korraga ei võrdu nulliga.)

Tõestus. Tõestame vastuväiteliselt, st eeldame, et leiduvad sellised konstandid $a_1, a_2, a_3, \dots$, et kehtiks järgmine seos:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots = 0. \quad (4.10)$$

Eeldame, et $a_1 \neq 0$. Korrutame nüüd võrrandi (4.10) mõlemad pooled läbi u_1^* -ga ja integreerime üle piirkonna Ω .

$$a_1 \int_{\Omega} |u_1|^2 d\Omega + a_2 \int_{\Omega} u_2 u_1^* d\Omega + a_3 \int_{\Omega} u_3 u_1^* d\Omega + \dots = 0.$$

Vastavalt teoreemile 1 on saadud võrduse teine, kolmas jne edasi liikmed võrdsed nulliga, esimene aga nullist suurem. Seega $a_1 = 0$, saadud tulemus on vastuolus eeldusega, et $a_1 \neq 0$. Järelikult on need funktsioonid lineaarselt sõltumatud.

Mõned lisamärkused.

Üldiselt võib ühele operaatori omafunktsioonile vastata mitu erinevat omafunktsiooni (st, omaväärtus võib olla kidunud). Omafunktsioonid ei tarvitse olla omavahel ortogonaalsed, kuid lineaarkombinatsiooni abil on võimalik kõiki lineaarselt sõltumatuid omafunktsioone ortogonaliseerida, peale selle võime omafunktsioonid läbi jagada konstandiga, saadud tulemus on taas omafunktsioon. Meeldetuletus: funktsiooni normiks nimetatakse integraali:

$$||u|| \equiv \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega.$$

Ortonormeeritud omafunktsiooni norm $||u|| = 1$. Edaspidi eeldame, et tegemist on ortonormeeritud omafunktsioonide süsteemiga, st

$$\int_{\Omega} u_i^*(M) u_k(M) d\Omega(M) = \delta_{ik}.$$

Kvantmehaanikas kasutatakse hermiitilise operaatoreid. Nende omafunktsioonide süsteem on täielik, st mistahes süsteemi olekut kirjeldav lainefunktsioon on arendatav ritta mistahes kvantmehaanilise operaatori täieliku ortonormeeritud omafunktsioonide süsteemi järgi.

Näiteks, kirjeldagu kvantmehaanilise süsteemi olekut lainefunktsioon Ψ , siis see on esitatav reana

$$\Psi = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots,$$

kus a_i - konstandid.

4.4. Tehteid operaatoritega.

A. Operaatorite summa.

$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, siis

$$\hat{C}f = (\hat{A} + \hat{B})f = \hat{A}f + \hat{B}f.$$

B. Operaatorite korrutamine. Olgu operaatorid $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ ja funktsioon $f \in X$. Operaatorite korrutis $\hat{A}\hat{B}$ on defineeritud kui

$$(\hat{A}\hat{B})u = \hat{A}(\hat{B}f).$$

Üldjuhul pole operaatorite korrutis kommutatiivne, st $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Näide. Olgu funktsioon $f = x^2$, $\hat{A} = x \cdot$ (x-ga korrutamine), $\hat{B} = \frac{d}{dx}$. Siis

$$(\hat{A}\hat{B})f = x \cdot \left(\frac{d}{dx} x^2 \right) = 2x^2.$$

$$(\hat{B}\hat{A})f = \frac{d}{dx} (x \cdot x^2) = 3x^2.$$

Tähistades $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, saab näidata, et $\hat{C}^*$ (kaasoperaator) on $\hat{C}^* = \hat{B}^* \hat{A}^*$.

Teoreem 1. Kui kahe operaatori korrutis on kommutatiivne, (st nad kommuteeruvad), $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, siis on nende operaatoritel ühine, täielik omafunktsioonide süsteem ja vastupidi.

Teoreem 2. Kahe hermiitilise operaatori korrutis on hermiitiline ainult siis, kui need operaatorid kommuteeruvad.

C. Operaatorite kommutaator.

Kahe operaatori $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ kommutaatoriks nimetatakse sümboolit $\hat{C}$:

$$\hat{C} \equiv [\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

5. Fourier meetod.

Fourier' muutujate eraldamise meetodi põhiideeks kõigepealt homogeensete rajatingimustega ülesande selliste erilahendite leidmine, millistes muutujad on kas osaliselt või täielikult eraldunud, ning seejärel leitud lahendite lineaarkombinatsiooni abil lisatingimuste rahuldamine. Täielikul muutujate eraldamisel avaldub otsitav erilahend korrutisena, kus kõik tegurid on erinevate muutujatega ühe muutuja funktsioonid. Mittetäielikul muutujate eraldamisel võivad osa tegureid olla ka mitme muutuja funktsioonid, kuid nii, et mistahes muutuja ei esine rohkem kui ühes teguris.

5.1. Homogeenne võrrand homogeensetel ääritingimustel.

Vaatame segaülesannet kujul

$$a_1 u_{tt} + b_1 u_t - \Delta u + q(M)u = 0, \quad a_1 \geq 0 \quad (5.1)$$

algtingimustega

$$u(0, M) = \varphi(M), \quad u_t(0, M) = \phi(M) \quad (5.2)$$

ja ääritingimustega

$$(\gamma_1 \vec{n} \text{grad } u + \gamma_2 u)|_S = 0. \quad (5.3)$$

Tuletame meelde, et hüperboolse võrrandi korral on vajalikud mõlemad algtingimused, paraboolsel juhul ($a_1 = 0$) on vajalik vaid esimene algtingimus. Elliptilisel juhul pole kumbagi vaja.

Seega otsime võrrandi (5.1) erilahendit

$$u(t, M) = T(t)V(M),$$

kus $M = M(x, y, z)$. Funktsiooni u määramiseks saime omaväärtusülesande

$$\begin{aligned} \Delta V - qV - \lambda V &= 0 \\ (\gamma_1 \vec{n} \text{grad } V + \gamma_2 V)|_S &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Sellel omaväärtusülesandel on olemas mittetriviaalsed (nullist erinevad) lahendid ainult parameetri λ kindlatel väärtustel, nn omaväärtustel.

Olgu λ_n - kindel omaväärtus, millele vastab omafunktsioon $V_n(M)$. Omaväärtusi ja neile vastavad omafunktsioone võime vaadata selliseid, et omafunktsioonid moodustaksid ortonormeeritud süsteemi, st

$$(V_m, V_n) = \int_{\Omega} V_m(M)V_n(M)d\Omega(M) = \delta_{mn}. \quad (5.5)$$

Ühemõõtmisel juhul oli integraali märgi all ka tegur $\rho(x)$. Vaatame konkreetsele T_n -le vastavat lahendit:

$$a_1 T_n''(t) + b_1 T_n'(t) + \lambda_n T_n = 0. \quad (5.6)$$

Seda võrrandit on vaja üksnes hüperboolset ja paraboolset tüüpi võrrandite korral. See võrrand on harilik 2. järku diferentsiaalvõrrand. Hüperboolsel juhul $a_1 \neq 0$ ja võrrandil (5.6) on kaks lineaarselt sõltumatu erilahendit, olgu need tähistatud kui $\bar{T}_n(t)$ ja $\bar{\bar{T}}_n(t)$.

Paraboolsel juhul on vaid üks lineaarselt sõltumatu erilahend,

$$\bar{T}_n = e^{-\frac{\lambda_n}{b_2} t}.$$

Seega, üldiselt on võrrandile (5.1) vastav erilahend, mis rahuldab ka ääritingimust (5.3) esitatav kujul

$$u_n(t, M) = (A_n \bar{T}_n(t) + B_n \bar{\bar{T}}_n) V_n(M), \quad (5.7)$$

kus A_n, B_n on konstandid. Paraboolsel juhul tuleb B_n lugeda võrdseks nulliga.

Algtingimusi (5.2) rahuldavat lahendit $u(t, M)$ otsime erilahendite (5.7) lineaarkombinatsioonina kujul

$$u(t, M) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, M). \quad (5.8)$$

Peame silma, et kuna iga üksik lahend rahuldab ääritingimust (5.3) ja võrrandit (5.1), siis rahuldab neid ka lineaarkombinatsioon (5.8). Nuud tuleb näidata, kuidas leida konstandid $A - n$ ja B_n selliselt, et ka algtingimused oleksid rahuldatud. Esimesest algtingimusest saame

$$u(0, M) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \bar{T}_n(0) + B_n \bar{\bar{T}}_n(0)) V_n(M). \quad (5.9)$$

Teine algtingimus:

$$u_t(0, M) = \phi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \bar{T}'_n(0) + B_n \bar{\bar{T}}'_n(0)) V_n(M). \quad (5.10)$$

Ortogonaliseerimistingimustest lähtudes saame nendest järgmised võrrandid konstantide A_n ja B_n määramiseks. Korrutame tingimused (5.9) ja (5.10) läbi funktsiooniga $V_m(M)$ ja integreerime üle Ω :

$$A_m \bar{T}_m(0) + B_m \bar{\bar{T}}_m(0) = \varphi_m \equiv \int_{\Omega} \varphi(M) V_m d\Omega(M), \quad (5.11)$$

$$A_m \bar{T}'_m(0) + B_m \bar{\bar{T}}'_m(0) = \phi_m \equiv \int_{\Omega} \phi(M) V_m(M) d\Omega(M). \quad (5.12)$$

Siin kasutasime funktsioonide V_m ja V_n ortogonaliseerimistingimust. Olgu meil näiteks summa $\sum_{n=1}^{\infty} F_n V_n(M)$, kus F_n - suvalised konstandid. Korrutame selle läbi $V_m(M)$ -ga ja integreerime üle piirkonna Ω , saame

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \int_{\Omega} V_n(M) V_m(M) d\Omega(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \delta_{nm} = F_m.$$

Seega oleme konstantide A_m ja B_m määramiseks saanud kaks algebralist võrrandit. Leitud lahend rahuldab algtingimusi (5.2). Seega võime otsitud lahendi kirjutada järgmiselt:

$$u(t, M) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \bar{T}_n(t) + B_n \bar{\bar{T}}_n(t)] V_n(M), \quad (5.13)$$

kus konstandid A_n ja B_n määratakse võrduste (5.11) ja (5.12) järgi.

Seda rida nimetatakse ulesande (5.1)-(5.3) formaalseks lahendiks. Tihti on see ka klassikaliseks lahendiks. Enamasti võime vaadata lõplikku rida, sest $A_n \rightarrow 0$, $B_n \rightarrow \infty$, kui $n \rightarrow \infty$.

5.2. Mittehomogeenne võrrand ja homogeenne rajatingimus.

Vaatame taas võrrandit (5.1) koos lisatingimustega (5.2) ja (5.3), kusjuures võrrandi (5.1) võtame nuud mittehomogeenseks. Selline ülesanne on redutseeritav eelmises punktis käsitletud ülesandeks ja järgmiseks ülesandeks:

$$a_1 W_{tt} + b_1 W_t - \Delta W + g(M) W = F(T, M), \quad (5.14)$$

$$W(0, M) = 0, \quad W_t(0, M) = 0, \quad (5.15)$$

$$(\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } W + \gamma_2 W)|_S = 0. \quad (5.16)$$

Siis $u = W + K$, kus K rahuldab eelmises punktis püstitatud ülesannet, W rahuldab võrrandit (5.14).

Ülesande (5.14) lahendit otsime järgmisel kujul:

$$W(t, M) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) V_n(M). \quad (5.17)$$

Funktsioonid V_n määrame võrrandist (5.3) (homogeensed rajatingimused). Loeme kõik need funktsioonid ortonormeerituks.

Vaatame võrrandit

$$\Delta V_n(M) - q(M)V_n(M) + \lambda_n V_n(M) = 0.$$

Asendame selle summa võrrandisse (5.17):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} [(a_1 T_n''(t) + b_1 T_n'(t))] V_n(M) - T_n(t)(\Delta V_n - qV) &= \\ = \sum_{i=1}^{\infty} [(a_1 T_n''(t) + b_1 T_n'(t))] V_n(M) + \lambda_n T_n &= F(t, M). \end{aligned}$$

Seega oleme saanud

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(a_1 T_n''(t) + b_1 T_n'(t) + \lambda_n T_n(t))] V_n(M) = F(t, M).$$

Nüüd korrutame mõlemad pooled läbi funktsiooniga $V_m(M)$ ja integreerime üle Ω . Kasutades seejärel omafunktsioonide V_n, V_m ortonormeerimisomadust, saame T_m määramiseks järgmise võrrandi:

$$a_1 T_m''(t) + b_1 T_m'(t) + \lambda_m T_m(t) = F_m(t), \quad (5.18)$$

kus

$$F_m(t) = \int_{\Omega} F(t, M) V_m(M) d\Omega. \quad (5.19)$$

Võrrand (5.18) on mittehomoogeenne teist järku konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrand, mida oleme käsitlenud sissejuhatuses. Ülesandele (5.18)-(5.19) oleme saanud järgmised algtingimused:

$$T_m(0) = 0, \quad T_m'(0) = 0.$$

5.3. Segaülesanne mittehomoogeensete ääritingimustega.

See ülesanne on kõige üldisem ülesanne, mis on redutseeritav eelmistes punktides vaadeldud ülesannetele. Praegu on lisandunud ääritingimus:

$$(\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } u + \gamma_2 u)|_S = \beta(t, P), \quad \text{kus} \quad P \in S. \quad (5.20)$$

See on eelmisest põhiline (tegelikult ainus) erinevus. Selle ülesande lahendamiseks tuleb esmalt leida suvaline funktsioon, mis rahuldab ääritingimust (5.20). Ülesannet ennast ei pea see funktsioon rahuldama. Tähistame selle funktsiooni $g(t, M)$.

Toome sisse uue otsitava funktsiooni $\chi(t, M)$:

$$\chi(t, M) = u(t, M) - g(t, M).$$

Selle funktsiooni jaoks on rajatingimus homogeenne:

$$(\gamma_1 \vec{n} \cdot \text{grad } \chi + \gamma_2 \chi)|_S = 0.$$

Diferentsiaalvõrrandi χ jaoks leiame, kui kirjutame algsesse ülesandesse $u = \chi + g$, saame

$$a_1 \chi_t t + b_1 \chi_t - \Delta \chi + q\chi = \bar{F}(t, M), \quad (5.21)$$

kus

$$\bar{F} = F - (a_1 g_t t + b_1 g_t) + \Delta g - qg$$

Algtingimused on siis järgmised:

$$\begin{aligned} \chi(0, M) &= \bar{\varphi}(M) = \varphi(M) - g(0, M), \\ \chi_t(0, M) &= \bar{\phi}(M) = \phi(M) - g_t(0, M). \end{aligned} \quad (5.22)$$

6. Sfäärilised funktsioonid ja ortogonaalsed polünoomid.

6.1. Muutujate eraldamine Laplace'i sfäärilise rajapinnaga ülesande korral.

Eelpool vaatasime lihtsamaid ülesandeid, mil uuritavaks piirkonnaks oli näiteks sirge (keel, varras) ja mille rajapinnaks oli kaks punkti või ülesannet, mil rajapinnaks oli ristkülik. Sellistel juhtumitel saame muutujate eraldamisega minna nõ järjest allapoole, näiteks: $u(t, x, y) = T(t)V(x, y)$, $V(x, y) = X(x)Y(y)$ ja vastavalt tulevad ka omaväärtusülesanded, ääritingimused ja algtingimused. Vaatame nüüd lähemalt, kuidas toimida ruumiliste muutujate eraldamisel sfäärilise rajapinna korral.

Sfäärilised koordinaadid:

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = r \cos \vartheta \end{cases},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$

Laplace'i operaator avaldub sfäärilistes koordinaatides järgmiselt:

$$\begin{aligned} \Delta u(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{r}(ru)_{rr} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta}(\sin \vartheta \cdot u_{\vartheta})_{\vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}u_{\varphi\varphi} \\ &\equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Koordinaatide alguspunkti oleme võtnud piirkonna rajaks oleva sfääri tsentrisse. Seega, otsime lahendust homogeensele võrrandile

$$\Delta u = 0 \quad (6.2)$$

algtingimusega

$$\gamma_1 u_r(r_0, \vartheta, \varphi) + \gamma_2 u(r_0, \vartheta, \varphi) = \beta(\vartheta, \varphi), \quad (6.3)$$

kus r_0 on äärepinna raadius.

Kuivõrd u ei sõltu ajast, siis pole ka algtingimusi.

Siin eristatakse kahte liiki ülesandeid:

1) siseülesanne, kui $r \leq r_0$, st vaadeldav piirkond asub seespool sfääri raadiusega r_0 ;

2) välisülesanne, kui $r \geq r_0$, vaadeldav piirkond asub väljaspool sfääri raadiusega r_0 .

Muutujate eraldamisel Laplace'i võrrandis eraldame esmalt radiaalmuutuja r . See tähendab, et me otsime erilahendit kujul

$$u^*(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y(\vartheta, \varphi). \quad (6.4)$$

Muutujate eraldamine on analoogiline eelpool vaadeldud juhtumitega. Siin saame kaks uut võrrandit:

$$\frac{1}{r}(rR)'' - \frac{\lambda}{r^2}R = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta}(\sin \vartheta \cdot Y_{\vartheta})_{\vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta}Y_{\varphi\varphi} + \lambda Y = 0, \quad (6.6)$$

kus λ on muutujate eraldamisel saadud konstant.

Edasi tuleb kasutada nn loomulikke ääritingimusi:

$$|Y(0, \varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty, \quad (6.7)$$

$$Y(\vartheta, \varphi) = Y(\vartheta, \varphi + 2\pi). \quad (6.8)$$

St, ääritingimusel (6.7) arvestasime, et $Y(\varphi, \vartheta)$ on füüsikaline suurus (mis ei saa absoluutväärtuselt minna lõpmata suureks). Ääritingimuse (6.8) juures arvestasime, et punktid φ ja $\varphi + 2\pi$ -ga on ruumis tegelikult üks ja seesama punkt.

Seega võime ülesande lahendamise jagada järgmisteks etappideks:

I: tuleb

- 1) Otsida lahendit kujul (6.4),
- 2) lahendada võrrand (6.5),
- 3) kasutame loomulikke ääritingimusi (6.7)-(6.8) võrrandi (6.6) jaoks,
- 4) tuleb leida omaväärtused λ ;

5) tuleb leida omafunktsioonid Y_n .

II. Lubatud omafunktsioonid tuleb panna valemisse (6.5) ja leida selle üldlahendid. Siis saame kätte ka lubatud erilahendid (6.3). Algse ülesande (6.2)-(6.3) lahendi leiame moodustades nendest erilahenditest kaks sobivat (ääretingimust rahuldavat) lineaarkombinatsiooni.

6.1.1. Omaväärtusülesande (6.6)-(6.8) lahendamine.

Nimetatud ülesande lahendamiseks tuleb meil taas kasutada muutujate eraldamist. St, otsime funktsiooni Y kujul:

$$Y(\vartheta, \varphi) = G(\vartheta)\Phi(\varphi).$$

Selle võrduse asetame võrrandisse (6.6). Siis võttes tuletised ja jagades tulemuse läbi selle korrutisega, saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{(G_{\vartheta} \sin \vartheta)_{\vartheta}}{G} + \lambda + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\Phi_{\varphi\varphi}}{\Phi} &= 0 \cdot \sin^2 \vartheta \\ \sin \vartheta \frac{(\sin \vartheta \cdot G_{\vartheta})_{\vartheta}}{G} + \lambda \sin^2 \vartheta &= -\frac{\Phi_{\varphi\varphi}}{\Phi}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

kus λ - konstant. Saadud võrduse vasak pool sõltub vaid ϑ -st, parem pool φ -st. Saadud võrdus peab kehtima igasuguste ϑ ja φ väärtuste korral. See on võimalik vaid juhul, kui mõlemad pooled on võrdsed mingi konstandiga, tähistame selle γ -ga. Saame kaks uut võrrandit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \vartheta} (\sin \vartheta \cdot G_{\vartheta})_{\vartheta} + \left(\lambda - \frac{\gamma}{\sin^2 \vartheta} \right) G &= 0, \\ |G(0)| < \infty, \quad |G(\Pi)| < \infty. \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\varphi\varphi} + \gamma \Phi &= 0, \\ \Phi(\varphi) &= \Phi(\varphi + 2\pi). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Analüüsime nüüd lähemalt erinevaid võimalusi γ valikuks.

1) $\gamma = 0$. Sel juhul saame võrrandit (6.11) lihtsalt integreerides

$$\Phi(\varphi) = C_1 + \varphi C_2$$

Ääretingimusest saame:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = C_1 + \varphi C_2 + 2\pi C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Seega $\Phi = C_1 = \text{const}$.

2) $\gamma < 0$. Siis on võrrandi (6.11) lahendiks

$$\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{-\gamma}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{-\gamma}\varphi}. \quad (6.12)$$

Ääretingimusest:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = C_1 e^{\sqrt{-\gamma}\varphi} \cdot e^{\sqrt{-\gamma}2\pi} + C_2 e^{-\sqrt{-\gamma}\varphi} \cdot e^{-\sqrt{-\gamma}2\pi}. \quad (6.13)$$

Võrduse (6.13) parem pool võrdub avaldise (6.12) parema poolega vaid juhul, kui $C_1 = C_2 = 0$. Tegemist on triviaalse juhuga.

3) $\gamma > 0$. Siis

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos(\sqrt{\gamma}\varphi) + C_2 \sin(\sqrt{\gamma}\varphi). \quad (6.14)$$

Ääretingimuse kontrolliks vaatame mõlemat erilahendit eraldi:

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos(\sqrt{\gamma}(\varphi + 2\pi)) = C_1 \cos(\sqrt{\gamma}\varphi)$$

juhul, kui $\sqrt{\gamma} = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Samamoodi

$$\Phi(\varphi) = C_2 \sin(\sqrt{\gamma}(\varphi + 2\pi)) = C_2 \sin(\sqrt{\gamma}\varphi)$$

juhul, kui $\sqrt{\gamma} = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Seega oleme saanud omaväärtused $\gamma_n = n^2$. Igale omaväärtusele γ_n vastab kaks sõltumatut omafunktsiooni - üks on siinustega (paaritud funktsioonid), teised koosinustega (paarisfunktsioonid). Ülalvaadeldud juhtum $\gamma = 0$ mahub siin käsitletud juhtumite alla.

Omafunktsioonid võib üles kirjutada (nii on mitmeti mugavam ja kasulik edaspidi) komplekskujul:

$$\begin{aligned}\Phi_n &= C_1 e^{in\varphi}, \\ \gamma_n &= n^2.\end{aligned}\tag{6.15}$$

Nüüd võime asuda ülesande (6.10) lahendamisele. St, peame leidma omafunktsioonid G ja omaväärtused λ . Edaspidi kirjutame γ asemele n^2 . Võrrandi lahendamiseks teeme asenduse

$$t = \cos \vartheta$$

Siis oleme saanud võrrandi

$$[(1-t^2)X'_n(t)]' + \lambda - \frac{n^2}{1-t^2}X_n(t) = 0,\tag{6.16}$$

kus $X_n(t) = X_n(\cos \vartheta) = G_n(\vartheta)$. Lisatingimus on see, et funktsioon $X(t)$ peab olema lõigul $t \in [-1, 1]$ lõplik suurus. Võrrandit (6.16) koos tõkestatuse tingimusega nimetatakse n -järku Legendre'i võrrandiks (ka lihtsalt Legendre'i võrrandiks). n -järku Legendre'i võrrandi lahendid on avaldatavad 0-järku Legendre'i võrrandi lahendi kaudu:

$$X_n(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{dt^n} X_0(t),\tag{6.17}$$

kus $X_0(t)$ on 0-järku Legendre'i võrrandi lahend. Ülesanne taandub seega 0-järku Legendre'i võrrandi lahendamisele:

$$[(1-t^2)X'_0(t)]' + \lambda X_0(t) = 0\tag{6.18}$$

koos lisatingimusega, et lõigul $t \in [-1, 1]$ peab $X_0(t)$ olema tõkestatud. Viimane ülesanne kujutab aga Sturm-Liouville'i ülesannet loomulike ääritingimustega (vt eespoolt), kus $k = 1 - t^2$, $q = 0$, $\rho = 1$.

6.2. Legendre'i võrrandi omaväärtused ja omafunktsioonid.

Vaatame, kuidas lahendada Legendre'i võrrandit (6.18) koos sealjuures oleva lisatingimusega. Otsime sellele ülesandele lahendit astmereana kujul

$$X_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i.\tag{6.19}$$

Märgime, et me oleksime võinud arvestada ka, et $i < 0$, kuid sel juhul oleks tulnud negatiivsed t astmed, mis kohal $t = 0$ annaksid nulliga jagamise ja lõpmatuse.

Asendame võrduse (6.19) võrrandisse (6.18):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda a_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i i(i-1) t^{i-2} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i i(i-1) t^i - \sum_{i=1}^{\infty} 2a_i i t^i = 0. \quad ehk\tag{6.20}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i a_i [i(i+1) - \lambda] = \sum_{i=0}^{\infty} t^{i-2} a_1 i(i-1).\tag{6.21}$$

Arvestame, et paremas pooles olevas summas on kaks esimest liiget nullid, seega algab summa tegelikult liikmest $i = 2$. Tähistame summeerimisindeksi ümber $(i-2) \rightarrow i$, $i \rightarrow i+2$, $2 \rightarrow 0$, $\infty \rightarrow \infty$. Kokkuvõttes oleme saanud

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i a_i [i(i+1) - \lambda] = \sum_{i=0}^{\infty} t^{i+2} a_{i+2} (i+2)(i+1).$$

See võrdus peab kehtima iga t väärtuse korral selles lõigus. Astmereal on võrdsed vaid siis, kui astmereal vastavate liikmete ees olevad kordajad on võrdsed. Seega

$$a_{i+2} = \frac{a_i [i(i+1) - \lambda]}{(i+2)(i+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty\tag{6.22}$$

Siin ilmneb kaks juhtumit:

- 1) Kui $a_0 \neq 0$, siis jäävad alles ka a_2, a_4, a_6 jne.
- 2) Kui $a_0 = 0, a_1 \neq 0$, siis jäävad alles $a_3, a_5, a_7, \dots$

Esimesel juhul saame Legendre'i võrrandi lahendi, mis on paarisfunktsioon, teisel juhul on lahendiks paaritu funktsioon.

Mõned järeldused valemist (6.22):

1. Rea kordajad a_0 , millele vastab paarisfunktsioon; ja a_1 , millele vastab paaritu funktsioon, on suvalised rea kordajad.
 2. Mõlemad astmerealad koonduvad vahemikus $] -1; 1[$, kuid hajuvad lõigu $[-1; 1]$ otspunktides. Nendes otspunktides pole loomulik ääretingimus järelikult rahuldatud.
 3. Selleks, et rida (6.19) oleks punktides $t = -1$ ja $t = 1$ tõkestatud, on tarvilik, et rida katkeks mingil i väärtusel $i = l$, s.t. et kui $i = l$, siis $a_l \neq 0$, kuid $a_{l+2}, a_{l+4}, \dots = 0$.
 4. Selleks, et kolmas järeldus oleks realiseeritav, on vaja, et $\lambda = l(l+1)$.
- Seega antud ülesande omaväärtused

$$\lambda_l = l(l+1). \quad (6.23)$$

Neile omaväärtustele vastavaid omafunktsioone tähistame järgmiselt:

$$X_{0l}(t) \equiv P_l(t), \quad X_{0l}(1) = 1.$$

Neid omafunktsioone nimetatakse **Legendre'i polünoomideks**. Seega

$$P_l(t) = \sum_{i=0}^l a_i t^i. \quad (6.24)$$

Kordajad a_0 ja/või a_1 valitakse selliselt, et $P_l(1) = 1$. Kordajad a_i määratakse rekurrentsest seosest (6.22) arvestades, et λ on määratud seosega (6.23).

6.2.1. Legendre'i polünoomide omadused.

1. Legendre'i polünoomid on ortogonaalsed. See järeldub otseselt sellest, et tegemist on Sturm-Liouville'i ülesandega. Viimase puhul on omafunktsioon omavahel ortogonaalsed.

$$\int_{-1}^1 P_{l_1}(t) P_{l_2}(t) dt = 0, \quad \text{kui} \quad l_1 \neq l_2. \quad (6.25)$$

$P_l(1) = 1$. Legendre'i polünoomi norm:

$$\|P_l(t)\|^2 = \int_{-1}^1 (P_l(t))^2 dt = \frac{2}{2l+1}.$$

2. Legendre'i polünoomid moodustavad täieliku funktsioonide süsteemi, st et kõik lõigul $[-1, 1]$ tõkestatud funktsioonid on avaldatavad Legendre'i polünoomide lineaarkombinatsiooni kaudu.

Legendre'i esimesed polünoomid (esimesed 9):

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \\ P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \\ P_5(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t) \\ P_6(t) &= \frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5) \\ P_7(t) &= \frac{1}{16}(429t^7 - 693t^5 + 315t^3 - 35t) \\ P_8(t) &= \frac{1}{128}(6435t^8 - 12012t^6 + 6930t^4 - 1260t^2 + 35) \end{aligned}$$

6.3. Legendre'i kaasfunktsioonid.

Legendre'i kaasfunktsioonid on defineeritud valemiga

$$P_l^n(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{dt^n} P_l(t). \quad (6.26)$$

Legendre'i kaasfunktsioonid on n -järku Legendre'i võrrandi lahendiks. Avaldisest (6.26) on näha, et kõige suurem Legendre'i polünoom on l -järku, st n -järku Legendre'i võrrandil on mittetriviaalsed lahendid olemas vaid siis, kui $n \leq l$.

Seega on võrrandi (6.16) jaoks omaväärtusülesanne lahendatud. Ja järelikult oleme leidnud ka ülesande (6.10) lahendi:

$$\begin{aligned} G_{nl}(\theta) &= P_l^n(\cos \theta), \\ \lambda_l &= l(l+1); \quad l = 0, 1, 2, \dots \\ \gamma_n &= n^2; \quad n \leq l. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Legendre'i kaasfunktsioonide omadused:

1. Legendre'i kaasfunktsiooni on omavahel ortogonaalsed:

$$\int_{-1}^1 P_{l_1}^n(t) P_{l_2}^n(t) dt = 0, \quad l_1 \neq l_2.$$

$$2. \|P_l^n(t)\|^2 = \int_{-1}^1 (P_l^n(t))^2 dt = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+n)!}{(l-n)!}.$$

$$3. P_l^{-n}(t) = (-1)^n \frac{(l-n)!}{(l+n)!} P_l^n(t), \quad |n| \leq l.$$

6.4. Sfäärilised funktsioonid ja nende omadused.

Sfäärilised funktsioonid $Y_{ln}(\vartheta, \varphi)$ on defineeritud kui ülesande (6.6)-(6.8) tõkestatud lahendid, mis on perioodilised φ suhtes. Eelneva põhjal võime siis kirjutada, et sellised lahendid leiduvad vadi juhul, kui

$$\begin{aligned} \lambda_l &= l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots \\ \gamma &= n^2, \quad |n| \leq l. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Ortonormeerimistingimust

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \|Y_{ln}\|^2(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 1$$

arvestades võime sfäärilised funktsioonid kirja panna järgmiselt:

$$\begin{aligned} Y_{ln}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-n)!}{4\pi(l+n)!}} e^{in\varphi} P_l^n(\cos \vartheta), \\ l &= 0, 1, 2, \dots, \quad n = -l, -l+1, \dots, 1, 0, 1, \dots, l-1, l. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Sfäärilistel funktsioonidel on järgmised omadused:

1. Sfäärilised funktsioonid on omaväärtusülesande (6.6)-(6.8) omafunktsioonideks.
2. Sfäärilised funktsioonid on omavahel ortonormeeritud.

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l_1 n_1}^2(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 n_2}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{l_1 l_2} \delta_{n_1 n_2}. \quad (6.30)$$

Siin on arvestatud, et ruumalaelement $d\Omega$ on sfäärilistes koordinaatides $d\Omega = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, st vaid nurgamuutujate osa seega $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. $Y_{l_2 n_2}^*$ - kaaskompleks, sest Y_{ln} on kompleksne funktsioon (vt definitsioonvalemit (6.29)).

3.

$$Y_{l,n}^*(\vartheta, \varphi) = (-1)^n Y_{l,-n}(\vartheta, \varphi). \quad (6.31)$$

Mõned sfääriliste funktsioonide erijuhud: (esimesed sfäärilised funktsioonid).

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_{1,\pm 1} &= \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} \\
Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \\
Y_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi} \\
Y_{2,\pm 1} &= \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{\pm i\varphi} \\
Y_{2,0} &= \sqrt{\frac{15}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)
\end{aligned}$$

6.5. Radiaalkoordinaadist sõltuv funktsioon

Võrrandi (6.1) erilahend $u_{ln} = R(r)Y_{ln}(\vartheta, \varphi)$. Seega peame leidma nüüd ka funktsiooni $R(r)$, st lahendada võrrandi (6.5). Arvestame, et $\lambda = l(l+1)$, siis saame sellest

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) - l(l+1)R(r) = 0. \quad (6.32)$$

See on Euleri tüüpi diferentsiaalvõrrand. Paneme tähele, et funktsiooni R teist järku tuletise ees on kordaja r^2 , esimest järku tuletise R' ees kordaja r ja tuletiseta liikme ees r^0 . Sellisel diferentsiaalvõrrandil otsime lahendit kujul

$$R(r) = r^s. \quad (6.33)$$

Arvestades, et $R'(r) = s r^{s-1}$ ja $R''(r) = s(s-1)r^{s-2}$, saame

$$s(s-1)r^s + 2s r^s - l(l+1)r^s = 0.$$

Jagades viimase võrduse läbi r^s -ga, saame tingimuseks s jaoks

$$s(s+1) = l(l+1).$$

Viimasel võrrandil on kaks lahendit:

$$s_1 = l, \quad s_2 = -(l+1).$$

Järelikult on võrrandi (6.33) üldlahend järgmine:

$$R(r) = C_1 r^2 + C_2 r^{-(l+1)}. \quad (6.34)$$

Nüüd arvestame, et lahend $u(r, \vartheta, \varphi)$ peab olema lõplik suurus kõikjal (kirjeldab mingit füüsikalist suurust), seega ka punktis $r = 0$. Kuid $r^{-(l+1)}|_{r=0} \rightarrow \infty$. Seega järeldub viimasest nõudest, et $C_2 = 0$ ning võime kirjutada

$$R_l(r) = C_1 r^l. \quad (6.35)$$

Kokkuvõttes oleme saanud Laplace'i võrrandi erilahendi sfäärilistes koordinaatides järgmisel kujul

$$u_{ln}(r, \vartheta, \varphi) = r^l Y_{ln}(\vartheta, \varphi) = r^l P_l^n(\cos \vartheta) e^{\pm i n \varphi}.$$

Üldlahendi saame erilahendite superpositsioonina:

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^{n=l} C_{ln} r^l P_l^n(\cos \vartheta) (A e^{i n \varphi} + B e^{-i n \varphi}). \quad (6.36)$$

6.6. Ortogonaalsed polünoomid. Hermite'i polünoomid.

6.6.1. Ortogonaalsete polünoomide üldiseloostus.

Eespool käsitletud, Legendre'i polünoomid, on lõigul $[-1, 1]$ tõkestatud ja ortogonaalsed kaaluga $\rho = 1$. Kuid võime ka vaadelda selliseid polünoome, mis on tõkestatud lõigul $[a, b]$, on ortogonaalsed ja nende kaal $\rho \neq 1$. Selliseid polünoome on lõpmata palju. Neil on üks ühine omadus:

$$\int_a^b V_n(x)V_m(x)\rho(x)dx = \delta_{nm}.$$

Teoreetilises füüsikas ja eriti just kvantmehaanikas, on eriti tähtsad nn Hermite'i polünoomid. Neid tähistame $H_n(x)$.

Hermite'i polünoomide mõned omadused:

1. Hermite'i polünoomid on antud vahemikus $x \in]-\infty, \infty[$
2. Kaal $\rho(x) = e^{-x^2}$.

Samamoodi on füüsikas olulised ka Laquerre'i polünoomid, millel on järgmised omadused:

1. Laquerre'i polünoomid on määratud poollõigul $x \in [0; \infty[$,
2. Kaal $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$.

6.6.2. Hermite'i polünoomid.

Hermite'i polünoomid on määratud kui diferentsiaalvõrrandi

$$[e^{-x^2}u'(x)]' + \lambda e^{-x^2}u(x) = 0, \quad (6.37)$$

mittetriviaalsed lahendid, kus $x \in]-\infty, \infty[$. Lahendid on igas punktis lõplikud ja lõpmatuses ei tohi need funktsioonid kasvada kiiremini kui x mingi aste.

Diferentsiaalvõrrand (6.37) on tegelikult Sturm-Liouville'i omaväärtusülesande erijuht. Meeldetuletusena - üldjuht oli järgmine: omaväärtusülesanne ühemõõtmelisel juhul: leida funktsioon $u(x)$, mis lõigul $x \in [a, b]$ rahuldab võrrandit

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) - q(x)u(x) + \lambda \rho(x)u(x) = 0,$$

kus $q(x) \geq 0$ on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$, $k(x) > 0$, pidev, diferentseeruv ning ka tuletis $k(x)$ on pidev funktsioon vaadeldaval lõigul; $\rho(x) > 0$ - pidev funktsioon.

Võrreldes viimast kahte võrrandit, näeme, et antud ülesande korral

$$q(x) = 0, \quad k(x) = e^{-x^2}, \quad \rho(x) = e^{-x^2}.$$

Sellisel ülesandel on mittetriviaalsed lahendid üksnes siis, kui omaväärtused

$$\lambda = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.38)$$

Antud omaväärtustele vastavad omafunktsioonid on Hermite'i polünoomid, millel on järgmine kuju:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (6.39)$$

Hermite'i polünoomid on ortogonaalsed, st

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 0, \quad \text{kui} \quad n \neq m. \quad (6.40)$$

Hermite'i polünoomi kaalu ruut on

$$\|H_n(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (H_n(x))^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (6.41)$$

Füüsikas kasutatakse ka ortonormeeritud Hermite'i funktsiooni:

$$\kappa_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

mille korral kehtib ortonormeerimistingimus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \kappa_n(x) \kappa_m(x) dx = \delta_{nm}.$$

(Ortonormeeritud) Hermite'i funktsiooni kaal on 1.

Hermite'i funktsioonid on omafunktsioonid omaväärtusülesandele:

$$\kappa_n''(x) + (\lambda - x^2)\kappa_n(x) = 0 \quad (6.42)$$

koos loomulike rajatingimutega. Viimase omaväärtusülesande omaväärtusteks on

$$\lambda = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Hermite'i polünoomid esinevad omaäärtusülesandes, mismkirjeldab harmoonilise ostsillaatori omavõnkumiste spektrit, määravad omavõnkumiste sagedused (kõik omasagedused pole lubatud). Samuti tulevad Hermite'i polünoomid sisse kvantmehaanikas, kui vaatame osakese liikumist riskülikukujulises potentsiaali-augus.

Näiteid Hermite'i polünoomide kohta:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, \\ H_1 &= 2x, \\ H_2 &= 4x^2 - 2, \\ H_3 &= 8x^3 - 12x, \\ H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

6.7. Laquerre'i polünoomid.

Laquerre'i polünoomid on defineeritud kui diferentsiaalvõrrandi

$$[x^{\alpha+1}e^{-x}u'(x)]' + x^{\alpha}e^{-x} \left(\lambda - \frac{\alpha+1}{2} \right) u(x) = 0. \quad (6.43)$$

mittetriviaalsed lahendid poollõigul $x \in [0, \infty[$, mis on punktis $x = 0$ tõkestatud ja $x \rightarrow \infty$ korral ei kasva kiiremini kui x lõplik aste. Sarnaselt Hermite'i diferentsiaalvõrrandile, on ka võrrand (6.43) Sturm-Liouville'i ülesanne loomulikel ääritingimustel.

Antud omaväärtusülesande omaväärtused on järgmised:

$$\lambda_n = n + \frac{\alpha+1}{2}, \quad (6.44)$$

kus $\alpha \in \mathcal{R}$ on suvaline konstant. Laquerre'i polünoomid on eelpoolnimetatud ülesande omafunktsioonideks:

$$L_n^{\alpha} = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}). \quad (6.45)$$

Laquerre'i polünoomid on ortogonaalsed kaaluga $\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$:

$$\int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx = 0. \quad (6.46)$$

Laquerre polünoomi kaalu ruut on

$$\|L_n^{\alpha}\|^2 = \int_0^{\infty} (L_n^{\alpha}(x))^2 x^{\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!},$$

kus $\Gamma(n + \alpha + 1)$ on nn gammafunktsioon, mis on määratud järgmiselt:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

Juhul, kui α on täisarv, siis on gammafunktsioon antav lihtsa faktoriaali abil (sel juhul on gamma-funktsiooni argumendiks samuti täisarv)

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Veel üks gammafunktsiooni väärtus on hästi tuntud: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Hermite'i ja Laquerre'i polünoomid on omavahel seotud ja seda järgmiselt:

$$\begin{aligned} L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!} H_{2n}(x), \\ L_n^{\frac{1}{2}}(x^2) &= \frac{(-1)^n}{(2^{2n}+1)n!} H_{2n+1}(x). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Seega, Laquerre'i polünoomid on üldisemad kui Hermite'i polünoomid.

Laquerre'i polünoomid esinevad näiteks kvantmehaanikas, kui kirjeldatakse elektroni energiatasemeid vesinikusarnases aatomis (ümber aatomituuma vaid üks elektron tiirlemas).

Näiteid:

$$\begin{aligned} L_0^\alpha &= 1, \\ L_1^\alpha &= (1+\alpha) - x, \\ L_2^\alpha &= \frac{1}{2}[(2+\alpha)(1+\alpha) - 2(2+\alpha)x + x^2] = \frac{1}{2}[(2+\alpha)(1+\alpha-2x) + x^2]. \end{aligned}$$

6.8. Silindrilised funktsioonid. Besseli funktsioonid.

Uurime ringikujulise õhukese membraani vabu võnkumisi. Viimaseid kirjeldab kahemõõtmeline lainevõrrand

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \quad (6.48)$$

koos algtingimustega

$$u(0, M) = \varphi(M), \quad u_t(0, M) = \psi(M). \quad (6.49)$$

Olgu meil tegemist homogeense rajatingimusega

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 u \right) \Big|_{\Sigma} = 0,$$

kus Σ on piirkonna raja. Kuivõrd tegemist on ringikujulise rajajoonega, siis on mõistlik minna üle (tasandilistesse) polaarkoordinaatidesse ρ, φ . Polaarkoordinaatides

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \equiv \frac{1}{\rho} (\rho u_\rho)_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}.$$

Seega, võttes pooluseks membraani tsentri, raadiusseks ρ_0 , siis saame järgmise ülesande:

$$u_{tt} - a^2 \left(\frac{1}{\rho} (\rho u_\rho)_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} \right) = 0. \quad (6.50)$$

koos rajatingimusega

$$\gamma_1 \frac{\partial}{\partial \rho} u_\rho(t, \rho_0, \varphi) + \gamma_2 u(t, \rho_0, \varphi) = 0. \quad (6.51)$$

Otsime antud ülesande erilahendit kujul $u = T(t)V(\rho, \varphi)$. Pärast ruumi- ja ajakoordinaatide eraldamist saame $V(\rho, \varphi)$ jaoks järgmise omaväärtusülesande:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} (\rho V_\rho)_\rho + \frac{1}{\rho^2} V_{\varphi\varphi} + \frac{\lambda}{a^2} V &= 0, \\ \gamma_1 V_\rho(\rho_0, \varphi) + \gamma_2 V(\rho_0, \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Edasi võime minna uuesti muutujate eraldamisele, st otsida funktsiooni $V(\rho, \varphi)$ kujul

$$V_{\rho, \varphi} = R(\rho)\Phi(\varphi). \quad (6.53)$$

Pärast muutujate eraldamist saame nurgamuutuja $\Phi(\varphi)$ jaoks järgmise ülesande:

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \quad (6.54)$$

koos perioodilisuse tingimusega $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Polaarkoordinaadist sõltuva funktsiooni $R(\rho)$ jaoks saame Sturm-Liouville'i omaväärtusülesande:

$$\begin{aligned} (\rho R')' + \left(\frac{\lambda \rho}{a^2} - \frac{\mu}{\rho} \right) R &= 0, \\ |R(0)| < \infty, \quad \gamma_1 R'(\rho_0) + \gamma_2 R(\rho_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Võrrandi (6.54) mittetriviaalseteks lahenditeks perioodiga 2π on funktsioonid

$$\Phi_{1n} = \cos n\varphi, \quad \Phi_{2n} = \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.56)$$

Seega

$$\mu = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(Vt. ka eestpoolt sfääriliste funktsioonide juurest perioodilisuse nõude kontrolli). Tihti, eriti kvant-mehaanikas ettetulevate ülesannete korral, antakse omafunktsioonid $\Phi(\varphi)$ kujul

$$\Phi_n = e^{in\varphi}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Võrrandi (6.55) lahendamiseks teeme esmalt muutujate vahetuse: $z = \frac{\sqrt{\lambda}\rho}{a}$. Ning tähistame $R(\rho) = R\left(\frac{za}{\sqrt{\lambda}}\right) = Z(z)$. Siis $Z(z)$ jaoks saame võrrandi kujul

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dZ}{dz} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) Z = 0. \quad (6.57)$$

Võrrandit (6.57) nimetatakse n -järku Besseli võrrandiks ja tema mittetriviaalseid lahendeid silindrilisteks funktsioonideks.

Besseli võrrandi võib esitada ka kujul

$$Z_n'' + zZ_n' + (z^2 - n^2)Z_n = 0.$$

6.8.1. Besseli funktsioonid.

Üldjuhul ei pruugi Besseli võrrandi järk (n eespool toodud võrrandites) olla täisarvuline. Nii funktsiooni argument z kui ka järk, mille üldjuhul tähistame tähega ν võivad olla kompleksarvulised. Antud kursuse raames vaatame siiski juhtumeid, mil nii z kui ka ν on reaalarvulised. Otsime Besseli võrrandile

$$z^2 Z_n'' + zZ_n' + (z^2 - \nu^2)Z_n = 0. \quad (6.58)$$

lahendit kujul

$$Z(z) = z^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \quad (6.59)$$

Asendades viimase võrduse võrrandisse (6.58), saame

$$z^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k + \sigma)(k + \sigma - 1) z^{k+\sigma-2} + z \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k + \sigma) z^{k+\sigma-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+\sigma+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^2 z^{k+\sigma} = 0$$

Jagades nüüd saadud võrduse läbi z^σ -ga, saame

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(k + \sigma)(k + \sigma - 1) + (k + \sigma) - \nu^2] z^k &= - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+2} \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(k + \sigma)^2 - \nu^2] z^k &= - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+2} \end{aligned}$$

Viimasest seosest leiame seosed konstantide a_k jaoks. Selleks võrdleme võrdluse mõlemal poolel samasuguseid z astmeid. Kuivõrd mõlemal pool võrdusmärko tegemist lõpmatu summaga, mis peavad võrduma kõigi z väärtuste korral, siis saab see kehtida vaid siis, kui mõlemal pool võrdust on sama z astme ees olevad kordajad võrdsed. Näeme, et võrduse vasakul poolel algavad z astmed pihta z^0 -st, samal ajal kui paremal pool z^2 -st.

z^0 korral saame

$$a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0.$$

Seega $\sigma = \pm\nu$. z^1 korral

$$a_1[(1 + \sigma^2) - \nu^2] = 0,$$

millest järeldub, et $a_1 = 0$. Järgmiste konstantide a_k jaoks saame rekurrentse seose

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{k-1}}{(k + \sigma + \nu)(k + \sigma - \nu)}, \quad \text{kui} \quad k = 2, 4, 6, 8, \dots, \quad (6.60)$$

$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$. Paarisarvuliste indeksitega kordajad $a_p, k = 2p$ võib anda a_0 kaudu seega järgmiselt:

$$a_p = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p! (1 \pm \nu)(2 \pm \nu) \dots (k \pm \nu)} \quad (6.61)$$

ja lahendid ise seega

$$Z_{\pm\nu}(z) = a_0 z^{\pm\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p\pm\nu}}{2^{2p} p! (1 \pm \nu)(2 \pm \nu) \dots (p \pm \nu)}. \quad (6.62)$$

Leitud funktsioonid saab esitada kompaktsel kujul kasutades Euleri gammafunktsiooni $\Gamma(\nu)$, mis on määratud järgmiselt:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx.$$

Juhul, kui gammafunktsiooni argumendiks on positiivne naturaalarv, on gammafunktsioon esitatav tavalise faktoriaali abil:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Tundmatu kordaja a_0 on Besseli funktsiooni jaoks konkretiseeritud järgmiselt:

$$a_0 = \frac{1}{2^{\pm\nu} \Gamma(1 \pm \nu)}$$

Sellisel juhul saame otsitud funktsioonid $Z_{\pm\nu}$ esitada **Besseli funktsioonide** $J_{\pm\nu}(z)$ kaudu. Besseli funktsioonid üldkujul:

$$J_{\pm\nu}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(p \pm \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p \pm \nu}. \quad (6.63)$$

Eelpool uuritud ülesande korral oli meil Besseli funktsiooni järk naturaalarvuline n . Siis

$$J_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p}. \quad (6.64)$$

Besseli võrrandi teine erilahend $J_{-n}(z)$ on Besseli funktsioonist lineaarselt sõltuv:

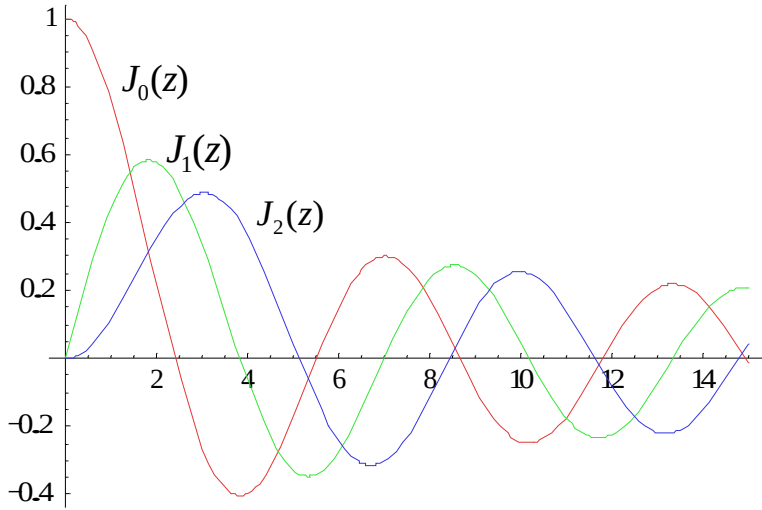
$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),$$

seetõttu ei saa selle abil Besseli võrrandi üldlahendit esitada. Kuid Besseli võrrandil on ka teine, Besseli funktsioonist $J_n(z)$ lineaarselt sõltumatu lahend, mida nim Neumanni funktsiooniks, $Y_n(x)$. Seega võime Besseli võrrandi (6.57) jaoks üldlahendi kujul

$$Z(z) = C J_n(z) + D Y_n(z)$$

Neumanni funktsioon on aga $z = 0$ korral tõkestamata ning tingimusest (6.55) saame $D = 0$. Seega

$$R(\rho) = C J_n \left(\frac{\sqrt{\lambda} \rho}{a} \right). \quad (6.65)$$



Joonis 3: Besseli funktsioonide $J_0(z)$, $J_1(z)$ ja $J_2(z)$ graafikud.

λ leidmiseks tuleb kasutada teist rajatingimust:

$$\gamma_1 J'_n \left(\frac{\sqrt{\lambda} \rho_0}{a} \right) + \gamma_2 J_n \left(\frac{\sqrt{\lambda} \rho_0}{a} \right) = 0.$$

Sellel võrrandil on $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$ korral lõpmatu, kuid loenduv hulk lahendeid. Tähistame need lahendid $\mu_m^n \equiv \mu_m^n(\gamma_1/\gamma_2)$. Seega võime kirjutada

$$\gamma_1 J'_n(\mu_m^n) + \gamma_2 J_n(\mu_m^n) = 0.$$

λ jaoks saame siis tingimuse:

$$\lambda_m^n = \left(\frac{\mu_m^n a}{\rho_0} \right)^2. \quad (6.66)$$

St, ka omaväärtused λ on loenduvad, kuid neid on lõpmatu hulk. Omaväärtustele λ_m^n vastavad omafunktsioonid

$$Q_m^n(\rho) = \frac{1}{N_m^n} J_n \left(\frac{\mu_m^n \rho}{\rho_0} \right), \quad (6.67)$$

kus N_m^n on normeerimiskonstant.

Besseli funktsioonide omadusi.

Besseli funktsioonid moodustavad lõigul $\rho \in [0, \rho_0]$ täieliku ortonormeeritud süsteemi kaaluga ρ , st

$$\int_0^{\rho_0} Q_{m_1}^n(\rho) Q_{m_2}^n(\rho) \rho d\rho = \delta_{m_1 m_2}. \quad (6.68)$$

6.8.2. Dirichlet' ülesanne silindri jaoks.

Parem näide sellest, kus ilmnevad Besseli funktsioonid on järgmises ülesandes (mille lahendamise ka lõpuni, mitte ei jää poole peale pidama).

Vaatame silindrit kõrgusega h ja raadiusega a . Silindri põhjal hoitakse temperatuuri T , mis sõltub vaid polaarraadiusest ρ : $T = F(\rho)$. Silindri külgedel ja peal hoitakse temperatuuri $T = 0$. Leida temperatuuri jaotus silindris.

Temperatuurijaotust ja soojuste levikut kirjeldab juhul, kui kehas puuduvad soojuseallikad, järgmine võrrand:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a(M) \Delta T = 0.$$

Antud juhul on meil tegemist statsionaarse temperatuurijaotusega (temperatuur ei sõltu ajast) ning silindrilise sümmeetriaga. Samuti ei sõlud temperatuur ka nurgamuutujast φ , st $T = T(\rho, z)$. Seega oleme saanud järgmise ülesande:

$$\begin{aligned}\Delta T &= 0, \\ T(a, z) &= 0, \quad T(\rho, h) = 0, \quad T(\rho, 0) = F(\rho).\end{aligned}\tag{6.69}$$

Ülesande lahendamiseks kirjutame Laplace'i operaatori välja silindrilistes koordinaatides (ilma nurgamuutujata φ):

$$\Delta T \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.\tag{6.70}$$

Vastavalt Fourier' meetodile otsime lahendit kujul $T(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$. Pannes antud avaldise võrrandisse (6.70) ja eraldades muutjad, saame kaks võrrandit

Kuivõrd tegemist silindrilise sümmeetriaga ning statsionaarse ...