Tartu Ülikool
Teoreetilise Füüsika Instituut

Vektor- ja tensoranalüüs

Loengukonspekt koos ülesannete lahendustega
Tugineb suuresti Ivar Piir'i loengukonspektil

Tõnu Laas ja Risto Tammelo

2000-2004

Sisukord

1 Vektorid. Ortogonaalsed teisendused.

1.1 Vektori mõiste. Vektori omadused. Vektorruum.

Füüsikakursusest on tuttavad kahte liiki füüsikalised suurused: skalaarid ja vektorid. **Skalaarne suurus** ehk **skalaar** iseloomustab valitud suurust üheainsa mõõtarvuga. Näiteks - temperatuur, aine tihedus, rõhk, elektrivälja potentsiaal. Kõik need suurused võivad olla (kuid ei pruugi) kolme ruumikoordinaadi (ja lisaks aja) funktsioonid: $T = T(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$ jne, kuid selle suuruse iseloomustamiseks antud ruumipunktis saab kasutada vaid üht mõõtarvu.

Vektorilisi suurusi ehk **vektoreid** iseloomustab lisaks arvulisele suurusele (vektori pikkusele) ka nende ruumiline siht ja suund. Skalaari matemaatiliseks mudeliks on reaalarv, vektoril **geomeetriline vektor**, mis on esitatav suunatud lõiguna, millel on algus- ehk rakenduspunkt, ja lõpppunkt: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Siin A on algus- ja B - lõpppunkt.

Nullvektoriks nim. vektorit, mille algus- ja lõpppunkt ühtivad (pikkus on null): $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Kolmnurga reegel: geomeetriliste vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ summaks $\vec{a} + \vec{b}$ nimetame vektorit, mis on suunatud vektori $\vec{a}$ alguspunktist vektori $\vec{b}$ lõpp-punkti; eeldusel, et vektor $\vec{b}$ on rakendatud vektori $\vec{a}$ lõpp-punkti.
Rööpküliku reegel: vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ geomeetriline summa on võrdne nendele vektoritele ülesehitatud rööpküliku diagonaaliga $\vec{c}$.

Vektori $\vec{a}$ korrutis reaalarvuga α on vektor $\alpha\vec{a}$, mis on samasihiline vektoriga $\vec{a}$ ja mille pikkus $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$. Kui $\alpha > 0$, siis $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, kui $\alpha < 0$, siis $\alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Numbrite (ehk skalaaride) algebras kehtivad liitmise, lahutamise ja korrutamise operatsioonid on üldistatavad ka vektorite algebrale.

Vektoralgebra reeglid

1. Vektorite liitmine on kommutatiivne: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. Vektorite liitmine on assotsiatiivne: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. On olemas liitmistehte suhtes neutraalne nullvektor $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ iga $\vec{a}$ korral.
4. Iga $\vec{a}$ korral leidub vastandvektor $\vec{a}' = -\vec{a}$, nii et $\vec{a} + \vec{a}' = 0$.
Vektori korrutamine arvuga on distributiivne mõlema teguri suhtes:
5. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
Vektori korrutamine arvuga on assotsiatiivne reaalarvuliste tegurite suhtes:
7. $\alpha(\beta\vec{a}) = \alpha\beta\vec{a}$.

Ülesanne 1 *Näidata algebraliselt ja geomeetriliselt (joonisel) reegli 1 kehtivust.*

Lahendus.
1) Eeldame, et meil on tegemist üldjuhulise n-mõõtmelise ruumiga:

$$\vec{a} = (a_1, a_1, \ldots, a_n),$$

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= (b_1, b_2, \ldots, b_n). \\
\vec{a}+\vec{b} &= (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) = \\
&= (b_1+a_1, \ldots, b_n+a_n) = (b_1, \ldots, b_n) + (a_1, \ldots, a_n) = \vec{b}+\vec{a}.
\end{aligned}$$

Siin kasutasime arvude liitmise kommutatiivsust.

Reegli 1 kehtivuse näitamiseks geomeetriliselt eeldame, et tegemist on kahemõõtmelise ruumiga.
Joonisel 1 on näidatud vektorid $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Kasutades rööpküliku reeglit leiame vektori $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Tähistame $\vec{c} = (c_1, c_2)$. Kuivõrd OB on paralleelne AC-ga ja OA on paralleelne BC-ga, siis

$$b_1 = a_1c_1 \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{a}_2 = \mathrm{b}_2\mathrm{c}_2. \tag{1.1}$$

(Siin a_1c_1 ja b_2c_2 tähendavad lõike punktist a_1 punkti c_1 ja punktist b_2 punkti c_2 vastavalt, mitte korrutisi). Jooniselt 1 näeme, et

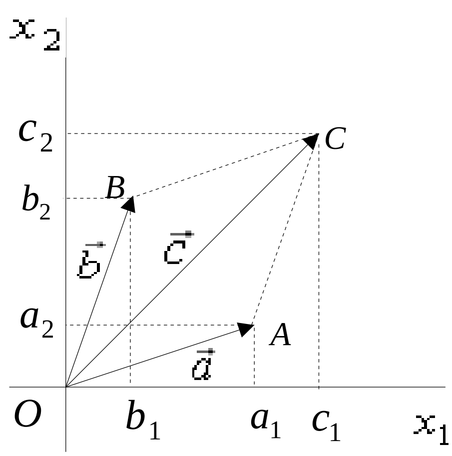
$$c_1 = a_1 + a_1c_1, \qquad c_2 = b_2 + b_2c_2. \tag{1.2}$$

Pannes võrdused (1.1) võrdustesse (1.2), saame

$$c_1 = a_1 + b_1, \qquad c_2 = a_2 + b_2$$

ehk

$$\vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \vec{a} + \vec{b}.$$



Joonis 1: Vektorite liitmine on kommutatiivne

Seega on graafiline ja analüütiline meetod samaväärsed.

Loetletud omadused 1-7 järelduvad tehete geomeetrilisest tõlgendusest. On võimalik ka abstraktne käsitlus: nimetada vektoriteks suvalisi objekte, mille korral on defineeritud liitmine ja korrutamine reaalarvuga, kusjuures need kaks tehet rahuldavad geomeetriliste vektorite vallast tuttavaid tingimusi 1-7. Kõik nii defineeritud objektid moodustavad mõnesuguse **vektorruumi** ehk **lineaarse ruumi** V (või L).

Niisiis: **lineaarseks ruumiks** ehk **vektorruumiks** V nimetatakse suvalise päritoluga objektide $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ hulka, kui: 1) mistahes kahe elemendi $\vec{a}, \vec{b} \in V$ korral leidub nendega üheselt määratud kolmas element $\vec{a}+\vec{b} \in V$, mida nimetatakse nende elementide summaks ja 2) mistahes elemendi $\vec{a} \in V$ ja reaalarvu α korral leidub üheselt määratud korrutis $\alpha\vec{a} \in V$; ning on defineeritud hulga nullelement. Seejuures need tehted rahuldavad tingimusi 1 - 7. Võib öelda lühemalt: vektorruum V on kinnine reeglitega 1-7 määratud liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes.

Ülesanne 2 *Olgu antud vektorid $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Leida vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$, mis rahuldavad järgmisi võrrandeid:*

$$3\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{a} + \vec{b} \tag{1.3}$$

$$-2\vec{x} + 4\vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b} \tag{1.4}$$

Lahendus. Võrrandist (1.3) saame

$$\vec{y} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{x}. \tag{1.5}$$

Korrutades nüüd võrrandit (1.5) neljaga ja pannes saadud tulemuse võrrandisse (1.4), saame

$$4\vec{y} = 8\vec{a} + 4\vec{b} - 12\vec{x}$$

ja

$$\begin{aligned} -2\vec{x} + 8\vec{a} + 4\vec{b} - 12\vec{x} &= \vec{a} - 2\vec{b} \\ -14\vec{x} &= -7\vec{a} - 6\vec{b} \\ \vec{x} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

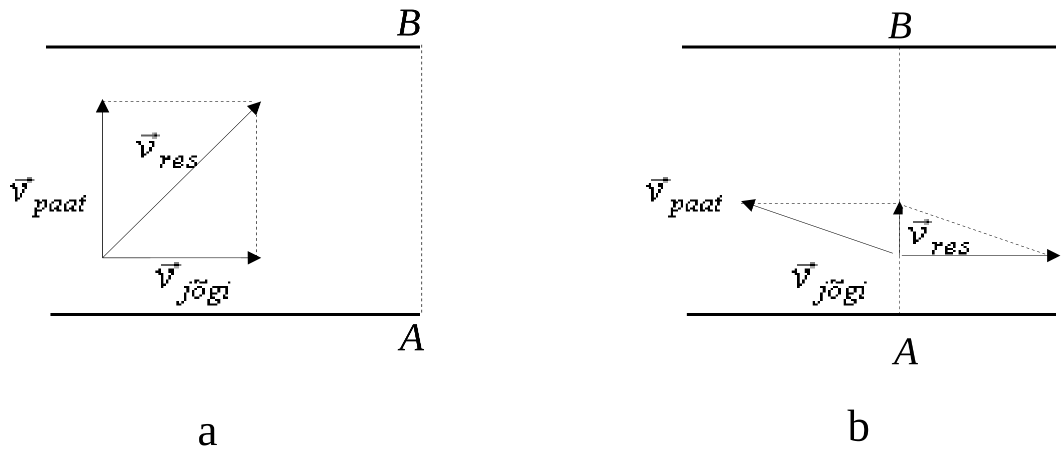
Pannes võrduse (1.5) võrdusesse (1.6), saame

$$\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{7}\vec{b}.$$

Seega võime vektorite algebras lineaarse võrrandisüsteemi lahendada samamoodi nagu reaalarvude algebra puhul.

Ülesanne 3 *Jõe voolu kiirus on 20 km/h. Paat liigub risti jõe voolu suunaga kiirusega 20 km/h. Milline on paadi liikumise (summaarne) kiirus ja liikumise suund? Kas on võimalik, et paat ületab jõe lühimat teed pidi, st punktist A punkti B? (vt joonis 2a).*

Lahendus. Kasutades rööpküliku reeglit, leiame, et resultantkiirus on ruudu diagonaal (vt joonis a), seega on paadi kiirus $v_{res} = 20\sqrt{2}\frac{km}{h} \approx 28\frac{km}{h}$.
Et vastata teisele küsimusele, joonistame jõe kiirusevektori ja resultantkiiruse vektori nagu näidatud joonisel b. Ehitades nüüd üles rööpküliku nagu näidatud joonisel, näeme, et kolmnurga hüpotenuus peaks võrduma ühe kaatetiga (mõlema pikkus on 20 km/h). See on võimatu. Sellisel juhul vektor $\vec{v}_{res} = \vec{0}$.

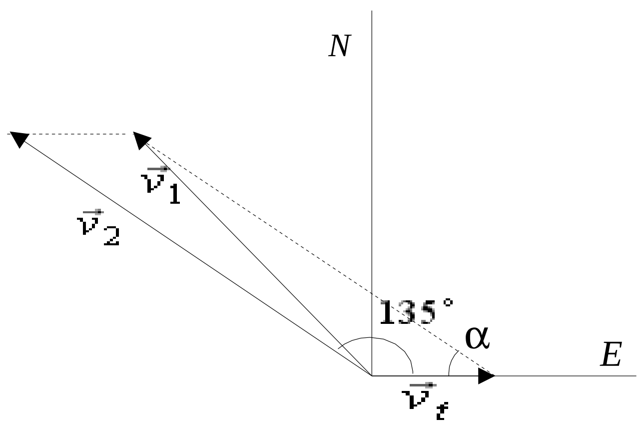


Joonis 2: Paadi liikumine jõel.

Ülesanne 4 *Lennuk liigub loodesse kiirusega* 500 *km/h maa suhtes mõõdetuna. Tuul puhub maa suhtes kiirusega* 50 *km/h läänest itta. Millise kiirusega ja millises suunas lendaks lennuk, kui tuult poleks?*

Lahendus. Tähistame
$\vec{v}_t$ - tuule kiirus;
$\vec{v}_1$ - lennuki kiirus maa suhtes, kui tuul puhub;
$\vec{v}_2$ - lennuki kiirus maa suhtes kui tuul ei puhuks (vt. joonis). Siis

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_t.$$



Kasutades koosinusteoreemi, leiame

$$(v_2)^2 = (v_1)^2 + (v_t)^2 - 2v_1v_2\cos 135^o,$$
$$v_2 = 536,5 \text{ km/h}$$

Siinusteoreemi kasutades $\dfrac{v_2}{\sin 135^o} = \dfrac{v_1}{\sin\alpha}$ saame

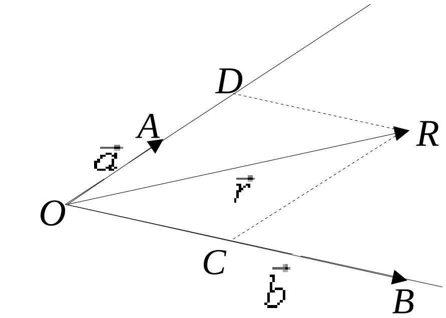
$$\sin\alpha = 0,659, \qquad \alpha = 41,2^o$$

Seega, ilma tuuleta lendaks lennuk kiirusega $536,5$ km/h $41,2^o$ lääne suunast põhja poole.

1.2 Vektorruumi baas. Vektori pikkus. Ühikvektor. Vektorite lineaarne sõltuvus.

Ülesanne 5 *Olgu antud 2 mittekollineaarset vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Leida suvalise vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ poolt määratud tasandil asuva vektori $\vec{r}$ avaldis nende kahe vektori kaudu.*

Lahendus. **Mittekollineaarsed vektorid** on vektorid, mis pole ühe ja sama joonega paralleelsed. Seega, kui nende alguspunktid langevad kokku, siis määravad need vektorid tasandi. Olgu $\vec{r}$ suvaline vektor, mis asub vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ poolt määratud tasandil ja langegu selle vektori alguspunkt kokku vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ alguspunktiga O. Tõmbame vektori $\vec{r}$ lõpppunktist vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ paralleelsed sirged, konstrueerides seega rööpküliku $ODRC$. Jooniselt on näha, et



$$\overrightarrow{OD} = x\,\overrightarrow{OA} = x\vec{a}, \qquad \text{kus } x \text{ on skalaar}$$
$$\overrightarrow{OC} = y\,\overrightarrow{OB} = y\vec{b}, \qquad \text{kus } y \text{ on skalaar}$$

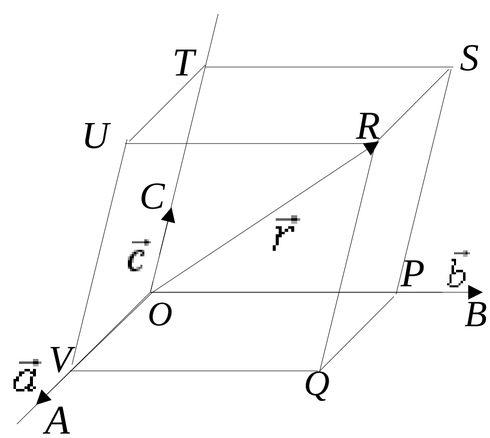
Vektorite liitmisel rööpküliku reegli järgi saame

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} \qquad \text{ehk} \qquad \vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

mis ongi soovitud avaldis.
Vektoreid $x\vec{a}$ ja $y\vec{b}$ nimetatakse vektori $\vec{r}$ **komponentvektoriteks** sihtidel $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vastavalt. Skalaarsed suurused x ja y võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed, sõltuvalt vektorite suundadest. x ja y on üheselt määratud iga vektorite kolmiku $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{r}$ jaoks. Vektoreid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ nimetatakse tasandi **baasivektoriteks**.

Ülesanne 6 *Olgu antud kolm mittekomplanaarset vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$, leida avaldis suvalise vektori $\vec{r}$ avaldamiseks nende vektorite kaudu.*

Lahendus. **Mittekomplanaarsed vektorid** on vektorid, mis pole ühe ja sama tasandiga paralleelsed. Järelikult, kui nende vektorite alguspunktid ühtivad, siis ei asu need vektorid ühel ja samal tasandil.
Olgu $\vec{r}$ suvaline vektor ruumis, mille alguspunkt langegu kokku vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ alguspunktiga O. Läbi $\vec{r}$ lõpppunkti R lähevad tasandid, mis on paralleelsed vastavalt vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$, $\vec{a}$ ja $\vec{c}$ poolt määratud tasanditega ja milledest saab koostada rööptahuka $PQRSTUVO$ nagu joonisel. Jooniselt on näha, et

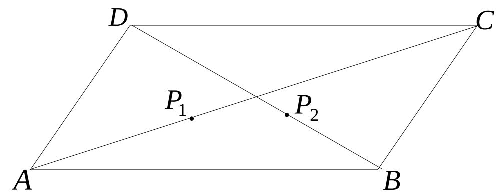


$$\overrightarrow{OV} = x\,\overrightarrow{OA} = x\vec{a}, \qquad \text{kus } x \text{ on skalaar}$$
$$\overrightarrow{OP} = y\,\overrightarrow{OB} = y\vec{b}, \qquad \text{kus } y \text{ on skalaar}$$
$$\overrightarrow{OT} = z\,\overrightarrow{OC} = z\vec{c}, \qquad \text{kus } z \text{ on skalaar.}$$

Kuid $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{VQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OT}$ ehk $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.
Sellisest konstruktsioonist on ilmselt selge, et antud $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja $\vec{r}$ jaoks on x, y ja z üheselt määratud. Vektoreid $x\vec{a}$, $y\vec{b}$ ja $z\vec{z}$ nimetatakse vektori $\vec{r}$ **komponentvektoriteks** vastavalt $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ sihtidel. Vektoreid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ nimetatakse kolmruumi **baasivektoriteks**.
Erijuhul, kui $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on omavahel risti olevad ühikvektorid $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$, siis on ülaltoodust näha, et iga suvalise vektori $\vec{r}$ võib üheselt avaldada $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ abil: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ülesanne 7 *Näidata, et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteise.*

Joonisel on näha rööpkülik $ABCD$ kahe diagonaaliga. Eeldame, et nad ei poolita teineteist ning olgu P_1 diagonaali AC keskpunkt ning P_2 diagonaali BD keskpunkt. Siis



$$\overrightarrow{AP_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP_2} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} =$$
$$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) =$$
$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP_2}.$$

Järelikult langevad punktid P_1 ja P_2 kokku ning diagonaalid AC ja BD poolitavad teineteist.

Ülesanne 8 *Leida järgmiste vektorite pikkus:*

$$\vec{a} = (1, 4), \qquad \vec{b} = (4, 0, 3), \qquad \vec{c} = (0, -1, 1).$$

Leida, kas järgmised vektorid on ühikvektorid:

$$\vec{d} = (1, 0), \qquad \vec{e} = (1, \frac{1}{2}), \qquad \vec{f} = (1, -1, 0), \qquad \vec{g} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Lahendus. Olgu meil tegemist n-mõõtmelise vektoriga $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_2)$. Selle **vektori pikkus** ehk **vektori moodul** on

$$|\vec{x}| \equiv x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Kasutades seda definitsiooni, leiame:

$$|\vec{a}| = |(1, 4)| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$|\vec{c}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

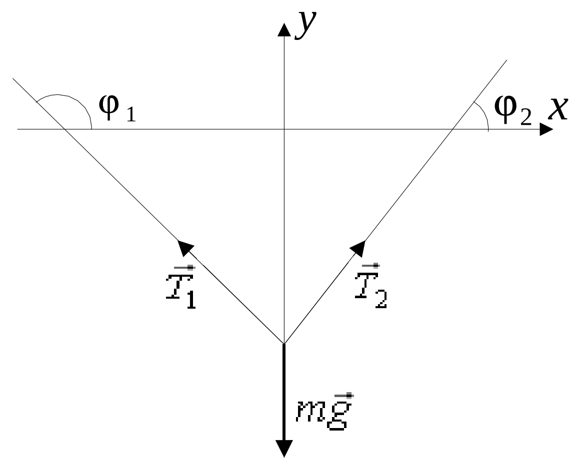
Ühikvektor on vektor, mille pikkus on 1. Seega
$|\vec{d}| = \sqrt{1} = 1$ - $\vec{d}$ on ühikvektor.
$|\vec{e}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} \neq 1$ - $\vec{e}$ pole ühikvektor.
$|\vec{f}| = \sqrt{2} \neq 1$ - $\vec{f}$ pole ühikvektor.
$|\vec{g}| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$ - $\vec{g}$ on ühikvektor.

Ülesanne 9 *Keha, massiga m on riputatud kahe massitu nööri otsa nagu näidatud joonisel. Kehale mõjuv raskusjõud on $m\vec{g}$. Leida nööride pinged (nööre pingutavad jõud) $\vec{T}_1$ ja $\vec{T}_2$.*

Lahendus. Kuivõrd süsteem on tasakaalu-asendis, siis süsteemile mõjuvate jõudude resultantjõud on 0, seega

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Jõu $\vec{T}_1$ komponendid on $|\vec{T}_1|\cos\varphi_1, |\vec{T}_1|\sin\varphi_1$ (jõuvektori projektsioonid x- ja y- teljele). $\vec{T}_2$ komponendid on $|\vec{T}_2|\cos\varphi_2, |\vec{T}_2|\sin\varphi_2$. Seega võime kirjutada jõudude x- ja y-telgede sihiliste komponentide jaoks vastavalt



$$\begin{aligned} |\vec{T}_1|\cos\varphi_1 + |\vec{T}_2|\cos\varphi_2 &= 0 \\ |\vec{T}_1|\sin\varphi_1 + |\vec{T}_2|\sin\varphi_1 - m|\vec{g}| &= 0. \end{aligned}$$

Esimesest võrrandist saame $|\vec{T}_1| = -\dfrac{|\vec{T}_2|\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}$. Asendades selle teise võrrandisse, saame

$$|\vec{T}_2|(\sin\varphi_2 - \frac{\cos\varphi_2\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}) - m|\vec{g}| = 0.$$

Viies $m|\vec{g}|$ paremale poole võrdusmärki ning korrutades saadud tulemuse läbi $\cos\varphi_1$-ga, saame:

$$|\vec{T}_2|(\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_1\sin\varphi_1) = m|\vec{g}|\cos\varphi_1.$$

Võrduse vasakul poolel sulgudes on $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$. Seega saame

$$|\vec{T}_2| = \frac{m|\vec{g}|\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Analoogiliselt leiame ka avaldise $|\vec{T}_1|$ jaoks:

$$|\vec{T}_1| = -\frac{m|\vec{g}|\cos\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Ülesanne 10 *1) On antud 3-mõõtmeline vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Leida vektoriga $\vec{a}$ paralleelne ühikvektor.*
2) Leida iga alljärgneva vektoriga paralleelne ühikvektor.

$$\vec{a} = (2, 4), \qquad \vec{b} = (-1, 3, 0), \qquad \vec{c} = (\alpha, 2\alpha, \alpha + 1, 6).$$

3) Leida ühikvektor, mis on paralleelne järgmiste vektorite summaga:

$$\vec{a} = (3, 4, 2), \qquad \vec{b} = (1, -3, -5).$$

Lahendus. 1) Olgu $\vec{u}$ vektoriga $\vec{a}$ paralleelne ühikvektor. St

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1.$$

Et vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{u}$ on paralleelsed, siis

$$\vec{u} = \alpha\vec{a}, \tag{1.7}$$

kus α on skalaar. Siis

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= |\alpha\vec{a}| = |(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)| \qquad \text{ehk} \\ 1 &= \sqrt{\alpha^2 a_1^2 + \alpha^2 a_2^2 + +\alpha^2 a_3^2}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Lahendades viimase võrrandi α suhtes, saame

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{1}{|\vec{a}|}.$$

Võrdusest (1.7) tuleneb

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Seega, antud vektoriga paralleelse ühikvektori leidmiseks tuleb vektor jagada tema pikkusega.

2)
$$\begin{aligned} \vec{u}_a &= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{4+16}} \cdot \vec{a} = \left(\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}\right) \\ \vec{u}_b &= \frac{1}{\sqrt{10}}\ \vec{b} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right) \\ \vec{u}_c &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 + (\alpha+1)^2 + 36}}\ \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{6\alpha^2 + 2\alpha + 37}}(\alpha, 2\alpha, \alpha+1, 6) \end{aligned}$$

3) Leiame esmalt vektorite summa, tähistame selle $\vec{d}$-ga.

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} = (3,4,2) + (1,-3,-5) = (4,1,-3)$$

Selle vektoriga paralleelne ühikvektor on järelikult

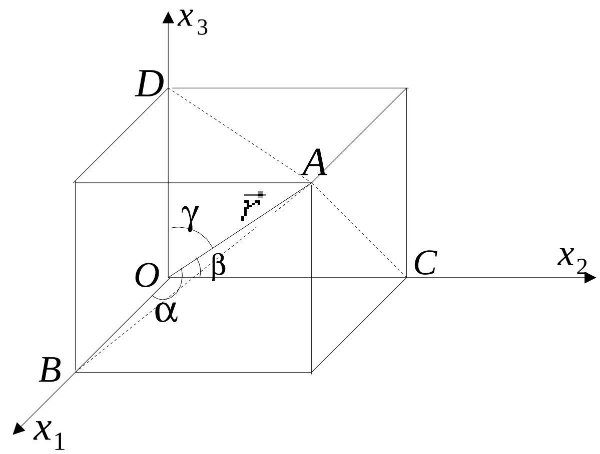
$$\vec{u}_d = \frac{1}{\sqrt{26}}\ \vec{d} = \left(\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}\right).$$

Ülesanne 11 *Vektori $\overrightarrow{OA}$* **suunakoosinused** *on arvud* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$*, kus* α, β, γ *on nurgad vektori* $\overrightarrow{OA}$ *ja koordinaattelgede positiivsete suundade vahel. Näidata, et*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1.9}$$

Lahendus. Joonisel on näha vektor $\overrightarrow{OA}$ ning nurgad α, β, ja γ. Vektori $\overrightarrow{OA}$ koordinaadid on (x_1, x_2, x_3). Nagu jooniselt kolmnurgast OAB on näha, on α vektori $\overrightarrow{OA}$ ning lõigu OB vaheline nurk. Kuid $OB = x_1$ ning seega

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{r}|}.$$



Analoogiliselt saame kolmnurgast OAC, et

$$\cos\beta = \frac{x_2}{|\vec{r}|}$$

ning kolmnurgast OAD, et $\cos\gamma = \dfrac{x_3}{|\vec{r}|}$.

Arvestades, et $|\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, leiame

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_1^2}{|\vec{r}|^2} + \frac{x_2^2}{|\vec{r}|^2} + \frac{x_3^2}{|\vec{r}|^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1.$$

Ülesanne 12 *Avaldada vektor* $\vec{a} = (2, 7)$ *järgmiste vektorite lineaarkombinatsioonina:*

$$\begin{array}{lll} 1) & \vec{b}_1 = (2, 4) & \vec{b}_2 = (-1, 3) \\ 2) & \vec{c}_1 = (4, 4) & \vec{c}_2 = (5, 5). \end{array}$$

Lahendus.
Olgu $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ suvaline n- mõõtmeliste vektorite hulk. Vektorit $\vec{b}$, mis on määratud järgmiselt:

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n, \tag{1.10}$$

kus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ on suvalised skalaarid, nimetatakse vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ **lineaarkombinatsiooniks**.

1) Selleks, et avaldada $\vec{a} = (2, 7)$ vektorite $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ lineaarkombinatsioonina tuleb leida suurused α_1, α_2, et kehtiks

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 \qquad \text{ehk} \\ (2, 7) & = & \alpha_1(2, 4) + \alpha_2(-1, 3) = (2\alpha_1 - \alpha_2, 4\alpha_1 + 3\alpha_2) \end{array}$$

Siit saame kaks võrrandit:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 7. \end{aligned}$$

Selle süsteemi lahendamisel saame $\alpha_1 = \dfrac{13}{10}$, $\alpha_2 = \dfrac{3}{5}$. Seega avaldub vektor $\vec{a}$ järgmiselt:

$$\vec{a} = \frac{13}{10}\,\vec{b}_1 + \frac{3}{5}\,\vec{b}_2.$$

2) $\vec{a} = \alpha_1\vec{c}_1 + \alpha_2\vec{c}_2$ ehk

$$(2,7) = \alpha_1(4,4) + \alpha_2(5,5),$$

kust saame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} 4\alpha_1 + 5\alpha_2 &= 2 \\ 4\alpha_1 + 5\alpha_2 &= 7. \end{aligned}$$

Sel süsteemil pole lahendit, seega ei saa avaldada vektorit $\vec{a}$ vektorite $\vec{c}_1$ ja $\vec{c}_2$ lineaarkombinatsioonina.

Ülesanne 13 *Avaldada vektor* $\vec{b} = (2,-1,3)$ *järgmiste vektorite lineaarkombinatsioonina:*

$$\begin{array}{llll} 1) & \vec{d}_1 = (2,4,1) & \vec{d}_2 = (3,7,1) & \\ 2) & \vec{e}_1 = (1,0,0) & \vec{e}_2 = (0,1,0) & \vec{e}_3 = (0,0,1) \\ 3) & \vec{f}_1 = (2,4,1) & \vec{f}_2 = (3,1,7) & \vec{f}_3 = (-1,2,2) \end{array}$$

Lahendus. $\vec{b} = \alpha_1\vec{d}_1 + \alpha_2\vec{d}_2$, seega

$$(2,-1,3) = \alpha_1(2,4,1) + \alpha_2(3,7,1).$$

Siit saame 3 võrrandit

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 2 \\ 4\alpha_1 + 7\alpha_2 &= -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 3 \end{aligned}$$

Sel süsteemil puudub lahend, järelikult ei saa vektorit $\vec{b}$ avaldada vektorite $\vec{d}_1$ ja $\vec{d}_2$ lineaarkombinatsioonina.

2) $\vec{b} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$. Võrreldes vektorite komponente, on näha, et

$$\alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = -1, \qquad \alpha_3 = 3.$$

Seega $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

3) $\vec{b} = \alpha_1\vec{f}_1 + \alpha_2\vec{f}_2 + \alpha_3\vec{f}_3$, ehk

$$(2,-1,3) = (2\alpha_1, 4\alpha_1, \alpha_1) + (3\alpha_2, \alpha_2, 7\alpha_2) + (-\alpha_3, 2\alpha_3, 2\alpha_3)$$

Saame 3 võrrandit

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 2 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= -1 \\ \alpha_1 + 7\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 3 \end{aligned}$$

Võrrandisüsteemi lahendamisel saame $\alpha_1 = -\frac{10}{69}$, $\alpha_2 = \frac{41}{69}$, $\alpha_3 = -\frac{35}{69}$. Järelikult

$$\vec{b} = -\frac{10}{69}\vec{f}_1 + \frac{41}{69}\vec{f}_2 - \frac{35}{69}\vec{f}_3.$$

Vektorite hulka $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ nimetatakse **lineaarselt sõltuvaks** parajasti siis, kui leidub k reaalarvu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, mis pole kõik korraga võrdsed nulliga sellist, et

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = 0. \tag{1.11}$$

Vektorite hulk on **lineaarselt sõltumatu** parajasti siis, kui see ei ole lineaarselt sõltuv hulk.

Ülesanne 14 *Kontrollida, kas järgmised vektorid on lineaarselt sõltumatud:*

$$\begin{array}{llll} 1) & \vec{a} = (1,2) & \vec{b} = (3,4), & \\ 2) & \vec{c} = (2,5) & \vec{d} = (4,10), & \\ 3) & \vec{e} = (1,0) & \vec{f} = (2,1) & \vec{g} = (3,2). \end{array}$$

Lahendus. 1) Moodustame vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarkombinatsiooni ja võrdustame selle nulliga:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

ning kontrollime, kas see võrdus kehtib mingite α ja β väärtuste korral, kui mõlemad korrage ei võrdu nulliga.

$$(\alpha, 2\alpha) + (3\beta, 4\beta) = (0,0).$$

Komponentkujul saame kaks võrrandit

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 0, \\ 2\alpha + 4\beta &= 0. \end{aligned}$$

Sel süsteemil on vaid üks lahend: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, seega on vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarselt sõltumatud.

2) $\alpha_1\vec{c} + \alpha_2\vec{d} = (2\alpha_1, 5\alpha_2) + (4\alpha_1, 10\alpha_2) = \vec{0}$. Komponentkujul:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0, \\ 5\alpha_1 + 10\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Lahutades teisest võrrandist esimese ja jagades saadud tulemuse kolmega, saame

$$\alpha_1 = -2\alpha_2.$$

Sel võrrandil on lõpmata palju mittetriviaalseid (nullist erinevaid) lahendeid, näiteks $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$; $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 2$. Järelikult on vektorid $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ lineaarselt sõltuvad.

3) $\quad \alpha_1\vec{e} + \alpha_2\vec{f} + \alpha_3\vec{g} = \vec{0}.$

$$\begin{aligned} \alpha_1(1,0) + \alpha_2(2,1) + \alpha_3(3,2) &= \vec{0}, \qquad \text{komponentkujul} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Üks mittetriviaalne lahend on $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 1$, seega on vektorite hulk lineaarselt sõltuv.

Ülesanne 15 *Näidata, et kahemõõtmelises ruumis on iga kolmest vektorist koosnev hulk lineaarselt sõltuv.*

Lahendus. Olgu meil vektorid $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$. Et need vektorid oleksid lineaarselt sõltuvad, peab nende lineaarkombinatsioon olema null.

$$\begin{aligned} \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} &= \vec{0}, \\ \lambda_1(a_1, a_2) + \lambda_2(b_1, b_2) + \lambda_3(c_1, c_2) &= (0, 0). \end{aligned}$$

See võrrand on samaväärne lineaarse võrrandisüsteemiga:

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1 &= 0 \\ \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Nüüd tuleb näidata, et sel süsteemil on mittetriviaalsed lahendid. Kui $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, siis võib alati valida sellised $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, mis rahuldaksid teist võrrandit.
Eeldame, et $c_1 \neq 0$, siis esimesest võrrandist

$$\lambda_3 = -\frac{1}{c_1}(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1).$$

Pannes λ_3 teise võrrandisse, saame

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 - \frac{c_2}{c_1}(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1) &= 0 \qquad | \times c_1 \\ \lambda_1 a_2 c_1 + \lambda_2 b_2 c_1 - c_2\lambda_1 a_1 - c_2\lambda_2 b_1 &= 0 \\ \lambda_1(a_2c_1 - a_1c_2) + \lambda_2(b_2c_1 - b_1c_2) &= 0. \end{aligned}$$

Sel süsteemil leiduvad mittetriviaalsed lahendid, me võime valida suvalise λ_1 ja siis leida sellele vastava λ_2. Valime näiteks $\lambda_1 = 1$. Siis

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_2c_1 - b_1c_2}, \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{c_1}\left[a_1 + b_1\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_2c_1 - b_1c_2}\right]. \end{aligned}$$

See tõestabki, et kahemõõtmelises ruumis on kolmest vektorist koosnev süsteem lineaarselt sõltuv.

Ülesanne 16 *Näidata, et kolmemõõtmelises ruumis on iga kolmest vektorist koosnev hulk lineaarselt sõltuv parasjagu siis, kui*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.12}$$

Lahendus. Esmalt näitame, et kui vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on lineaarselt sõltuvad, siis on determinant võrduses (1.12) võrdne nulliga. Definitsiooni kohaselt, kui vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on lineaarselt sõltuvad, siis

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0, \tag{1.13}$$

kus α, β, γ pole kõik korraga nullid. Eeldame, et $\alpha \neq 0$, siis

$$\vec{a} = -\frac{1}{\alpha}(\beta\vec{b} + \gamma\vec{c})$$

ehk

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{\alpha}(\beta\vec{b}_1 + \gamma\vec{c}_1), \\ a_2 &= -\frac{1}{\alpha}(\beta\vec{b}_2 + \gamma\vec{c}_2), \\ a_3 &= -\frac{1}{\alpha}(\beta\vec{b}_3 + \gamma\vec{c}_3). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Võrreldes (1.14) võrduses (1.12) oleva determinandiga, näeme, et (1.14) avaldub determinandi ülejäänud ridade lineaarkombinatsioonina. Seega on determinant võrdne nulliga.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Et tõestada see vastupidises suunas, siis eeldame, et determinant võrduses (1.12) on null. Siis on võrrand (1.13) rahuldatud juhul, kui

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \beta = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \gamma = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

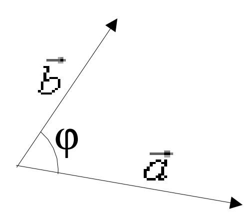
See lõpetabki tõestuse.

1.3 Geomeetriliste vektorite skalaarkorrutis.

Kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis $\vec{a}\vec{b}$ defineeritakse valemiga

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi, \tag{1.15}$$

(kus φ on nurk vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahel ($\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$) (Vt joonis). Nurga φ määramiseks tuleb $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kanda ühisesse alguspunkti, selle väärtus kuulub vahemikku $[0, \pi]$.



Skalaarkorrutis on seega eeskiri, mis seab vektorite paarile vastavusse kindla reaalarvu.

Võime ka teistmoodi öelda - vektorite $\vec{a}, \vec{b} \in V$ skalaarkorrutis on binaarne kujutis $V \otimes V \to R$, st ruumist $V \otimes V$ skalaararvude ruumi R.
Skalaarkorrutist võib tähistada erinevalt - $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$, $< \vec{a}, \vec{b} >$.

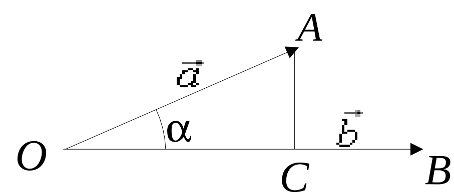
Skalaarkorrutise omadused:
1. Skalaarkorrutis on kommutatiivne: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. Skalaarkorrutis on distributiivne: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
3. Assotsiatiivsus reaalarvulise teguri suhtes: $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\alpha$, kus α on skalaar.

4. Kui $\vec{e}$ on ühikvektor, siis $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$.
5. Kui $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, siis on $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ risti.
6. Kui $\vec{a}||\vec{b}$, siis $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$.
Skalaarkorrutise omadused järelduvad otseselt tema definitsioonist (1.15).

Ülesanne 17 *Näidata, et vektori $\vec{a}$ projektsioon vektorile $\vec{b}$ on $\vec{a} \cdot \vec{u}_{\vec{b}}$, kus $\vec{u}_{\vec{b}}$ on vektori $\vec{b}$ suunaline ühikvektor ($\vec{u}_{\vec{b}} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $|\vec{u}_{\vec{b}}| = 1$).*

Asetame vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ühisesse alguspunkti O. Nagu jooniselt näha, on vektori $\vec{a}$ projektsiooniks vektori $\vec{b}$ suunale ($\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$) vektor $\overrightarrow{OC}$, mille pikkus on ilmselt (vt joonist)

$$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{a}| \cos\alpha = |\vec{a}||\vec{u}_{\vec{b}}| \cos\alpha = \vec{a} \cdot \vec{u}_{\vec{b}}.$$



Vektorruumi ortonormeeritud baasiks on ühikvektorid, mis on omavahel risti. Kolmemõõtmelise ruumi korral tähistame ortonormeeritud (ON) baasi vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (levinud on ka tähistused $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ja $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), baasi ennast $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ või lühemalt $\{\vec{e}_i\}$. ON baasile vastavat koordinaadistikku nimetatakse **Descartes'i** (Cartesiuse) ristkoordinaadistikuks.
ON baasi korral

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui} \quad i = j, \\ 0, & \text{kui} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{1.16}$$

kus δ_{ij} on **Kroneckeri (delta-)sümbol**, mis kirjeldab ühikmaatriksi komponente. Vektori koordinaate ON baasis $\{\vec{e}_i\}$ tähistame sama tähega nagu vektorit, lisades juurde indeksi:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i = a_i\vec{e}_i. \tag{1.17}$$

Viimases avaldises oleme kasutanud nn **Einsteini kokkulepet (Einsteini summeerimisreeglit**, mille kohaselt summa märki ei kirjutada, kuid üle kaks korda esineva indeksi (siin üle indeksi i) tuleb summeerida. Seda kirjapilti lihtsustavat kokkulepet hakkame siitpeale järjekindlalt kasutama. Seni kui töötame 3-ruumis omab summeerimisindeks loomulikult väärtusi $1, 2, 3$.
Selline baasi valik lubab lihtsustada tehteid vektoritega (ja skalaarkorrutise leidmist!). Edaspidi eeldame, et meil on tegemist ortonormeeritud baasiga, kui pole eraldi vastupidist öeldud.

Ülesanne 18 *Tõestada, et ortonormeeritud baasi korral on vektorite $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ skalaarkorrutis järgmine $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.*

Lahendus.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = a_1b_1\vec{e}_1^{\,2} + a_1b_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + a_1b_3\vec{e}_1\vec{e}_3 + \\ &+ a_2b_1\vec{e}_2\vec{e}_1 + a_2b_2\vec{e}_2^{\,2} + a_2b_3\vec{e}_2\vec{e}_3 + a_3b_1\vec{e}_3\vec{e}_1 + a_3b_2\vec{e}_3\vec{e}_2 + a_3b_3\vec{e}_3^{\,2}. \end{aligned}$$

Arvestades nüüd ON baasi vektorite skalaarkorrutise omadusi (1.16) saamegi tulemuseks

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i.$$

Ülesanne 19 *Leida vektorite $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$ ja $\vec{b} = 6\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ vaheline nurk.*

Lahendus. Tähistame vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahelise nurga α-ga. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutise definitsioonist ja skalaarkorrutisest ON baasis saame

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha = 2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 - 2. \\ \text{Et} \qquad |\vec{a}| &= \sqrt{4+4+1} = 3, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+9+4} = 7, \end{aligned}$$

siis saame $\cos\alpha = \dfrac{4}{21}$, millest $\alpha \approx 79^o$.

Ülesanne 20 *Leida vektori $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ suunakoosinused.*

Lahendus. Ülesandest 11 on teada, et vektori suunakoosinused on arvud, mis on võrdsed koosinusega antud vektori ja vastava baasivektori vahel. Tähistame α_i, $i = 1, 2, 3$ nurkasid vektori $\vec{a}$ ja baasivektorite $\vec{e}_i$ vahel. Skalaarkorrutise definitsioonist järgi

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_i = |\vec{a}||\vec{e}_i| \cos\alpha_i = |\vec{a}| \cos\alpha_i.$$

Saame $\cos\alpha_i = a_i \dfrac{1}{|\vec{a}|}$. Et $|\vec{a}| = \sqrt{49} = 7$, siit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arccos\frac{3}{7} \approx 64,6^o, \\ \alpha_2 &= \arccos(-\frac{6}{7}) \approx 149^o, \\ \alpha_3 &= \arccos\frac{2}{7} \approx 73,4^o. \end{aligned}$$

Ülesanne 21 *Leida tasandi võrrand, kui see tasand on risti vektoriga $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ ning läheb läbi punkti $P(1, 5, 3)$. Leida selle tasandi kaugus d koordinaatide alguspunktist.*

Lahendus. Tähistame punkti P kohavektori $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$. Olgu $\vec{r}$ suvalise otsitaval tasandil oleva punkti $Q(x, y, z)$ kohavektor. Kuivõrd $\vec{a}$ on risti vektoriga $\overrightarrow{PQ}$ ($\overrightarrow{PQ}$ on vektor otsitaval tasandil, $\vec{a}$ on aga risti tasandiga, seega ka kõigi tasandil paiknevate vektoritega), siis $\vec{a} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$. Kuid

$$\vec{r} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{b} + \overrightarrow{PQ},$$

millest saame

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r} - \vec{b}.$$

Siit

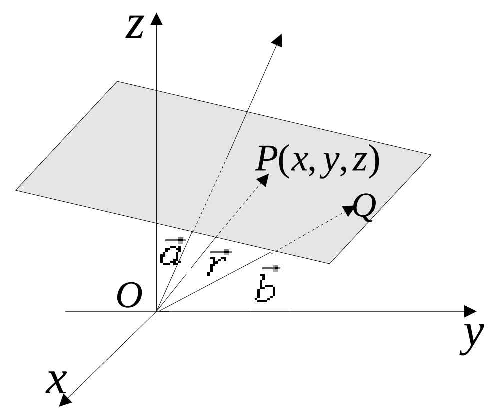
$$\vec{a}\overrightarrow{PQ} = \vec{a}\vec{r} - \vec{a}\vec{b} = 0.$$

Korrutades lahti ja viies $\vec{a} \cdot \vec{b}$ paremale poole võrdusmärki, saame tasandi võrrandiks

$$2x + 3y + 6z = 35.$$

Tasandi kaugus mingi punktini O on defineeritud kui kaugus selle puntki ja sellest punktist tasandiga risti tõmmatud sirge lõikepuntkiga tasandiga (lihtsamalt - punkti ning selle tasandi kõige lähema punkti vaheline kaugus - $d = \min(|\overrightarrow{OP}|)$.
Antud tasandi kaugus koordinaatide alguspunktist on võrdne vektori $\vec{b}$ projektsiooniga vektori $\vec{a}$ suunale, mille tähistame $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$. Ülesandest 18 on teada, kuidas avaldub ühe vektori projektsioon teisele, seda arvestades saame

$$d = \mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{u}_{\vec{a}} = \vec{b} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot (\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}) = 5.$$



1.4 ON baasi teisendamine, ortogonaalteisendused.

ON baase võib valida lõpmata mitmeselt. Kui $\{\vec{e}_i\}$ on esialgne baas, siis mingi teise baasi $\{\vec{e}_{j'}\} = \{\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'}\}$ vektorid on esitatavad esialgse (vana) baasi vektorite lineaarkombinatsioonina

$$\vec{e}_{j'} = a_{j'i}\vec{e}_i. \tag{1.18}$$

Baasiteisenduse määravad 9 kordajat, mis moodustavad 3×3 teisendusmaatriksi $A = (a_{i'j})$.
NB! Maatriksi esimene indeks nummerdab ridu, teine veerge; mõlemad indeksid võivad olla kas primiga või ilma, primiga indeks osutab uuele baasile, primita - esialgsele (vanale) baasile.
Uurime teisendusmaatriksi elementide omadusi.

$$\begin{aligned} \vec{e}_{j'} &= a_{j'i}\vec{e}_i \qquad | \cdot \vec{e}_k \\ \vec{e}_{j'}\vec{e}_k &= a_{j'i}\vec{e}_i\vec{e}_k. \end{aligned}$$

Arvestades ON baasivektorite skalaarkorrutise omadusi (1.16) saame

$$\vec{e}_{j'}\vec{e}_k = a_{j'i}\delta_{ik} = a_{j'k}. \tag{1.19}$$

Seega on ortogonaalteisenduse ühest baasist teise üleminekumaatriksi elemendid võrdsed uue ja vana baasi baasivektorite skalaarkorrutistega.

Ülesanne 22 *On antud kaks ühise alguspunktiga parempoolset koordinaatsüsteemi (x, y, z) ja (x', y', z'). Ruumis asub punkt kohavektoriga*

$$\begin{aligned} \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e}_{1'} + y'\vec{e}_{2'} + z'\vec{e}_{3'} \qquad \textit{ehk} \\ \vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \equiv x_i\vec{e}_i = x_{j'}\vec{e}_{j'}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

kus $\{\vec{e}_i\}$ ja $\{\vec{e}_{i'}\}$ on vastavalt esimese ja teise koordinaatsüsteemi baasid. Avaldada x, y, x koordinaadid x', y', z' koordinaatide kaudu ning leida teisendusmaatriks A:

$$\vec{r}' = A\,\vec{r} \tag{1.21}$$

Lahendus. Korrutame võrrandi (1.20) $\vec{e}_{1'}$-ga, siis arvestades ON baasi omadusi (1.16), saame

$$x_{1'} = x_1\vec{e}_1\vec{e}_{1'} + x_2\vec{e}_2\vec{e}_{1'} + x_3\vec{e}_1\vec{e}_{1'} = x_i\vec{e}_i\vec{e}_{1'} \tag{1.22}$$

Korrutades võrrandit (1.20) vektoritega $\vec{e}_{2'}$ ja $\vec{e}_{3'}$, saame vastavalt:

$$
\begin{aligned}
x_{2'} &= x_i \vec{e}_i \vec{e}_{2'} \\
x_{3'} &= x_i \vec{e}_i \vec{e}_{3'}
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Kirjutades vektori $\vec{r}$ erinevates ON baasides maatriksitena

$$
\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix}, \tag{1.24}
$$

saame teisendusmaatriksiks

$$
A = (a_{i'j}) = (\vec{e}_{i'} \vec{e}_j) = \begin{pmatrix} \vec{e}_{1'}\vec{e}_1 & \vec{e}_{2'}\vec{e}_1 & \vec{e}_{3'}\vec{e}_1 \\ \vec{e}_{1'}\vec{e}_2 & \vec{e}_{2'}\vec{e}_2 & \vec{e}_{3'}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_{1'}\vec{e}_3 & \vec{e}_{2'}\vec{e}_3 & \vec{e}_{3'}\vec{e}_3 \end{pmatrix}. \tag{1.25}
$$

Kasutades Einsteini summeerimisreeglit, võime seose $\vec{r}' = A\ \vec{r}$ panna kirja järgmiselt:

$$
x_{i'} = a_{i'j} x_j. \tag{1.26}
$$

Selleks, et esialgse ON baasi $\{\vec{e}_i\}$ teisendamisel oleks ka uus baas ON, peab teisendusmaatriks A olema nn ortogonaalmaatriks, st nii tema read kui veerud peavad olema omavahel ortogonaalsed:

$$
a_{i'k} a_{j'k} = \delta_{i'j'} \ \text{ ja } \ a_{i'k} a_{i'l} = \delta_{kl}. \tag{1.27}
$$

Näitame seda. Vektorite skalaarkorrutis $\vec{e}_{i'} \vec{e}_{k'}$ teiseneb üleminekul ühest ON baasist teise järgmiselt:

$$
\vec{e}_{i'} \vec{e}_{k'} = (a_{i'j} \vec{e}_j)(a_{k'l} \vec{e}_k) = a_{i'j} a_{k'l} \vec{e}_j \vec{e}_l = a_{i'j} a_{k'l} \delta_{jl}.
$$

Võrduse parema poole leidmisel arvestasime ON baasi vektorite omadust (1.16). Arvestades seda omadust ka võrduse vasaku poole jaoks saame

$$
\delta_{i'k'} = a_{i'j} a_{k'l} \delta_{jl} = a_{i'j} a_{k'j}
$$

Teine seos ON baasi teisendusmaatriksi omadustest on samamoodi tõestatav.

Ortogonaalsuse tingimusi (1.27) võib sõnastada ka teisiti: maatriksi $A = (a_{ij})$ ja transponeeritud maatriksi (read ja veerud on vahetatud) $A^T = (a^T_{ij}) = (a_{ji})$ korrutis on ühikmaatriks

$$
A\ A^T = I, \ \text{ või } \ A^{-1} = A^T. \tag{1.28}
$$

Ortogonaalmaatriksi tarvilik tingimus

$$
det A = \pm 1.
$$

Baasiteisendusi, mille korral det A = 1 nimetatakse pärisortogonaalteisendusteks, uus baas saadakse sel juhul vana baasi pööramisel. Teisenduste det A = -1 korral lisandub pööramisele veel mõne baasivektori suuna muutmine (peegeldamine).

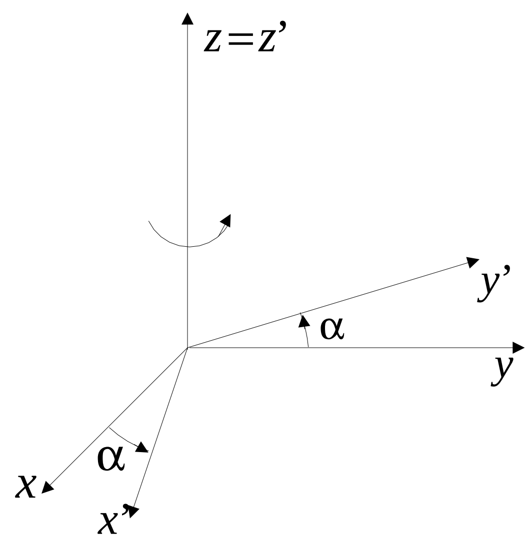
(1.27) kohaselt on ortogonaalteisenduse korral pöördmaatriks A^{-1}, mis teisendab uue baasi $\{\vec{e}_{i'}\}$ tagasi vanaks baasiks $\{\vec{e}_i\}$, võrdne transponeeritud maatriksiga, siis analoogiliselt valemile (1.18):

$$\vec{e}_i = (a^{-1})_{ij'}\vec{e}_{j'} = (a^T)_{ij'}\vec{e}_{j'}. \tag{1.29}$$

Põhireeglid Einsteini summeerimiskokkuleppe kasutamisel:
1) indeksid, mille üle ei summeerita ehk vabad indeksid peavad võrduse mõlemal pool olema samasugused,
2) summeerimisindekseid võib tähistada suvaliselt,
3) kordsetes summades tuleb iga summeerimise jaoks kasutada erinevat indeksit,
4) kordsetes summades võib summeerimise järjekorda muuta (sest summad on lõplikud).

Ülesanne 23 *Olgu antud koordinaatsüsteem (x, y, x). Kui me pöörame seda koordinaatsüsteemi nurga α võrra ümber z-telje, saame uue koordinaatsüsteemi (x', y', z'). Leida teisendusmaatriks A_z.*

Lahendus. Tähistame süsteemi (x, y, x) baasvektorid $\vec{e}_i$, süsteemi (x', y', z') - $\vec{e}_{j'}$, $(i, j' = 1, 2, 3)$. Vektorite $\vec{e}_{1'}$ ja $\vec{e}_1$ vaheline nurk on siis α; $\vec{e}_{1'}$ ja $\vec{e}_2$ vaheline nurk $\pi/2 - \alpha$ ning $\vec{e}_{1'}$ ja $\vec{e}_3$ vaheline nurk $\pi/2$. Vektori $\vec{i'}$ suunakoosinused süsteemis (x_i) on seega $\cos\alpha$, $\cos(\pi/2 - \alpha)$ ja 0 $(\cos(\pi/2) = 0)$.
Analoogiliselt, vektori $\vec{e}_{2'}$ suunakoosinused on $\cos(\pi/2 + \alpha)$, $\cos\alpha$ ja 0. $\vec{e}_{3'}$ suunakoosinused on $0, 0, 1$. Arvestades, et ON baasivektorite pikkus on 1, siis võime valemi (1.25) abil kohe välja kirjutada:



$$A_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Ülesanne 24 *Olgu meil ristkoordinaatide teisendus nagu kirjeldatud ülesandes 22. Näidata, et teisendusmaatriks on ortogonaalne.*

Lahendus. Leiame esmalt maatriksi A (1.25) pöördmaatriksi.
Teisendusmaatriks seob omavahel $\vec{r}$ ja $\vec{r'}$ järgmiselt: $\vec{r'} = A\vec{r}$, pöördteisendusmaatriks: $\vec{r} = A^{-1}\vec{r'}$.
Korrutades võrdust

$$\vec{r} = x_i\vec{e}_i = x_{j'}\vec{e}_{j'}$$

vektoritega $\vec{e}_i$, saame

$$x_i = x_{j'}\vec{e}_{j'}\vec{e}_i,$$

mille maatrikskujul võime esitada järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_{1'} & \vec{e}_2\vec{e}_{1'} & \vec{e}_3\vec{e}_{1'} \\ \vec{e}_1\vec{e}_{2'} & \vec{e}_2\vec{e}_{2'} & \vec{e}_3\vec{e}_{2'} \\ \vec{e}_1\vec{e}_{3'} & \vec{e}_2\vec{e}_{3'} & \vec{e}_3\vec{e}_{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{pmatrix},$$

millest saame

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_{1'} & \vec{e}_2\vec{e}_{1'} & \vec{e}_3\vec{e}_{1'} \\ \vec{e}_1\vec{e}_{2'} & \vec{e}_2\vec{e}_{2'} & \vec{e}_3\vec{e}_{2'} \\ \vec{e}_1\vec{e}_{3'} & \vec{e}_2\vec{e}_{3'} & \vec{e}_3\vec{e}_{3'} \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Nüüd võib otsese arvutusega veenduda, et $AA^T = I$.

Ülesanne 25 *Koordinaatsüsteemis (x, y, z) on vektor $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$. Leida selle vektori avaldis koordinaatsüsteemis (x', y', z'), mis on saadud süsteemist (x, y, z) selle pööramisel ümber y-telje 30^o võrra.*

Lahendus. Analoogiliselt ülesandega 31 on tuletatav teisendusmaatriks pöörde jaoks ümber y-telje nurga α võrra:

$$A_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

Et $\vec{a}' = A\vec{a}$, siis

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^o & 0 & -\sin 30^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 30^o & 0 & \cos 30^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \\ -7 \\ \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ehk $\vec{a}' = \Big(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 2\Big)\vec{e}_{1'} - 7\vec{e}_{2'} - \Big(\dfrac{3}{2} - 2\sqrt{3}\Big)\vec{e}_{3'}$.

Ülesanne 26 *Üldine 3-baasi ortogonaalteisendus on esitatav kolme järjestikuse pöörde resultaadina: 1) pööre nurga φ võrra ümber vektori $\vec{e}_{1'}$; 2) pööre nurga ϑ võrra ümber vektori $\vec{e}_{1'}$; 3) pööre nurga ψ võrra ümber vektori $\vec{e}_{3''}$. Nurki φ, ϑ, ψ nimetatakse* **Euleri nurkadeks**. *Harilikult $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \vartheta < \pi$). Arvuta teisendusmaatriks! (Teisendusmaatriksi saab kolme järjestikuse pöörde rakendamisel.*

Lahendus. Nagu mainitud, on 3-ruumi ON-teisendus esitatav kolme järjestikuse pöörde resultaadina. Need võivad olla pööre ümber $\vec{e}_1$, siis ümber $\vec{e}_2$, siis ümber $\vec{e}_3$, kuid võib ka esmalt ümber $\vec{e}_1$, siis ümber $\vec{e}_3$, siis taas ümber $\vec{e}_1$. Sellise teisendusmaatriksi nagu antud ülesande lahenduses saab siiski nii: $A = A_z A_x A_z$ ja Euleri nurkadeks nimetatakse siiski pöördenurki juhul, kui on 2 pööret (mis pole järjestikused) ümber ühe ja sama telje.

Seega, arvestades, et

$$A_{z_1} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

$$A_{z_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

võime kirjutada

$$\begin{aligned} A = A_{z_1} A_x A_{z_2} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\varphi & \cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.5 Kahe vektori tensorkorrutis.

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **tensor- ehk otsekorrutis** $\vec{a} \otimes \vec{b}$ on protseduur, mis viib 3-mõõtmelisest vektorruumist 9-mõõtmelisse lineaarsesse vektorruumi.
Tähistades n-mõõtmelise vektorruumi V^n, kui $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, siis võime öelda, et vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ tensorkorrutis on binaarne kujutis, mis viib vektorruumis V^3 vektorruumi V^9: $V^3 \otimes V^3 \to V^9$, $\vec{a} \otimes \vec{b} \in V^9$. Selle protseduuriga seatakse kahele kindlas järjekorras võetud vektorile vastavusse uus objekt (tensorkorrutis sõltub vektorite järjekorrast).

Tensorkorrutise omadused:
1. Üldiselt $\vec{a} \otimes \vec{b} \neq \vec{b} \otimes \vec{a}$
2. Distributiivsus

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \otimes \vec{b} = \vec{a}_1 \otimes \vec{b} + \vec{a}_2 \otimes \vec{b}; \;\; \vec{a} \otimes (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \otimes \vec{b}_1 + \vec{a} \otimes \vec{b}_2 \tag{1.33}$$

3. Assotsiatiivsus reaalarvuga korrutamise suhtes

$$(\alpha\vec{a}) \otimes \vec{b} = \vec{a} \otimes (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \otimes \vec{b}) \tag{1.34}$$

Omaduste (1.33,1.34) põhjal on vektorite tensorkorrutis esitatav ON baasivektorite tensorkorrutiste $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ lineaarkombinatsioonina

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = (a_i \vec{e}_i) \otimes (b_j \vec{e}_j) = a_i b_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j. \tag{1.35}$$

Seega baasivektorite 9 erinevat tensorkorrutist võib käsitleda uue objekti baasina $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\}$ ja 9 korrutist $a_i b_j$ moodustavad vektorite tensorkorrutise koordinaatide maatriksi

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i b_j. \tag{1.36}$$

Lihtsuse (või näitlikustamise) mõttes võime selle uue 9-mõõtmelise vektorruumi baasivektorid $\vec{E}_i, i = 1, \ldots, 9$ valida siis järgmiselt:

$$\begin{array}{lll} \vec{E}_1 = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1, & \vec{E}_2 = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2, & \vec{E}_3 = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3, \\ \vec{E}_4 = \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1, & \vec{E}_5 = \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2, & \vec{E}_6 = \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3, \\ \vec{E}_7 = \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1, & \vec{E}_8 = \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2, & \vec{E}_9 = \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3. \end{array} \tag{1.37}$$

Vektorite tensorkorrutise komponendid võime esitada siis uue baasi kaudu järgmiselt. Näiteks $(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i b_j = T'_{ij} = T_k$, kus $i, j = 1, 2, 3,\ k = 1, \ldots, 9$.

Ülesanne 27 *Arvutada tensorkorrutiste $\vec{a} \otimes \vec{b}$ ja $\vec{b} \otimes \vec{a}$ maatriksid, kui*

$$\vec{a} = (1, -1, 2) \qquad \vec{b} = (3, 0, 1)$$

Esitada tensorkorrutis $\vec{a} \otimes \vec{b}$ baasivektorite lineaarkombinatsioonina.

Lahendus. Vastavalt võrdusele (1.35)

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{11} = a_1 b_1 = 3, \qquad (\vec{a} \otimes \vec{b})_{12} = a_1 b_2 = 0, \qquad (\vec{a} \otimes \vec{b})_{13} = a_1 b_3 = 1$$

jne. Kokkuvõttes võime kirjutada:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

või pikemalt - baasivektorite lineaarkombinatsioonina:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = 3\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 - 3\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + 6\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3.$$

$$\vec{b} \otimes \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 28 *Millised on järgmise tensorkorrutise tegurvektorid?*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Vastus: Olgu $A = \vec{a} \otimes \vec{b}$, siis $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 2, -1)$.
Tensorkorrutise omadusest 3 järeldub, et tensorkorrutis jääb muutumatuks, kui ühte tegurit korrutame teguriga α ja teist teguriga $1/\alpha$. Korrutades vektorit $\vec{a}$ -1-ga ja jagades $\vec{b}$ -1-ga, siis saame $\vec{a} = (-1, 1, -2)$, $\vec{b} = (-3, -2, 1)$, mille tensorkorrutis annab sama tulemuse.

1.6 Tensorkorrutise koordinaatide teisenemine.

3-ruumi ON baasiteisendustel

$$\vec{e}_{i'} = a_{i'j}\vec{e}_j$$

teiseneb ka tensorkorrutise baas

$$\vec{e}_{i'} \otimes \vec{e}_{j'} = a_{i'k}a_{j'l}\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l. \tag{1.38}$$

Ülesanne 29 *Leida eeskiri, kuidas teiseneb vektorite* $\vec{a}_i$ *ja* $\vec{b}_i$ *tensorkorrutis ON teisendusel.*

Lahendus. Ortogonaalteisendusel teisenevad vektori koordinaadid nagu baasivektorid

$$a_{i'} = a_{i'j}a_j.$$

NB! Kummagi vektori jaoks on erinevad summeerimisindeksid (vastavalt Einsteini summeerimisreeglile). Rakendades seda teisenduseeskirja mõlemale vektorile, saame

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{i'j'} = a_{i'k}a_{j'l}a_k b_l = a_{i'k}a_{j'l}(\vec{a} \otimes \vec{b})_{kl}, \tag{1.39}$$

st, et tensorkorrutise mõlema indeksi suhtes rakendub vektori koordinaatide (või baasivektorite) teisenduseeskiri.

Lisaülesanded

Ülesanne 30 *Olgu antud vektorid* $\vec{a} = (2, 4, 1)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$, $\vec{c} = (-1, -1, 2)$. *Leida vektorid*
1) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$
2) $\vec{e} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$
3) $\vec{x}$ *ja* $\vec{y}$, *mis rahuldavad võrrandeid:*

$$\begin{aligned} 3\vec{x} + \vec{y} &= 2\vec{a} + \vec{b} \\ -2\vec{x} + 4\vec{y} &= \vec{a} - 2\vec{b}. \end{aligned}$$

Ülesanne 31 *Lennuk lendab* 200 *km lääne suunas ja seejärel* 150 *km suunas, mis asub läänesuunast* 60^o *põhja poole. Leida kogu läbitud vahemaa a) graafiliselt, b) analüütiliselt.*

Ülesanne 32 *Tõestada, et kolmnurga mediaanid lõikuvad kõik ühes punktis, mis 'kolmitab' need mediaanid.*

Ülesanne 33 *Eeldades, et* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ja* $\vec{c}$ *on lineaarselt sõltumatud vektorid, uurida, kas järgmised vektorid on lineaarselt sõltuvad või sõltumatud:*

$$\vec{r}_1 = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}, \qquad \vec{r}_2 = 3\vec{a} - 5\vec{b} + 2\vec{c}, \qquad \vec{r}_3 = 4\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}.$$

Ülesanne 34 *Baasivektorid* $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ *on antud baasivektorite* $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ *kaudu järgmiselt:*

$$\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3, \qquad \vec{a}_2 = \vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3, \qquad \vec{a}_3 = -2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3.$$

Kui $\vec{f} = 3\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, *avaldada* $\vec{f}$ *vektorite* $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ *kaudu.*

Ülesanne 35 *Uurida, kas järgmised vektorite hulgad on lineaarselt sõltumatud või sõltuvad:*

$$\begin{aligned} 1)\quad & \vec{a} = (2,1,-3), \quad \vec{b} = (1,0,-4), \quad \vec{c} = (4,3,-1) \\ 2)\quad & \vec{a} = (1,-3,2), \quad \vec{b} = (2,-4,-1), \quad \vec{c} = (3,2,-1). \end{aligned}$$

Ülesanne 36 *Tõestada, et vektorid* $\vec{a} = 3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$ *võivad moodustada ühe kolmnurga küljed. Leida selle kolmnurga küljepikkused ja mediaanide pikkused.*

Ülesanne 37 *Olgu antud vektorid* $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \alpha\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ *ja* $\vec{b} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$. *Leida* α *eeldusel, et vektorid* $\vec{a}$ *ja* $\vec{b}$ *on omavahel risti.*

Ülesanne 38 *Olgu antud koordinaatsüsteem* (x, y, x). *Kui me pöörame seda koordinaatsüsteemi nurga* ϑ *võrra ümber* y*-telje, saame uue koordinaatsüsteemi* (x', y', z'). *Leida teisendusmaatriks* A_y.

Ülesanne 39 *Arvutada tensorkorrutiste* $\vec{a} \otimes \vec{b}$ *ja* $\vec{b} \otimes \vec{a}$ *maatriksid, kui*

$$\vec{a} = (5, -3, 1) \qquad \vec{b} = (1, 2, -2).$$

Ülesanne 40 *Millised järgmised* 3×3 *maatriksid on kahe vektori tensorkorrutiste maatriksid ja leida nende tegurvektorid.*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2 Tensorid.

2.1 Teist järku tensorid. Tensori komponentide teisenemine ON teisendustel.

Kahe vektori tensorkorrutisi võib liita liites nende vastavad (so ühesuguse indeksipaariga nummerdatud) koordinaadid, kuid summa $\vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d}$ ei ole üldiselt esitatav mingi kolmanda vektoripaari tensorkorrutisena. St kahe vektori tensorkorrutiste hulk ei ole liitmise suhtes kinnine ega saa moodustada lineaarset ruumi.
Liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes kinnise hulga moodustab 2. järku tensor $\mathbf{T}$, mis on matemaatiline objekt, mis on baasis $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\}$ määratud tema koordinaatide maatriksiga T_{ij}:

$$\mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j. \tag{2.1}$$

Meie tähistame tensoreid tavaliselt paksus kirjas $\mathbf{T}$, üldlevinud tähistust pole, sama tensori komponente - $(\mathbf{T})_{ik}$ või T_{ik}.
Baasi teisendusel $\vec{e}_{i'} = a_{i'j} \vec{e}_j$ teisenevad tensori koordinaadid nagu vektorite tensorkorrutise koordinaadid (1.39):

$$T_{i'j'} = a_{i'k} a_{j'l} T_{kl}. \tag{2.2}$$

Arvutamiseks on (2.2) otstarbekas esitada kolme maatriksi korrutisena

$$T' = ATA^T \tag{2.3}$$

kus $A = (a_{i'k})$, $A^T = (a_{lj'})$, $T = (T_{kl})$, $T' = (T_{i'j'})$.

(Arvestades maatriksite korrutamise reegleid, peame kirjutama (2.2) nii, et kõrvuti asetseksid ühesugused indeksid:

$$T = T_{i'j'} = a_{i'k} T_{kl} a_{lj'} = a_{i'k} T_{kl} (a_{j'l})^T = ATA^T.$$

Einsteini summeerimisreeglit arvestades võime tegurite asukohta indekseeritud korrutises vabalt muuta.)

2.järku tensori võime defineerida kui matemaatilise objekti, mille koordinaadid T_{ij} teisenevad vektorbaasi $\{\vec{e}_i\}$ ortogonaalteisendusel valemi (2.2) kohaselt (tensor jääb ON teisendustel invariantseks).

Defineerime 2. järku tensorite summa ja korrutise reaalarvuga α järgmiselt:

$$\mathbf{T} + \mathbf{U} = (T + U)_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = (T_{ij} + U_{ij}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \tag{2.4}$$

$$\alpha \mathbf{T} = (\alpha T)_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = (\alpha T_{ij}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j. \tag{2.5}$$

Nagu näha valemist (2.5), korrutatakse tensori korrutamisel arvuga selle arvuga tensori iga koordinaati.

On olemas liitmise suhtes neutraalne element nulltensor $\mathbf{O} = 0$, mille maatriks on nullmaatriks ja iga $\mathbf{T}$ korral leidub vastandtensor $\mathbf{T}' = -\mathbf{T}$ nii, et $\mathbf{T} + \mathbf{T}' = 0$. Saab lihtsalt näidata, et valemitega (2.4-2.5) defineeritud liitmistehe on kommutatiivne ja assotsiatiivne, korrutamine mõlema teguri suhtes distributiivne ja assotsiatiivne reaalarvulise teguri suhtes.

Ülesanne 41 *Näidata, et 2.järku tensorite ruum moodustab* 9-*mõõtmelise lineaarse vektorruumi.*

Lahendus. Kuivõrd ülal defineeritud 2. järku tensorite liitmine ning arvuga korrutamine rahuldavad vektoralgebra reegleid (vt. pt 1.1), siis on tensorite ruum lineaarne vektorruum.
Selleks, et näidata, et see on 9-mõõtmeline vektorruum, peame näitama, et baasivektorite tensorkorrutiste $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ lineaarkombinatsioon

$$\lambda_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \tag{2.6}$$

mis on 2.järku tensor, on null parajasti siis, kui kõik kordajad λ_{ij} on korraga nullid. Selleks arvestame, et $(\vec{e}_i)_k = \delta_{ik}$ (vektoril $\vec{e}_i$ on ainus nullist erinev komponent i-s komponent. Seega lineaarkombinatsiooni (2.6) koordinaadid

$$(\lambda_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)_{kl} = \lambda_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl} = \lambda_{kl}.$$

Järelikult on lineaarkombinatsioon (2.6) null parajasti siis, kui $\lambda_{ij} = 0$ ning järelikult on baasivektorite 9 võimalikku tensorkorrutist lineaarselt sõltumatud - ruum on 9-mõõtmeline.

2.2 Tensorite sümmeetriaomadused. Tensori jälg.

2.järku tensor **T** on **sümmeetriline**, kui tema koordinaatide vahel kehtib seos

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{2.7}$$

ja **antisümeetriline**, kui

$$T_{ij} = -T_{ji}. \tag{2.8}$$

Sümmeetrilisel tensoril on 6 sõltumatut koordinaati $T_{11},\ T_{22},\ T_{23},\ T_{12},\ T_{13},\ T_{23}$, antisümmeetrilisel 3: $T_{12},\ T_{13},\ T_{23},\quad (T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0)$.

Ülesanne 42 *Tõestada, et baasi* $\{\vec{e}_i\}$ *ortogonaalteisendustel säiluvad 2. järku tensori sümmeetria ja antisümmeetria.*

Lahendus. Lähtume tensori koordinaatide teisendusvalemist (2.2) $T_{i'j'} = a_{i'k}a_{j'l}T_{kl}$.
1. Sümmeetria tõestamine.
Olgu $T_{kl} = T_{lk}$.

$$T_{i'j'} = a_{i'k}a_{j'l}T_{kl} = a_{i'k}a_{j'l}T_{lk} = a_{i'l}a_{j'k}T_{kl} = T_{j'i'}.$$

Siin vahetasime võrduses indeksid k ja l omavahel pärast sümmetriaomaduse kasutamist ära.
2. Antisümmeetria tõestamine.
$T_{kl} = -T_{lk}$:

$$T_{i'j'} = a_{i'k}a_{j'l}T_{kl} = -a_{i'k}a_{j'l}T_{lk} = -a_{i'l}a_{j'k}T_{kl} = -T_{j'i'}.$$

Suvalist 2.järku tensorit **T** võib alati nii **sümmetriseerida** kui ka **antisümmetriseerida**

$$S_{ij} = \tfrac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \tag{2.9}$$

$$A_{ij} = \tfrac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \tag{2.10}$$

Nagu valemitest (2.9), (2.10) näha, võime iga tensori esitada tema sümmeetrilise ja antisümmeetrilise osa summana:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}. \tag{2.11}$$

Ülesanne 43 *Näidata, et ühiktensor* **I** *jääb baasi ON teisendustel samaks.*

Lahendus. $(\mathbf{I})_{ij} = \delta_{ij}$. Baasi teisendusel muutuvad tensori koordinaadid vastavalt valemile (2.2), kasutades siis veel teisendusmaatriksi $a_{k'j}$ omadust (1.27), saame:

$$\delta_{ij} a_{k'i} a_{l'j} = a_{k'j} a_{l'j} = \delta_{k'l'}$$

2. järku **tensori jäljeks** nimetatakse selle tema maatriksi diagonaalelementide summat

$$\mathrm{Tr}\ \mathbf{T} = \mathrm{Sp}\ \mathbf{T} = T_{ii} \tag{2.12}$$

Tr - trace (inglise k.), Sp - spur (saksa k.).

Ülesanne 44 *Näidata, et tensori jälg on invariantne baasi teisenduste suhtes.*

Kasutades ortogonaalmaatriksite omadust (1.27):

$$a_{i'l} a_{i'k} = \delta_{lk}$$

saame

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{T} = T_{i'i'} = a_{i'j} a_{i'k} T_{jk} = \delta_{jk} T_{jk} = T_{jj}.$$

2.3 Kõrgemat järku tensorid. Tehted tensoritega.

p**-järku tensor** $\mathbf{T}^{(p)}$ on 3^p koordinaadiga $T_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ määratud matemaatiline objekt, mille iga indeksi jaoks rakendub 3-ruumi ON baasi $\{\vec{e}_i\}$ ortogonaalteisendusel $\vec{e}_{i'} = a_{i'j}\vec{e}_j$ teisenduseeskiri $b_{i'} = a_{i'j} b_j$:

$$T_{i'_1 i'_2 \ldots i'_p} = a_{i'_1 j_1}\, a_{i'_2 j_2}\ \ldots\ a_{i'_p j_p}\, T_{j_1 j_2 \ldots j_p}. \tag{2.13}$$

(Tensor on matemaatiline objekt, mis jääb baasi ON teisendustel invariantseks.)
Ka p-järku tensorid moodustavad lineaarse ruumi: nende hulk on kinnine liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes, kusjuures analoogiliselt 2. järku tensoritega taanduvad need operatsioonid tensoritega operatsioonidele tensori koordinaatidega.
Valemist (2.12) nähtub, et skalaar on 0-järku tensor, vektor esimest järku tensor.
Liita võib vaid sama järku tensoreid, kusjuures liita tuleb vastavad koordinaadid .

Ülesanne 45 *Leida vektori* $\vec{a} = (3, 0, 1)$ *ja 2.järku tensori*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

tensorkorrutis $\mathbf{S} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{a}$.

Lahendus. Kahe tensori **otse- ehk tensorkorrutis** on defineeritud järgmiselt: $\mathbf{T}^{(p)} \otimes \mathbf{U}^{(a)}$ on (p+q)-järku tensor

$$\left(\mathbf{T}^{(p)} \otimes \mathbf{U}^{(q)}\right)_{i_1\, i_2\, \ldots\, i_p\, j_1\, j_2\, \ldots\, j_q} = T_{i_1\, i_2\, \ldots\, i_p} U_{j_1\, j_2\, \ldots\, j_q}. \tag{2.14}$$

St korrutada tuleb omavahel kõiki koordinaate.

Seega on 2.järku tensori ja vektori tensorkorrutis 3. järku tensor, mille koordinaadid on järgmised:

$$\begin{array}{ccc}
S_{111} = T_{11}a_1 = 3, & S_{112} = 0, & S_{113} = 1, \\
S_{121} = T_{12}a_1 = 6, & S_{122} = 0, & S_{123} = 2, \\
S_{131} = 9, & S_{132} = 0, & S_{133} = 3, \\
S_{111} = 12, & S_{212} = 0, & S_{213} = 4, \\
S_{221} = 15, & S_{222} = 0, & S_{223} = 5, \\
S_{231} = 18, & S_{232} = 0, & S_{233} = 6, \\
S_{311} = 21, & S_{312} = 0, & S_{313} = 7, \\
S_{321} = 24, & S_{322} = 0, & S_{323} = 8, \\
S_{331} = 27, & S_{332} = 0, & S_{333} = 9.
\end{array}$$

Ka arvu ja vektori korrutis on tegelikult 0-järku ja 1.-järku tensorite tensorkorrutis.

Ülesanne 46 *Ahendada eelmises ülesandes leitud tensor* **S** *kahe esimese indeksi järgi.*

Lahendus. p-järku tensori **ahendamisel** mingi indeksipaari järgi võetakse need võrdseks ja siis summeeritakse.
Seega

$$\begin{aligned}
c_j &:= S_{iij} = S_{11j} + S_{22j} + S_{33j}, \qquad \text{saame} \\
\vec{c} &= (45, 0, 15)
\end{aligned}$$

Ahendamisel, analoogiliselt 2.järku tensori jälje leidmisele, väheneb tensori järk kahe võrra. (Ahendamist nimetatakse ka vahel harva mingi indeksipaari järgi jälje leidmiseks, kuid ei tähistata enam Tr).
Ahendamisel ei pruugi indeksid asetseda kõrvuti. Näiteks 3.järku tensorit koordinaatidega T_{ijk} saab ahendada kolmel viisil:
T_{ijj}, $T_{jij}\, T_{jji}$ ja saadakse nii üldiselt 3 erinevat vektorit.

Ülesanne 47 *Leida vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ tensorkorrutise jälg.*

Lahendus.

$$\mathrm{Tr}\ (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\vec{a} \otimes \vec{b})_{ii} = a_i b_i = \vec{a}\, \vec{b}$$

St vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ skalaarkorrutist võib käsitleda vektorite ahendatud tensorkorrutisena.

Suvaliste tensorite $\mathbf{T}^{(p)}$ ja $\mathbf{U}^{(q)}$ korrutise $\mathbf{T}^{(p)} \cdot \mathbf{U}^{(q)}$ võime defineerida kui nende tensorite keskelt (s.o esimese teguri viimase ja teise teguri esimese indeksi järgi) ahendatud otsekorrutise:

$$\left(\mathbf{T}^{(p)} \ \cdot \ \mathbf{U}^{(q)}\right)_{i_1\, i_2\, \ldots\, i_{p-1}\, j_2\, j_3\, \ldots\, j_q} = \left(\mathbf{T}^{(p)} \otimes \mathbf{U}^{(q)}\right)_{i_1\, i_2\, \ldots\, i_{p-1}\, i i\, j_2\, \ldots\, j_q} = T_{i_1\, i_2\, \ldots\, i_{p-1}\, i} U_{i\, j_2\, \ldots\, j_q}.$$

Tulemuseks on $(p + q - 2)$-järku tensor.

Ülesanne 48 *Leida, kuidas teisenevad tensori*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix}$$

komponendid baasi $\{\vec{e}_i\}$ *pöördel ümber* z*-telje.*

Lahendus. Pööret ümber z-telje kirjeldab teisendusmaatriks

$$A_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kasutades tensori teisendusvalemit (2.3), leiame

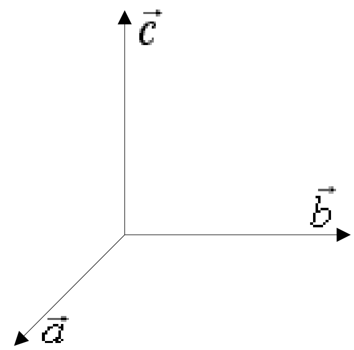
$$J' = A_z J A_z^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11}\cos\alpha & J_{11}\sin\alpha & 0 \\ -J_{22}\sin\alpha & J_{22}\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} J_{11}\cos^2\alpha + J_{22}\sin^2\alpha & J_{11}\sin\alpha\cos\alpha - J_{22}\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ J_{11}\sin\alpha\cos\alpha - J_{22}\sin\alpha\cos\alpha & J_{11}\sin^2\alpha + J_{22}\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix}$$

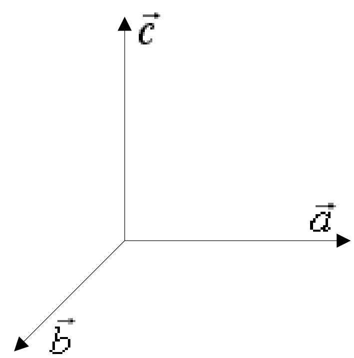
2.4 Vektorkolmiku orientatsioon.

Mittekomplanaarsete vektorite järjestatud kolmikut $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nimetatakse **paremorienteerituks ehk parempoolseks**, kui kolmiku vektorid pärast ühisesse alguspunkti kandmist asetsevad nii, nagu saavad asetseda parema käe pöial, esimene sõrm ja peopessa pööratud teine sõrm.
Võimalikud on ka ekvivalentsed sõnastused: paremorientatsiooni korral asub kolmas vektor $\vec{c}$ vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ määratud tasandist sealpool, kust vaadates lühim pööre vektorilt $\vec{a}$ vektorile $\vec{b}$ toimub vastupidi kellaosuti liikumise suunale.



Teist võimalikku orientatsiooni, kus kolmiku ühe vektori suund on vastupidine parempoolse süsteemi vektorile nimetatakse **vasakorienteerituks ehk vasakpoolseks**.

Kolmiku orientatsioon ei muutu, kui vektoreid tsükliliselt ümber paigutada $((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ ja $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ on sama orientatsiooniga), kuid kui vahetada mistahes kaks vektorit või muuta ühe vektori suund, muutub kolmik vastupidi orienteerituks.



Ka 3-ruumi ON baasid jagunevad parem- ja vasakorienteerituteks. Pärisortogonaalteisendustel (determinant on +1) säilib baasi vektorite orientatsioon, teisendustel determinandiga -1 orientatsioon muutub.
Pseudoskalaar on arvsuurus, mille märk muutub vastupidiseks baasi orientatsiooni muutumisel.
Näiteks vektorkolmikule $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ehitatud rööptahuka ruumala loetakse kolmiku parempoolsuse korral positiivseks, vasakorientatsiooni korral negatiivseks.

Pseudovektor on pikkuse, sihi ja suunaga määratud vektorilaadne objekt, mille suund muutub orientatsiooni muutumisel vastupidiseks. Elementaarkursustes, kus piirdutakse parempoolsete baasidega ja pärisortogonaalteisendustega, pole vajadust pseudosuurusi kasutada. Pseudovektori suuna sõltuvust orientatsioonist saame arvestada, kui vektori koordinaatide teisendusvalemisse $r_{i'} = a_{i'j} r_j$ lisada tegur det A:

$$r_{i'} = \mathrm{detA\ a_{i'j} r_j}, \qquad (\vec{\mathrm{r}} \ - \ \text{pseudovektor}), \tag{2.15}$$

2.5 Vektorkorrutis.

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **vektor- ehk ristkorrutis** $\vec{a} \times \vec{b}$ on määratud järgmiste tingimustega:
1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$, kus φ on $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk;
2. $\vec{a} \times \vec{b}$ on risti tegurvektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$;

3. Kolmik $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ on paremorienteeritud baasis parempoolne, vasakorienteeritud baasis vasakpoolne.

Nagu definitsioonist näha, on vektorkorrutis pseudovektor.
Järeldusi:
1. Kui $\vec{a} || \vec{b}$, siis $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
2. Vektorkorrutise moodul $|\vec{a} \times \vec{b}|$ on võrdne vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindalaga.
3. ON baasi korral

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \tag{2.16}$$

sõltumata baasi orientatsioonist.

Vektorkorrutise omadused:
1. antikommuteeruvus $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. assotsiatiivsus skalaarse teguri suhtes $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$;
3. distributiivsus liitmise suhtes $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$.

Ülesanne 49 *Näidata, et vektorkorrutis on antikommuteeruv.*

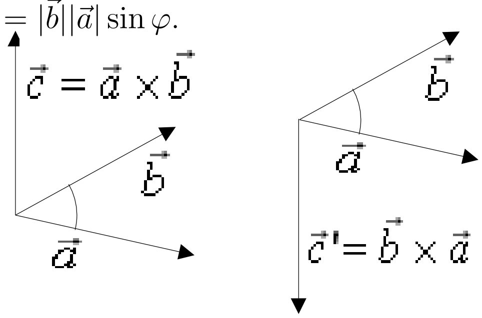
Lahendus. Olgu meil tegemist paremorienteeritud baasiga. Tähistame

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}, \qquad \vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}'.$$

Vektorite $\vec{c}$ ja $\vec{c}'$ moodulid:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi, \qquad |\vec{c}'| = |\vec{b}||\vec{a}| \sin\varphi.$$

Seega $|\vec{c}| = |\vec{c}'|$. Vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ moodustavad paremorienteeritud vektorkolmiku. Analoogiliselt moodustavad paremorienteeritud vektorkolmiku $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}'$. Nagu jooniselt näha, on $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{c}'$. Vektorid $\vec{c}$ ja $\vec{c}'$ on moodulilt võrdsed ning suunalt vastassuunalised. Seega



$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Ülesanne 50 *Leida vektorite $\vec{a} = a_i\vec{e}_i$ ja $\vec{b} = b_i\vec{e}_i$ vektorkorrutis koordinaatkujul.*

Lahendus. Tähistame $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. $\vec{c}$ on risti tegurvektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, seega:

$$\vec{a}\vec{c} = 0, \qquad \vec{b}\vec{c} = 0$$

ehk

$$a_1c_a + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$$
$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0.$$

Ellimineerides siit vastavalt c_1, c_2 ja c_3, saame

$$\frac{c_1}{a_2b_3 - a_3b_2} = \frac{c_2}{a_3b_1 - a_1b_3} = \frac{c_3}{a_1b_2 - a_2b_1} = A.$$

Sellised võrdused saavad kehtida vaid juhul, kui nad kõik on võrdsed mingi konstandiga, mille oleme tähistanud A-ga. Siit saame

$$\begin{aligned} c_1 &= A(a_2b_3 - a_3b_2) \\ c_2 &= A(a_3b_1 - a_1b_3) \\ c_3 &= A(a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

Vektori $\vec{c}$ mooduli ruut:

$$\begin{aligned} \vec{c}^{\,2} &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^3 = A^2[a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) - \\ &- 2(a_2b_2a_3b_3 + a_1b_1a_3b_3 + a_1b_1a_2b_2)]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Arvestades nüüd, et

$$a_1^2(b_2^2 + b_3^2) = a_1^2(\vec{b}^2 - b_1^2)$$

ja analoogiliselt ka a_2^2 ja a_3^2 jaoks, siis asendades saadud tulemuse võrdusse (2.17), saame

$$\begin{aligned} \vec{c}^{\,2} &= A^2[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\vec{b}^{\,2} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2] = A^2[\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\vec{b})^2] \\ &= A^2(\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}\cos^2\varphi) = A^2\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}(1 - \cos^2\varphi) = A^2\vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

Kuid teisalt, vektorkorrutise definitsiooni arvestades

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.$$

Seega $A = \pm 1$. Valides $A = 1$ (paremorienteeritud baas), võime kirjutada

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3. \tag{2.18}$$

Maatriksi abil võime selle esitada järgmiselt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i a_j b_k, \tag{2.19}$$

kus

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{kui ijk on 123, 231, 312;} \\ -1, & \text{kui ijk on 132, 213, 321;} \\ 0, & \text{kui vähemalt 2 indeksit on võrdsed.} \end{cases} \tag{2.20}$$

Ülesanne 51 *Leida vektorite $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ja $\vec{b} = (3, 1, 2)$ vahelise nurga φ siinus.*

Lahendus. Vektorkorrutise definitsioonist saame $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$. Kasutades seost (2.19), saame

$$\vec{a} \times \vec{b} = -8\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3.$$

Arvestades, et suvalise vektori moodul $|\vec{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$, leiame

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{28}\sqrt{28}}{\sqrt{180}} = \sqrt{\frac{7}{45}}.$$

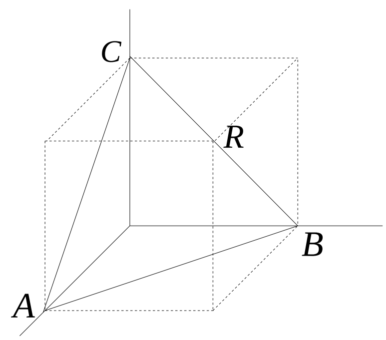
Ülesanne 52 *Leida kolmnurga pindala, kui tema tippudeks on punkti $R = (a, b, c)$ ristprojektsioonid koordinaattelgedel.*

Lahendus. Punkti R projektsioonid koordinaattelgedel on $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$, $C = (0, 0, c)$ (vt joonist allpool). Kolmnurga ABC pindala on avaldatav vektorite $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$ ja $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$ kaudu:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Valemist (2.19) saame $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bc, ac, ab)$ ning seega

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2b^2 + b^2c^2}.$$



2.6 Liitkorrutised.

Ülesanne 53 *Leida segakorrutise (pseudoskalaari)*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \tag{2.21}$$

avaldis koordinaatkujul.

Lahendus.

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}(\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i b_j b_k) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2.22}$$

Arvestades maatriksi ε_{ijk} omadusi, võime kirjutada ka:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

Segakorrutist tähistatakse mitmel moel:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \tag{2.23}$$

Nagu valemist (2.23) näha on segakorrutise rakendamisel tulemuseks skalaar.

Ülesanne 54 *Näidata, et kahekordne vektorkorrutis $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ avaldub kujul:*

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b}). \tag{2.24}$$

Lahendus. Kirjutame sulgudes oleva vektorkorrutise lahti:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{a}\times[\vec{e}_1(b_2c_3-b_3c_2)+\vec{e}_2(b_3c_1-b_1c_3)+\vec{e}_3(b_1c_2-b_2c_1)] = \\ &= \vec{e}_1[a_1(b_1c_2-b_2c_3)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)]+\vec{e}_2[a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1)]+ \\ &+ \vec{e}_3[a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)].\end{aligned}$$

Nüüd liidame ja lahutame samaaegselt $\vec{e}_1$ järel sulgudes olevale avaldisele $a_1b_1c_1$, $\vec{e}_2$ kordajale $a_2b_2c_2$ ning $\vec{e}_3$ kordajale $a_3b_3c_3$, siis saamegi

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b}).$$

Vektorkorrutiste skalaarkorrutis (skalaar) on avaldatav kujul:

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d})-(\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}). \tag{2.25}$$

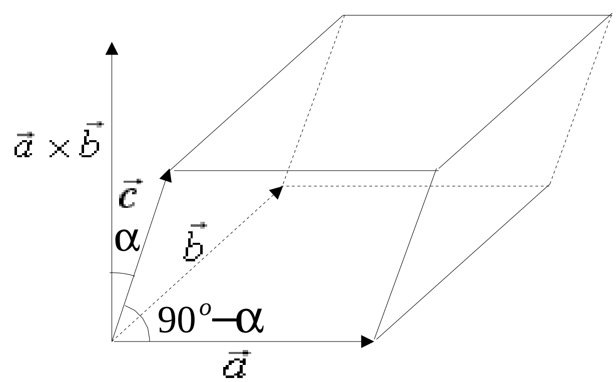
Ülesanne 55 *Lähtudes skalaar- ja vektorkorrutise geomeetrilisest tõlgendusest põhjendada segakorrutise seos neile vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga.*

Vektorkorrutise $\vec{a}\times\vec{b}$ geomeetrilise tõlgenduse kohaselt on selle moodul vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindala (võrdle ka ülesandega 52).

$$S_{\vec{a},\vec{b}}=|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Vektoritele $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ehitatud rööptahuka ruumala

$$\begin{aligned}V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} &= S_{\vec{a},\vec{b}}|\vec{c}|\cos\beta = S_{\vec{a},\vec{b}}|\vec{c}|\sin\alpha \\ &= |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\sin\alpha = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.\end{aligned}$$



2.7 Pseudotensor. Levi-Civita pseudotensor.

Pseudotensor on tensorilaadne objekt, mille koordinaatide teisendusvalemisse lisandub analoogiliselt pseudovektorile (2.15) tegur $detA$. Niisiis 2. järku pseudotensori korral asendub valem (2.2) valemiga

$$T_{i'j'}=\det A a_{i'k}a_{j'l}T_{kl}. \tag{2.26}$$

St, pseudotensor on matemaatiline objekt, mille koordinaadid teisenevad vastavalt valemile (2.26).

3-ruumi Levi-Civita pseudotensor $\mathbf{E}^{(3)}$ on 3. järku ja tema koordinaadid on defineeritud valemiga (2.20)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{kui ijk on 123, 231, 312;} \\ -1, & \text{kui ijk on 132, 213, 321;} \\ 0, & \text{kui vähemalt 2 indeksit on võrdsed.} \end{cases}$$

Rakendustes kasutatakse tihti Levi-Civita pseudotensori otsekorrutisi mõne teise tensoriga, mis on ahendatud nii, et üks summeerimisindeks on Levi-Civita pseudotensorilt, teine indeks teiselt tegurilt. Näiteks vektorkorrutise avaldisest on näha, et siin on Levi-Civita pseudotensori otsekorrutist vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ tensorkorrutiga kaks korda ahendatud

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Arvutustes kasutatakse ka Levi-Civita pseudotensori otsekorrutist iseendaga. Selle võib Kroneckeri sümboli abil avaldada järgmiselt:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}. \tag{2.27}$$

Pseudotensori ε_{ijk} otsekorrutise iseendaga ahendamisel saame järgmise tulemuse.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}, \tag{2.28}$$

ε_{ijk} otsekorrutise iseendaga ahendamisel kaks korda saame järgmise tulemuse:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = 2\delta_{im}. \tag{2.29}$$

Ülesanne 56 *Tõestada seos (2.28).*

Lahendus. Kasutame Kroneckeri sümboli omadusi $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$ ja $\delta_{ii} = 3$, saame

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} &= \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kk} + \delta_{in}\delta_{jk}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kn} - \delta ik\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kk} = \\ &= \delta_{in}\delta_{jm} + 3\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{im}\delta_{jn} - 3\delta_{in}\delta_{jm} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}. \end{aligned}$$

Ülesanne 57 *Kasutades Levi-Civita pseudotensori omadusi, näidata järgmiste seoste kehtivus.*
1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$;
2) $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$.

Lahendus.
1) $\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i a_j b_k$, $\vec{c} \times \vec{d} = \varepsilon_{lmn}\vec{e}_l c_m d_n$.

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i a_j b_k \ \varepsilon_{lmn}\vec{e}_l c_m d_n = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \ \varepsilon_{lmn} c_m d_n \delta_{il} = \\ = a_j b_k c_m d_n(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) &= a_j c_j b_k d_k - a_j d_j b_k c_k = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) = -(\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}). \end{aligned}$$

Siin kasutasime baasivektorite skalaarkorrutise omadust: $\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{ij}$ ja Levi-Civita pseudotensori omadusi.
2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i a_j b_k) \times (\varepsilon_{lmn}\vec{e}_l c_m d_n) = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{lmn} c_m d_n \varepsilon_{pil}\vec{e}_p =$
$= \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_m d_n(\delta_{mp}\delta_{ni} - \delta_{mi}\delta_{np})\vec{e}_p = (\varepsilon_{ijk} a_j b_k c_p d_i - \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i d_p)\vec{e}_p =$
$= (\vec{d}\vec{a}\vec{b})\vec{c} - (\vec{c}\vec{a}\vec{b})\vec{d} = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}.$

Ülesanne 58 *Kasutades komponente, tõestada, et m-järku pseudotensori ja n-järku tensori tensorkorrutis on m + n-järku pseudotensor.*

Lahendus. Olgu meil m-järku pseudotensor $\mathbf{P}^{<m>}$ komponentidega $P_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ ja n-järku tensor $\mathbf{T}^{<n>}$ komponentidega $T_{j_1 j_2 \ldots j_n}$. Nende tensorkorrutis olgu $\mathbf{S}^{<m+n>} = \mathbf{P}^{<m>} \otimes \mathbf{T}^{<n>}$ komponentidega

$$S_{i_1 i_2 \ldots i_m j_1 j_n} = P_{i_1 \ldots i_m} T_{j_1 \ldots j_n}.$$

ON teisendusel teiseb $\mathbf{P}$ ja $\mathbf{T}$ tensorkorrutis järgmiselt:

$$\begin{aligned} S_{k'_1 \ldots k'_m l'_1 \ldots l'_m} &= \det A a_{k'_1 i_1} \ldots a_{k'_m i_m} P_{i_1 \ldots i_m} a_{l'_1 j_1} \ldots a_{l'_n j_n} T_{j_1 \ldots j_n} = \\ &= \det A a_{k'_1 i_1} \ldots a_{k'_m i_m} a_{l'_1 j_1} \ldots a_{l'_n j_n} S_{i_1 \ldots i_m j_1 \ldots j_n}. \end{aligned}$$

Võrduse mõlemal poolele seisab $m+n$-järku tensorilaadne matemaatiline objekt. Kuivõrd siit on näha, et see teiseneb ON teisendusel vastavalt pseudotensori teisenemiseeskirjale, siis on see $m + n$ järku pseudotensor.

Ülesanne 59 *Kasutades komponente, tõestada, et pseudotensori ühekordsel ahendamisel saame pseudotensori, mille järk on 2 võrra madalam esialgse pseudotensori järgust.*

Lahendus. Olgu meil m-järku pseudotensor $\mathbf{P}$ komponentidega $P_{i_1 \ldots i_m}$. ON teisendusel teiseneb see järgmiselt:

$$P_{k'_1 \ldots k'_m} = \det A \; a_{k'_1 i_1} \ldots a_{k'_m i_m} P_{i_1 \ldots i_m}.$$

Ahendame seda pseudotensorit j ja l indeksi järgi, $1 \leqslant j, l \leqslant k$, $j \neq k$, $j < l$. Saame tulemuseks $m-2$ järku tensori komponentidega $P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_j \ldots i_m}$, mis ON teisendusel teiseneb järgmiselt:

$$P_{k'_1 \ldots k'_j \ldots k'_l \ldots k'_m} = \det A \; a_{k'_1 i_1} \ldots a_{k'_j i_j} \ldots a_{k'_l i_j} \ldots a_{k'_m i_m} P_{i_1 \ldots i_j \ldots i_l \ldots i_m}.$$

Nüüd arvestame, et $a_{k'_j i_j} a_{k'_l i_j} = \delta_{k'_j k'_l}$ ja seega on viimase võrduse vasakul poolel seisev pseudotensor $m - 2$-järku. (See, et ta on pseudotensor, on näha teisenduseeskirjast).

Ülesanne 60 *Kasutades Levi-Civita sümbolit, arvutada $[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] \times \vec{c}$.*

Lahendus.

$$\begin{aligned} [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] \times \vec{c} &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}]_j c_k = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \varepsilon_{jlm} (\vec{a} \times \vec{b})_l c_m c_k = \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{lnp} a_n b_p c_m c_k = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i a_n b_p c_m c_k (\delta_{mn} \delta_{jp} - \delta_{mp} \delta_{jn}) = \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i a_n b_j c_n c_k - \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j b_m c_m c_k = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b} \times \vec{c}) - (\vec{b}\vec{c})(\vec{a} \times \vec{c}). \end{aligned}$$

Ülesanne 61 *Kasutades Levi-Civita sümbolit, tõestada, et segakorrutis $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$.*

Lahendus. Võrduse vasak pool:

$$\begin{aligned} &(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}) = \varepsilon_{ijk} (\vec{a} \times \vec{b})_i (\vec{b} \times \vec{c})_j (\vec{c} \times \vec{a})_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} a_l b_m \varepsilon_{jnp} b_n c_p \varepsilon_{kst} c_s a_t = \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_l b_m \varepsilon_{jnp} b_n c_p \varepsilon_{kst} c_s a_t = \varepsilon_{jnp} \varepsilon_{kst} a_j b_k b_n c_p c_s a_t - \varepsilon_{jnp} \varepsilon_{kst} a_k b_j b_n c_p c_s a_t \end{aligned}$$

Saadud tulemuse teine liige on null. (Näiteks $\varepsilon_{jnp}b_j b_n c_p = \vec{b}\vec{b}\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{b})\vec{c} = 0$, sest vektori vektorkorrutis iseendaga on 0. See, et see liige on null, järeldub muidugi ka Levi-Civita sümboli omadustest). Seega oleme saanud

$$(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2.$$

Lisaülesanded.

Ülesanne 62 *Näidata, et vektorite tensorkorrutiste summat*

$$\vec{a}\otimes\vec{b} + \vec{c}\otimes\vec{d}$$

ei saa esitada kahe teise vektori tensorkorrutisena, kui $\vec{a} = (1,7,3)$, $\vec{b} = (-3,2,-1)$, $\vec{c} = (3,4,5)$, $\vec{d} = (1,-1,0)$.

Ülesanne 63 *Esitada järgmised tensorid sümmeetrilise ja antisümmeetrilise tensori summana:*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 64 *Arvutada* $\vec{a}\cdot\mathbf{T}$, $\vec{b}\cdot\mathbf{T}$, $\mathbf{T}\cdot\vec{a}$, $\mathbf{T}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{a}$, *kui*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \qquad \vec{b} = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3.$$

Ülesanne 65 *Leida eelmise ülesande andmete põhjal* $\mathrm{Tr}(\mathbf{T}\otimes\vec{a})$ *ja* $\mathrm{Tr}(\vec{a}\otimes\mathbf{T})$.

Ülesanne 66 *Näidata, et vektorkorrutiste skalaarkorrutis* $(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})$ *(skalaar) on avaldatav kujul:*

$$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}).$$

Ülesanne 67 *Tõestada, et*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d} = (\vec{c}\vec{d}\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}\vec{d}\vec{b})\vec{a}.$$

Ülesanne 68 *Leida tensori* $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ja pseudotensori* $\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *koordinaadid pärast järgmisi baasiteisendusi:*

$$1)A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad 2)A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 69 *Kasutades Levi-Civita pseudotensori omadusi (2.27- 2.29), näidata järgmiste seoste kehtivus.*

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c});\\
&2) \quad (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}).
\end{aligned}
$$

Ülesanne 70 *Näidata, et*

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk} = 2\delta_{im}.$$

Ülesanne 71 *Kasutades Levi-Civita sümbolit, arvutada* $[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] \cdot \vec{b}$.

Ülesanne 72 *Kasutades komponente, tõestada, et kahe pseudotensori tensorkorrutis on tavaline tensor, mille järk on võrdne korrutatavate pseudotensorite järkude summaga.*

3 Vektor- ja tensoranalüüs

3.1 Skalaarvälja gradient

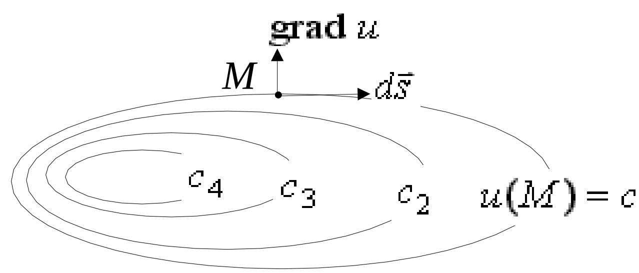
Kui mõni matemaatilistest objektidest - kas skalaar, vektor või tensor on määratud kogu ruumis või ruumi mingis piirkonnas, siis öeldakse, et seda piirkonda kirjeldab vastav väli (skalaar-, vektor-, tensorväli).
Skalaarvälja näiteks võib olla ruumi temperatuur $T = T(M)$, rõhk $\rho = \rho(M) = \rho(x, y, z)$, elektrivälja potentsiaal $U = U(M)$. Vektorvälja näitena võib tuua elektrivälja tugevuse $\vec{E} = \vec{E}(M) = \vec{e}_i E_i(x, y, z)$ (ristkoordinaatides), veevoolu kiiruste väli $\vec{v} = \vec{v}(M)$.
Skalaarvälja kirjeldab ruumipunkti M ühene funktsioon

$$u = u(M). \tag{3.1}$$

Ristkoordinaatides võib kirjutada $u = u(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, polaarkoordinaatides siis $u = u(r, \varphi, \vartheta)$.
Pinnad

$$u(M) = c, \qquad \text{kus} \ \ c = const, \tag{3.2}$$

on välja **nivoopinnad**. Näiteks samatemperatuuripinnad, ekvipotentsiaalpinnad jne. Konstandi c erinevate väärtuste korral saame nivoopidade parve. u väärtus võib mõnes suunas muutuda kiiremini kui teistes. Kui vaadata joonist, siis ilmselt piirkonnas, kus nivoopinnad (jooned) paiknevad tihedamalt, on ka u väärtuse kasv ses suunas kiirem.



Igas ruumipunktis M on määratud nivoopinna normaal, mille saame arvutada järgmiselt. Nivoopinna võrrandi diferentseerimine annab meile järgmise valemi:

$$du(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i = 0, \tag{3.3}$$

kus

$$d\vec{s} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z = dx_i\vec{e}_i,$$

on puutepinna vektor. Tähistades nivoopinna normaalivektori sümboliga grad u,

$$\text{grad } u = \vec{e}_1\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_2\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_3\frac{\partial u}{\partial z} = \vec{e}_i\frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{3.4}$$

võime seost (3.3) vaadelda puutujavektori ja normaalvektori ristseisu tingimusena (vektorite skalaarkorrutis on null)

$$d\vec{s} \ \cdot \text{grad } u = 0.$$

Skalaarvälja $u(M)$ **gradiendiks** grad $u(M)$ nimetatakse vektorit, mis on suunatud funktsiooni kiireima kasvu suunas (seega nivoopinna normaali sihis) ja mille pikkus võrdub funktsiooni $u(M)$ muutusega pikkusühiku kohta selles suunas ning on määratud valemiga (3.4). Gradient iseloomustab suuruse u muutumist ruumis, st ta on ruumiline kiirus.

Ülesanne 73 *Leida välja* $u = x^3 + y^3 + 3yz^2 - 5xy^2$ *gradientvektorid punktides* $M_1 = (0,0,0)$ *ja* $M_2 = (1,1,2)$.

Lahendus.

$$\begin{aligned}
\text{grad } u &= (3x^2 - 5y^2)\vec{e}_x + (3y^2 + 3z^2 - 10xy)\vec{e}_y + 6yz\vec{e}_z, \\
\text{grad } u|_{M_1} &= \vec{0}, \\
\text{grad } u|_{M_2} &= -2\vec{e}_x - \vec{e}_y + 12\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

Ülesanne 74 *Arvutada gradiendid järgmistest funktsioonidest:* $(\vec{a}\vec{r})^2$, $(\vec{a} \times \vec{r})^2$, *kus* $\vec{r}$ *on punkti* $M = (x_1, x_2, x_3)$ *kohavektor,* $\vec{a}$ *ja* $\vec{b}$ *on konstantsed vektorid.*

Lahendus.

$$1)\ \text{grad } (\vec{a}\vec{r})^2 = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_j x_j a_k x_k) = \vec{e}_i(a_j \delta_{ij} a_k x_k + a_j x_j a_k \delta_{ik}) = 2\vec{e}_i a_i (a_k x_k) = 2\vec{a}(\vec{a}\vec{x})$$

$$\begin{aligned}
2)\quad & \text{grad } (\vec{a} \times \vec{r})^2 = \text{grad } (\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i a_j x_k \varepsilon_{lmn}\vec{e}_l a_m x_n) = \text{grad } (\varepsilon_{ijk}\delta_{il} e_i a_j x_k \varepsilon_{lmn} a_m x_n) = \\
& = \text{grad } [(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) a_j x_k a_m x_n] = \text{grad } (a_j a_j x_k x_k - a_j x_j a_k x_k) = \\
& = (\vec{a})^2 \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_k^2) - 2\vec{a}(\vec{a}\vec{r}) = 2(\vec{a})^2 \vec{e}_i x_k \delta_{ik} - (\vec{a}\vec{r})\vec{e}_i a_i = 2(\vec{a})^2 \vec{r} - 2\vec{a}(\vec{a}\vec{r}).
\end{aligned}$$

J ärgnevates ülesannetes vaatleme skalaarvälja gradiendi omadusi ja tähendust lähemalt.

Ülesanne 75 *Avaldada funktsiooni* $u(M)$ *tuletis piki joont (ehk etteantud suunal) gradiendi kaudu.*

Lahendus. Olgu meil antud joon γ, mille võrrandi võime parameetriliselt esitada parameetri l abil järgmiselt:

$$\vec{r} = \vec{r}(l) = \vec{e}_i x_i(l).$$

Parameeter l on joone pikkus. Funktsiooni u tuletis piki kõverat γ on defineeritud järgmiselt:

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(M') - u(M)}{\Delta l} = \left(\frac{du(M)}{dl}\right)_\gamma . \tag{3.5}$$

Nüüd arvestame joone γ parameetrilist esitust, siis saame

$$\left(\frac{du(M)}{dl}\right)_\gamma = \frac{d}{dl} u(x_i(l))|_{l=0} = \frac{\partial u(M)}{\partial x_i}\frac{dx_i(0)}{dl} = \text{grad } u \ \cdot \vec{l} \equiv \text{grad }_{\vec{l}} u(M), \tag{3.6}$$

kus $\vec{l} = \dfrac{dx_i(0)}{dl} \equiv \left(\dfrac{dx_i}{dl}\right)_{|l=0}$ on joone γ puutujasuunaline ühikvektor.

Ülesanne 76 *Leida välja $u = x^3 + y^3 + 3yz^2 - 5xy^2$ tuletis vektori $\vec{n} = (2, 1, -2)$ suunas.*

Lahendus. Selleks, et leida tuletis etteantud suunal, peame esmalt leidma vektori $\vec{n}$ suunalise ühikvektori

$$\vec{e}_{\vec{n}} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Välja u gradient on meil leitud ülesandes 73:

$$\text{grad } u = (3x^2 - 5y^2)\vec{e}_x + (3y^2 + 3z^2 - 10xy)\vec{e}_y + 6yz\vec{e}_z.$$

Seega, välja u tuletis suunal $\vec{n}$ on vastavalt valemile (3.6)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{e}_{\vec{n}}\text{grad } u = 2x^2 - \frac{10}{3}y^2 + y^2 + z^2 - \frac{10}{3}xy - 4yz = 6x^2 - \frac{2}{3}y^2 + z^2 - \frac{10}{3}xy - 4yz.$$

Ülesanne 77 *Leida funktsiooni $u(M)$ juurdekasv lõplikul nihkel punktist M punkti M'.*

Lahendus. Funktsiooni juurdekasvu lõpmata väiksesel nihkel $d\vec{l} = \vec{l}dl$ punktist M punkti M' saame valemi (3.6) abil:

$$du = u(M') - u(M) = \text{grad } u(M)\ d\vec{l}. \tag{3.7}$$

Funktsiooni muudu lõplikul nihkel leiame võrduse (3.7) integreerimisel:

$$\Delta u = \int_M^{M'} du = \int_M^{M'} \text{grad } u\ d\vec{l}. \tag{3.8}$$

Näitame, et funktsiooni muut ei sõltu integreerimise teest. Võtame integraali (3.8) üle kinnise kõvera γ, st integreerimise algus- ja lõpppunkt langevad kokku:

$$\Delta u = \int_M^M \text{grad } u\ d\vec{l}|_\gamma = 0$$
$$\int_M^{M'} \text{grad } u\ d\vec{l}|_{\gamma_1} + \int_{M'}^M \text{grad } u\ d\vec{l}|_{\gamma_2} = 0$$
$$\int_M^{M'} \text{grad } u\ d\vec{l}|_{\gamma_1} = \int_M^{M'} \text{grad } u\ d\vec{l}|_{\gamma_2}.$$

Seega on **gradientvälja joonintegraal** määratud integreerimistel alg- ja lõpppunktidega M ja M' ega sõltu neid punkte ühendava kõvera γ valikust. Kokkuvõtvalt võime formuleerida **skalaarvälja gradiendi järgmised omadused**:
1. gradientvektor on suunatud skalaarvälja maksimaalse kasvu suunas;
2. gradientvektori moodul $|\text{grad } u| = \max\left(\frac{du}{d\vec{l}}\right)$;
3. gradientvektor on risti skalaarvälja nivoopinnaga.

Gradiendi arvutamisel kehtivad järgmised reeglid:
1) Korrutise gradient

$$\text{grad } (uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\vec{e}_i = v\frac{\partial u}{\partial x_i}\vec{e}_i + u\frac{\partial v}{\partial x_i}\vec{e}_i v = \text{grad } u + u \text{ grad } v. \tag{3.9}$$

2) Liitfunktsiooni gradient

$$\text{grad } f(u) = \frac{\partial}{\partial x_i}f(u)\vec{e}_i = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x_i}\vec{e}_i = \frac{df}{du}\text{grad } u. \tag{3.10}$$

Ülesanne 78 *Leida* grad r *ning* grad $f(r)$, *kus* $\vec{r}$ *on punkti* $M(x_1, x_2, x_3)$ *kohavektor.*

Lahendus. $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Arvestades gradiendi omadusi saame

$$\text{grad } r = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} 2\vec{e}_i x_i = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r. \tag{3.11}$$

Järelikult on kohavektori gradient kohavektori suunaline ühikvektor.

Kasutades liitfunktsiooni gradiendi omadusi saame grad $f(r)$ jaoks

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \text{grad } r = f'(r)\vec{e}_r. \tag{3.12}$$

Ülesanne 79 *Mis suunas on funktsiooni* $u = x^2yz^3$ *tuletis punktis* $M_1 = (1, 2, -1)$ *maksimaalne ja kui suur see on.*

Lahendus. Vastavalt valemile (3.5) on funktsiooni tuletis mingil suunal $\vec{l}$ ($|\vec{l}| = 1$)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right) = \vec{l} \text{grad } u = |\text{grad } u| \cos\varphi,$$

kus φ on grad u ja $\vec{l}$ vaheline nurk. See skalaarkorrutis on maksimaalne, kui $\cos\varphi = 1$, seega grad $u \uparrow\uparrow \vec{l}$, st

$$\begin{aligned} \vec{l} &= \vec{e}_{\text{grad } u} = \frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|}, \\ \text{grad } u &= (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2), \quad \text{siit saame} \quad |\text{grad } u(M_1)| = \sqrt{53}, \\ \vec{l} &= \left(-\frac{4}{\sqrt{53}}, -\frac{1}{\sqrt{53}}, \frac{6}{\sqrt{53}}\right). \end{aligned}$$

Funktsiooni tuletise suurus punktis M_1 on

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_1} = |\text{grad } u|_{M_1} = \sqrt{53}.$$

Sümbolit grad võib käsitelda kui operaatorit, mis rakendub skalaarsele funktsioonile $u(M)$ ja seab talle vastavusse vektori:

$$\text{grad } u(M) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \vec{e}_i.$$

Viimase võrduse parem pool annab selle operaatori rakenduseeskirja ristkoordinaatide ON baasis $\{\vec{e}_i\}$. Seda vektoroperaatorit tähistatakse ka sümboliga ∇, mida nimetatakse Hamiltoni operaatoriks *del* või *nabla*:

$$\text{grad } \equiv \nabla \equiv \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.13}$$

Vektoroperaatori koordinaatideks on osatuletiste operaatorid

$$\text{grad}_i \equiv \nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.14}$$

Ülesanne 80 *Leida, kuidas teisenevad ∇ koordinaadid ON teisendustel.*

Lahendus. Lähtume skalaarvälja gradiendi definitsioonist. Olgu meil skalaarväli $u = u(x_i)$

$$\text{grad } u = \vec{e}_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$x_{j'} = x_{j'}(x_i), \qquad \text{seega} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_{j'}} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_{j'}}.$$

Arvestades, et kohavektori koordinaadid teisenevad ON teisendusel järgmiselt: $x_{j'} = a_{j'i}x_i$, $x_i = a_{j'i}x_{j'}$, saame

$$\frac{\partial u}{\partial x_{j'}} = a_{j'i}\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Ja seega teisenevad operaatori ∇ koordinaadid nagu vektori koordinaadid

$$\nabla_{j'} = a_{j'i}\nabla_i. \tag{3.15}$$

3.2 Vektorvälja gradient.

Analoogiliselt skalaarvälja nivoopindadele võib defineerida ka vektorvälja $\vec{a}(M)$ koordinaatide nivoopinnad:

$$a_1(M) = C_1, \quad a_2(M) = C_2, \quad a_3(M) = C_3.$$

Nende nivoopindade parved iseloomustavad vektorvälja ühes kindlas ON baasis $\{\vec{e}_i\}$. Nagu skalaarväljade puhul, saab ka siin leida vektorvälja iga koordinaadi intensiivseimat kasvu kirjeldavaid objekte - vektori koordinaatide gradiente

$$\text{grad } a_j(M) = \frac{\partial a_j(M)}{\partial x_i}\vec{e}_i = \vec{e}_i\nabla_i a_j \equiv \nabla a_j. \tag{3.16}$$

Vaatame, kuidas teisenevad vektori koordinaatide gradiendid ON teisendustel. Arvestades vektori koordinaatide teisendusvalemit (1.26) $a_{k'} = a_{k'i}a_i$ ja vektoroperaatori nabla koordinaatide teisendusvalemit (3.15), võime kirjutada

$$\frac{\partial a_{j'}}{\partial x_{i'}} \equiv \nabla_{i'}\, a_{j'} = a_{i'k}\, a_{j'l}\, \frac{\partial a_l}{\partial x_k}. \tag{3.17}$$

See on tensori koordinaatide teisenemiseeskiri. Vektori gradiendi leidmisel oleme saanud tensori.

Defineerime **vektori** $\vec{a} = a_i\vec{e}_i$ **gradiendi** kui vektoroperaatori (∇) ja vektori $\vec{a}$ tensorkorrutise:

$$\text{grad } \vec{a} = \nabla \otimes \vec{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = (\text{grad}\vec{a})_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j. \tag{3.18}$$

Seega võime öelda, et vektorvälja $\vec{a}(x_1, x_2, x_3)$, koordinaatidega $a_i(x_1, x_2, x_3)$ gradient on 2. järku tensorväli koordinaatidega T_{ij}.

$$T_{ij} = (\text{grad}\, \vec{a})_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \nabla_i a_j\ . \tag{3.19}$$

Ülesanne 81 *Leida järgmise vektori gradientväli:*

$$\vec{a}(M) = (x^2+y^2, y^2-z^2, z^2-x^2).$$

Lahendus. Koordinaatkujul

$$(\mathrm{grad}\ \vec{a})_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}, \qquad \text{st} \qquad \mathrm{grad}\ \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x} & \frac{\partial a_2}{\partial x} & \frac{\partial a_3}{\partial x} \\ \frac{\partial a_1}{\partial y} & \frac{\partial a_2}{\partial y} & \frac{\partial a_3}{\partial y} \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} & \frac{\partial a_2}{\partial z} & \frac{\partial a_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Saame

$$\mathrm{grad}\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & -2z \\ -2y & 2y & 0 \\ 0 & -2z & 2z \end{pmatrix}.$$

Vektori muut $d\vec{a}$ infinitesimaalsel nihkel $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l} = dl\ \vec{l}$ (kus $\vec{l}$ – nihkesuunaline ühikvektor) on esitatav vektori $d\vec{l}$ ja gradienttensori grad $\vec{a}$ korrutisena (ahendatud otsekorrutisena):

$$d\vec{a} = d\vec{l} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{a} \quad \text{ehk} \qquad da_i = dl_j\,\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \tag{3.20}$$

ja tuletis suunas $\vec{l}$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = \vec{l} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{a} \quad \text{ehk} \qquad \frac{\partial a_j}{\partial l} = l_i\,\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\,. \tag{3.21}$$

Ülesanne 82 *Leida järgmise vektorvälja tuletis vektori* $\vec{l} = (1, -2, 2)$ *suunas:*

$$\vec{a}(M) = (x^2 + y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2).$$

Lahendus. Vektori $\vec{l}$ suunaline ühikvektor on $\vec{n} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Siis valemist (3.21) saame

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = \vec{e}_k n_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \left(n_j \frac{\partial a_1}{\partial a_j}, n_j \frac{\partial a_2}{\partial a_j}, n_j \frac{\partial a_2}{\partial a_j}\right).$$

Kasutades nüüd ülesande 81 tulemusi, saame

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = \left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y, -\frac{4}{3}y - \frac{4}{3}z, -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}z\right).$$

Ülesanne 83 *Leida gradient kohavektorist.*

Lahendus. Kohavektor $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Vastavalt gradiendi definitsioonile

$$\mathrm{grad}\ \vec{r} = \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial x_i} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \mathbf{I}. \tag{3.22}$$

Ehk teisisõnu - kohavektori gradient on ühiktensor, millel on nullist erinevad komponendid vaid diagonaalil ja need on võrdsed ühega: $(\mathbf{I})_{ij} = \delta_{ij}$.

3.3 Tensorvälja gradient

Gradiendi mõiste saab üldistada ka tensorväljadele. Nii nagu skalaarvälja gradient on vektorväli ja vektorvälja gradient on 2. järku tensorväli, siis gradient n-järku tensorist on $n+1$-järku tensorväli:

$$\mathrm{grad}\ \mathbf{T}^{(n)} = \nabla \otimes \mathbf{T}^{(n)} = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{j_n}, \tag{3.23}$$

mille koordinaatideks on tensori $\mathbf{T}^{(n)}$ koordinaatide kõikvõimalikud osatuletised

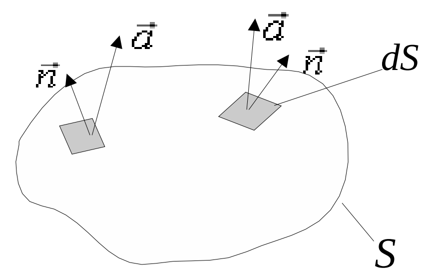
$$(\mathrm{grad}\ \mathbf{T}^{(n)})_{i j_1 j_2 \ldots j_n} = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{j_1 j_2 \ldots j_n}. \tag{3.24}$$

3.4 Vektorvälja voog. Pindintegraalid.

Olgu meil ruumis mingi pind S ning ruumis vektorväli $\vec{a}(M)$. Pinna S võime jagada pinnaelementideks dS, kusjuures eeldame, et igal pinnaelemendil on väli $\vec{a}(M)$ praktiliselt konstantne. Pinnaelementi võime iseloomustada vektoriga $d\vec{S} = \vec{n}\ dS$, kus $\vec{n}$ on pinnaelemendi normaali ühikvektor (vt joonis).

Vektorvälja $\vec{a}(M)$ vooks $d\phi(M)$ läbi punktis M asuva orienteeritud pinnaelemendi $d\vec{S} = dS\ \vec{n}$ nimetatakse väljavektori $\vec{a}(M)$ ja pinnaelemendi vektori $d\vec{S}(M)$ skalaarkorrutist

$$d\phi(M) = \vec{a}(M) d\vec{S}(M) = \vec{a}(M)\ \vec{n}\ dS. \tag{3.25}$$



Näiteks juhul, kui vektorväli kirjeldab kokkusurumatu vedeliku statsionaarset voolamist, st $\vec{a}(M)$ on vedeliku voolamiskiirus punktis M, siis kiirusvektori voog võrdub läbi selle pinnaelemendi voolanud vedeliku ruumalaga. Nt magnetvälja tugevuse voog jne.

Vektorvälja joonteks nim jooni, mille puutuja ühtib väljavektori suunaga. Väljajoonte võrrandiks on puutujavektori $\vec{ds}$ ja väljavektori $\vec{a}(M)$ paralleelsuse tingimus:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \tag{3.26}$$

Välja joonte mõistet kasutades võime öelda, et vektori voog $\phi(M)$ on võrdne pinnaelementi läbivate väljajoonte arvuga.

Ülesanne 84 *Leida väljajooned, kui* $\vec{a} = (x, 4y, 0)$.

Lahendus. Vastavalt valemile (3.26) on välja joonte võrrand:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{4y} = \frac{dz}{0}.$$

Siit saame, et $z = const$ (välja jooned paiknevad xy-tasapinnas). Teisalt saame $\ln x = \frac{1}{4}\ln y + \ln C$ ehk $x = C\sqrt[4]{y}$, kus C on integreerimiskonstant, antud juhul parameeter, mis iseloomustab konkreetset väljajoont.

Ülesanne 85 *Leida telgsümmeetrilise välja $\vec{a} = r^{-n}\vec{w} \times \vec{r}$, kus $\vec{w}$ on konstantne vektor, jooned.*

Lahendus. Olgu meil $\vec{w}$ suunatud x-telje suunas, st $\vec{w} = (w, 0, 0)$. $\vec{r} = (x, y, z)$. Siis

$$\vec{a} = \left(0, -\frac{wz}{r^n}, \frac{wy}{r^n}\right).$$

Välja joonte võrrand on siis

$$-\frac{r^n dy}{wz} = \frac{r^n dz}{wy}.$$

Saame

$$-\frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + \frac{C}{2} \qquad \text{ehk} \qquad \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = \mathrm{C},$$

mis on ringjoonte võrrand juhul, kui $C > 0$.

Vektori voog läbi kogu pinna S:

$$\Phi_S = \iint\limits_S \vec{a}(M) d\vec{S}(M) = \iint\limits_S a_n(M) dS(M), \tag{3.27}$$

kus a_n on vektori $\vec{a}$ projektsioon pinnanormaali $\vec{n}$ suunale.

3.5 Pindintegraalide arvutamine.

1. võimalus. Pinna S võrrand on antud ilmutatud kujul $z = z(x, y)$. Sel juhul

$$\iint\limits_S f(x, y, z) dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \frac{dS_{zy}}{\cos\gamma}, \tag{3.28}$$

kus S_{zy} on pinna S ja dS_{xy} pinnaelemendi dS projektsioon xy-tasandile ning γ on nurk pinna normaali ja z-telje vahel: $\cos\gamma = \vec{n}\vec{e}_z$. Eeldame, et pinnanormaal on suunatud z-koordinaadi kasvu suunas.
Üldjuhul, kui pind on antud võrrandiga $f = f(x, y, z)$, siis selle pinna normaali suunaline vektor on grad $f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$, st normaali võime kirjutada

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{3.29}$$

Kui pinnavõrrand on $z = z(x, y)$, ehk $z - z(x, y) = 0$ (vrdl. $f(x, y, z) = 0$), siis võime pinnanormaali ühikvektori esitada järgmiselt:

$$\vec{n} = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right),$$

ja seega saame valemist (3.28)

$$\iint\limits_S f(x, y, z) dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \tag{3.30}$$

Integraalide (3.27,3.28) korral on eeldatud, et z-teljega paralleelsed sirged lõikavad pinda S ülimalt üks kord, ehk teisiti, pinda määrav funktsioon $z(x,y)$ on ühene. Kui funktsioon $z(x,y)$ on mitmene, nagu näiteks kinnise integreerimispinna (sfääri) korral, siis tuleb integreerida eraldi üle selle funktsiooni üheste harude. Lihtsamal juhul tähendab see integreerimist üle kinnise pinna ülemise ja alumise poole. Peame vaid jälgima, et liikumisel pinna ülemiselt poolelt alumisele muutuks pinnanormaal pidevalt, st kui ülemisel poolel $\cos\gamma > 0$, siis alumisel $\cos\gamma < 0$.

Ülesanne 86 *Leida integraal*

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dx\ dy,$$

kus D on piirkond $x^2+y^2<a^2$, $a<1$.

Lahendus.

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dx\ dy = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx\ dy.$$

Läheme üle polaarkoordinaatidele:

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi,$$
$$x^2+y^2=\rho^2, \qquad dx\ dy=\rho\ d\rho\ d\varphi,$$

kus ρ on polaarkaugus ja φ polaarnurk. Sel juhul saame

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dx\ dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\Big(\int\limits_0^a \sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho\Big) = -\frac{2\pi}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{2\pi}{3}\Big(1-\sqrt{(1-a^2)^3}\Big).$$

Ülesanne 87 *Leida pindintegraal $\iint\limits_S xdS$ kus S on sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ ülemine pool.*

Lahendus. Lähtume valemist (3.30). $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, D on sfääri projektsioon xy-tasandile ehk piirkond, kus $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Saame

$$\iint\limits_S xdS = \iint\limits_D x\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy = a\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Minnes üle polaarkoordinaatidele, leiame

$$\iint\limits_S xdS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a \frac{\rho\cos\varphi\ d\rho\ d\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi\Big(\int\limits_0^a \frac{\rho\ d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\Big).$$

Kuivõrd $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi = \sin\varphi|_0^{2\pi} = 0$, siis ka $\iint\limits_S xdS = 0$.

Ülesanne 88 *Tuletada valem vektori voo arvutamiseks:*

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \vec{a}\,d\vec{S} &= \iint\limits_{S_{yz}} a_x(x(y,z),y,z)\,dy\,dz + \iint\limits_{S_{zx}} a_y(x,y(x,z),z)\,dx\,dz + \\ &+ \iint\limits_{S_{xy}} a_z(x,y,z(x,y))\,dx\,dy, \end{aligned} \tag{3.31}$$

kus S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} on pinna S projektsioonid vastavatele koordinaattasanditele; $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ - pinna S võrrandi alternatiivkujud.

Lahendus. Kirjutame $\iint\limits_S \vec{a}d\vec{S}$ lahti (skalaarkorrutis):

$$\iint\limits_S \vec{a}d\vec{S} = \iint\limits_S \vec{a}\vec{n}\; dS = \iint\limits_S (a_x(x,y,z)\cos\alpha + a_y(x,y,z)\cos\beta + a_z(x,y,z)\cos\gamma)dS,$$

kus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ on $\vec{n}$ suunakoosinused. Arvestades nüüd, et me võime avaldada $a_x(x,y,z) = a(x(y,z),y,z)$, analoogiliselt ka $a_y(x,y,x)$ ja $a_z(x,y,x)$ ning et $dS\cos\alpha = dy\; dz$, $dS\cos\beta = dx\; dz$, $dS\cos\gamma = dx\; dy$, siis saamegi

$$\iint\limits_S \vec{a}d\vec{S} = \iint\limits_{S_{yz}} a_x(x(y,z),y,z)\,dy\,dz + \iint\limits_{S_{zx}} a_y(x,y(x,z),z)\,dx\,dz + \iint\limits_{S_{xy}} a_z(x,y,z(x,y))\,dx\,dy.$$

2. võimalus. Pinna S võrrand on esitatud parameetrilisel kujul

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v).$$

ja pinnale S vastab parameetrite u, v muutumispiirkond Δ. Siis

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_\Delta f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG - F^2}du\,dv, \tag{3.32}$$

kus

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

ja

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Seega taandub pindintegraalide arvutamine mõlemal juhul kahekordsetele integraalidele (3.30) või (3.32), st integraalidele

$$\iint\limits_D F(x,y)dx\,dy.$$

Muutujate vahetus kahekordses integraalis. Kui funktsioonid $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ on koos oma 1. järku osatuletistega pidevad mingis uv-tasandi kinnises piirkonnas D' ja määravad üksühese vastavuse piirkonna D' ja xy-tasandi piirkonna D vahel, siis

$$\iint_D F(x,y)dx\,dy = \iint_{D'} F\left[x(u,v),\ y(u,v)\right]|J|du\,dv, \tag{3.33}$$

kus jakobiaan

$$J = \frac{D(x,y)}{D(x,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{3.34}$$

Tingimus $J \neq 0$, kui $(u, v) \in D'$ kindlustab üksühese vastavuse piirkondade D ja D' punktide vahel. Muutujate vahetuse tuntuimaks erijuhuks on üleminek tasandilistele polaarkoordinaatidele ϱ, φ: $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, sel juhul $J = \varrho$.

3.6 Vektorvälja divergents.

Olgu meil nüüd pind S kinnine. Siis vektori $\vec{a}$ voog läbi kinnise pinna S iseloomustab pinnaga S piiratud ruumiosas asuvaid allikaid, annab nende summaarse intensiivsuse. Selle voo jagatis selle ruumiosa ruumalaga V annab allikate tiheduse (keskmise intensiivsuse). Kui $V \to 0$, saame allikate tiheduse punktis M, mida nimetatakse **vektorvälja divergentsiks punktis** M.

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{V\to 0\\ M\in V}} \frac{1}{V} \oint\!\!\!\oint_S \vec{a}d\vec{S}. \tag{3.35}$$

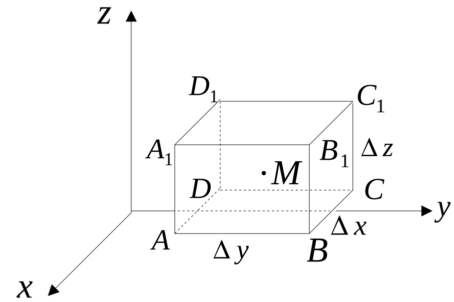
Vektorvälja divergents ei tohi sõltuda sellest, kuidas piirväärtus võetakse, st sellest, kuidas me valime kokkutõmbuva ruumala V rajapinna. See tingimus on täidetud vaid pidevate diferentseeruvate vektorväljade korral.

Ülesanne 89 *Arvutada vektori* $\vec{a} = (4xz, -y^2, yx)$ *voog läbi kuubi, mille tahkudeks on tasandid* $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2$, *külgpindade.*

Lahendus. Tuleb leida pindintegraal läbi kinnise pinna

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\!\oint_S \vec{a}d\vec{S} &= \int_0^2\int_0^2 a_x(2,y,z)dydz - \int_0^2\int_0^2 a_x(0,y,z)dydz + \int_0^2\int_0^2 a_y(x,2,z)dxdz - \\
&- \int_0^2\int_0^2 a_y(x,0,z)dydz + \int_0^2\int_0^2 a_z(x,y,2)dxdy - \int_0^2\int_0^2 a_z(x,y,0)dxdy = \\
&= \int_0^2\int_0^2 8zdydz - \int_0^2\int_0^2 4dxdz + \int_0^2\int_0^2 yxdxdy - \int_0^2\int_0^2 yxdxdy = \\
&= \int_0^2 (8zy\Big|_0^2)dz - 4\int_0^2 x\Big|_0^2 dy = 8z^2\Big|_0^2 - 8y\Big|_0^2 = 16.
\end{aligned}$$

Leiame nüüd divergentsi arvutusvalemi ristkoordinaatides (ON baasis). Lihtsuse mõttes valime ruumiosaks punkti M ümbritseva risttahuka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ nii, et M asuks risttahuka tsentris. Tähistame $\Delta z := AA_1$, $\Delta y := AB$, $\Delta x := AD$. Vektorvälja voog läbi risttahuka külgpinna S:



$$\Delta\phi = \oiint\limits_S \vec{a}d\vec{S} = \iint\limits_{AA_1B_1B} \vec{a}d\vec{S} + \iint\limits_{DD_1C_1C} \vec{a}d\vec{S} + \iint\limits_{BB_1C_1C} \vec{a}d\vec{S} + \iint\limits_{AA_1D_1D} \vec{a}d\vec{S} + \iint\limits_{A_1B_1C_1D_1} \vec{a}d\vec{S} + \iint\limits_{ABCD} \vec{a}d\vec{S} =$$

$$= \iint\limits_{AA_1B_1B} a_x dS_{yz} - \iint\limits_{DD_1C_1C} a_x dS_{yz} + \iint\limits_{BB_1C_1C} a_y dS_{zx} - \iint\limits_{AA_1D_1D} a_y dS_{zx} + \iint\limits_{A_1B_1C_1D_1} a_z dS_{xy} - \iint\limits_{ABCD} a_z dS_{xy}.$$

Vaatame lähemalt kahte esimest integraali - leiame vektorvälja $\vec{a}$ voo läbi yz-tasandiga paralleelsete pidade.

$$\Delta\phi_x = \int\limits_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} \int\limits_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} \left[a_x\left(x+\frac{\Delta x}{2},\eta,\xi\right) - a_x\left(x-\frac{\Delta x}{2},\eta,\xi\right)\right] d\eta d\xi. \tag{3.36}$$

Kasutades nüüd matemaatilise analüüsi keskväärtusteoreemi (Lagrange'i teoreem):

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(x_1)(x_2 - x_0), \qquad \text{kus } \ x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2,$$

siis arvestades, et $x - \frac{\Delta x}{2} < x_1 < x + \frac{\Delta x}{2}$, saame võrdusest (3.36)

$$\Delta\phi_x = \int\limits_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} \int\limits_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} \frac{\partial}{\partial x} a_x(x_1,\eta,\xi)\Delta x d\eta d\xi. \tag{3.37}$$

Rakendades nüüd η ja ξ jaoks keskväärtusteoreemi

$$\int\limits_{y_0}^{y_2} f(\eta)d\eta = f(y_1)(y_2 - y_0), \qquad \text{kus } \ y_0 \leqslant y_1 \leqslant y_2$$

ja arvestades, et $y - \frac{\Delta y}{2} < y_1 < y + \frac{\Delta y}{2}$, $z - \frac{\Delta z}{2} < z_1 < z + \frac{\Delta z}{2}$, saame

$$\Delta\phi_x = \frac{\partial}{\partial x}(x_1, y_1, z_1)\Delta x\Delta y\Delta z. \tag{3.38}$$

Analoogiliselt

$$\Delta\phi_y = \frac{\partial}{\partial y}(x_2, y_2, z_2)\Delta x\Delta y\Delta z. \tag{3.39}$$

$$\Delta\phi_z = \frac{\partial}{\partial z}(x_3, y_3, z_3)\Delta x\Delta y\Delta z. \tag{3.40}$$

Et võrduses (3.35) $V = \Delta x \Delta y \Delta z$, siis minnes piirile $V \to 0$, siis ka $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \to M$ ja kokkuvõttes oleme saanud

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{\partial}{\partial x} a_x(M) + \frac{\partial}{\partial y} a_y(M) + \frac{\partial}{\partial z} a_z(M) = \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(M) = \nabla \vec{a} = \text{Tr grad } \vec{a}. \quad (3.41)$$

Nagu näha, on vektorvälja divergents operaator, mis seab vektorväljale vastavusse skalaarvälja, st teisendus $V^3 \to \mathcal{R}$.

Ülesanne 90 *Arvutada* div $\vec{a}$, *kui 1)* $\vec{a} = (x^2 + y^2 + z^2)$, *2)* $\vec{a} = (2xy, -y^2, x^2 + y^2)$.

Lahendus.

$$1) \qquad \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = 2x + 2y + 2z;$$

$$2) \qquad \text{div } \vec{a} = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} - \frac{\partial (y^2)}{\partial y} + \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial z} = 2y - 2y = 0.$$

Ülesanne 91 *Leida* div $(u(M)\, \vec{a}(M))$, div $\vec{a}(u(M))$ *ja* div grad $u(M)$, *kus* $\vec{a}$ *on suvaline vektorväli ja* $u(M)$ *skalaarväli.*

Lahendus.

$$\text{div } (u\vec{a}) = \nabla_i (u a_i) = u \ \nabla_i a_i + a_i \ \nabla_i u = u \text{ div } a + a_i \ (\text{grad } u)_i = u \text{ div } a + \vec{a} \text{ grad } u.$$

Teisel juhul kasutame liitfunktsiooni tuletist.

$$\text{div } \vec{a}(u) = \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(u) = \frac{d a_i}{du} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{d\vec{a}}{du} \text{grad } u$$

$$\text{div grad } u(M) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Ülesanne 92 *Arvutada* div $\vec{r}$ *ja* div $(\vec{a} \times \vec{r})$, *kus* $\vec{r}$ *on kohavektor ja* $\vec{a}$ *on konstantne vektor.*

Lahendus. Divergents kohavektorist:

$$\text{div } \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x_i} x_i = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} x_i = \delta_{ii} = 3.$$

Divergents vektorkorrutisest

$$\text{div } (\vec{a} \times \vec{r}) = \text{div } (\varepsilon_{ijk} \vec{e}_i a_j x_k) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{ijk} a_j x_k) = \varepsilon_{ijk} a_j \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} a_j \delta_{ik} = \varepsilon_{iji} a_j = 0.$$

Kui vektorvälja $\vec{a}$ divergents mingis piirkonnas D on null, siis öeldakse, et vektorväli on selles piirkonnas D **allikavaba**. Niisiis, **väli $\vec{a}$ on piirkonnas D allikavaba, kui**

$$\text{div } \vec{a}(M) = 0 \qquad \forall \quad M \in D. \qquad (3.42)$$

3.7 Gaussi (Gaussi-Green'i-Ostrogradski) divergentsiteoreem.

Teoreem: **vektori $\vec{a}$ voog läbi kinnise pinna S võrdub selle vektorvälja allikate kogu intensiivsusega (allikate koguhulgaga) pinnaga S piiratud ruumalas V,**

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{a}\, d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\, \vec{a}\, dV. \tag{3.43}$$

Selleks, et eksisteeriks div $\vec{a}$, peab $\vec{a}$ olema piirkonnas V diferentseeruv ning rajapinnal S peab vektori $\vec{a}$ normaalkomponent $a_n = \vec{a}\vec{n}$ olema integreeruv.

Tõestame teoreemi. Selleks jagame piirkonna V n väikeseks osaks ΔV_k, $k = 1, \ldots, n$, mida piiravad pinnad ΔS_k. Divergentsi definitsioonvalemist

$$\operatorname{div}\, \vec{a}(M) = \lim_{\substack{V\to 0\\ M\in V}} \frac{1}{V} \oint\!\!\!\oint_S \vec{a} d\vec{S}$$

saame

$$\oint\!\!\!\oint_{\Delta S_k} \vec{a}\, d\vec{S} = (\operatorname{div}\vec{a}(M_k) + \varepsilon_k)\, \Delta V_k,$$

kus ε_k on väike parandusliige, $\varepsilon_k \to 0$, kui $\Delta V_k \to 0$ ja M_k on ruumala ΔV_k suvaline sisepunkt. Järelikult

$$\sum_{k=1}^{n} \oint\!\!\!\oint_{\Delta S_k} \vec{a}\, d\vec{S} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{div}\vec{a}(M_k)\Delta V_k + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta V_k. \tag{3.44}$$

Pindade ΔS_k välistükkidest moodustub piirkonna V välispind S, kuid ülejäänud pinnatükid jäävad piirkonna sisse, eraldades kahte naaberpinda. Üle selliste pinnatükkide tuleb võrduse (3.44) vasakpoolses summas integreerida kaks korda ja paarikaupa need integraalid koonduvad, sest välisnormaalide suunad on neis integraalides vastupidised. Nii jääb võrduses (3.44) vasakule integraal üle välispinna S.

$$\sum_{k=1}^{n} \oint\!\!\!\oint_{\Delta S_k} \vec{a}\, d\vec{S} = \oint\!\!\!\oint_S \vec{a}\, d\vec{S}. \tag{3.45}$$

Piirprotsessis $\Delta V_k \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{div}\, \vec{a}(M_k)\Delta V_k = \iiint_V \operatorname{div}\, \vec{a}\, dV. \tag{3.46}$$

Näitame nüüd, et

$$\lim_{n\to\infty} \sum \varepsilon_k \Delta V_k = 0.$$

Hindame selleks summa absoluutväärtust

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta V_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k| \Delta V_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_n \Delta V_k = \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \Delta V_n = \alpha_n V,$$

kus α_n on max $|\varepsilon_k|$. Kuna $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, siis on see võrdus ja seega ka teoreem tõestatud.

Integreerimispiirkond S Gaussi teoreemis võib olla ka mitmeli sidus, st selle rajapind S võib koosneda mitmest eraldi olevast kinnisest pinnast; ainult rajapinna normaal peab alati olema suunatud piirkonnast V välja. Rajapind S peab olema vähemalt tükati sile, st ta võib koosneda lõplikust hulgast siledadest pinnatükkidest.

Ülesanne 93 *Arvutada Gaussi divergentsiteoreemi abil vektori* $\vec{a} = (4xz, -y^2, yx)$ *voog läbi kuubi, mille tahkudeks on tasandid* $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2$, *külgpindade.*

Lahendus. Tähistame ühikkuubi ruumala V-ga. $\operatorname{div} \vec{a} = 4z - 2y$.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{a}\, dV = \int\limits_0^2 \int\limits_0^2 \int\limits_0^2 (4z - 2y)\, dx\, dy\, dz = 2 \int\limits_0^2 \int\limits_0^2 (4z - 2y) dy\, dz = \\
&= 2 \int\limits_0^2 (4zy - y^2)\Big|_0^2 dz = 2 \int\limits_0^2 (8z - 4) dz == 2(4z^2 - 4z)\Big|_0^2 = 16.
\end{aligned}$$

Ülesanne 94 *Arvutada Gaussi teoreemi abil vektori* $\vec{a} = (x, y, xyz)$ *voog läbi pinna* S, *kui* S *on silinder, mille külje võrrand on* $x^2 + y^2 = 2$, *põhjadeks tasandid* $z = 0$, $z = 2$.

Lahendus.

$$\operatorname{div} \vec{a} = 1 + 1 + xy = 2 + xy.$$

Kolmekordse integraali võtmiseks läheme üle silindrilistesse koordinaatidesse:

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi, \qquad z = z, \qquad dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iiint\limits_V \operatorname{div} a dV = \int\limits_0^2 dz \Big[\int\limits_0^2 \rho d\rho \Big[\int\limits_0^{2\pi} (2 + \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi \Big] \Big] = \\
&= \int\limits_0^2 dz \Big[\int\limits_0^2 \rho d\rho \Big(2\varphi + \rho^2 \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big) \Big|_0^{2\pi} \Big] = 4\pi \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^2 \rho d\rho = 8\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 = 16\pi.
\end{aligned}$$

3.8 Järeldusi Gaussi divergentsiteoreemist.

1. Piirkonnas D, kus vektorväli $\vec{a}(M)$ on allikavaba, on vektori voog läbi iga kinnise pinna S null

$$\oiint\limits_S \vec{a}\, d\vec{S} = 0, \tag{3.47}$$

kui pind S asub piirkonnas D, kus $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$.

2. Punkti P nimetatakse vektorvälja $\vec{a}(M)$ **isoleeritud allikaks** (või neelukohaks), kui leidub selline punkti P ümbrus, milles väli on allikavaba ($\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$), kuid $\vec{a}$ voog läbi punkti P ümbritseva kuitahes väikese pinna erineb nullist.

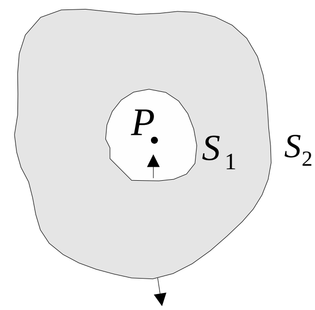
Olgu meil nüüd vektorväli $\vec{a}$ piirkonnas D allikavaba, välja arvatud isoleeritud allikas või neelukoht punktis P. Näitame, et sel juhul ei sõltu vektori $\vec{a}$ voog läbi punkti P ümbritseva kinnise pinna, mis asub piirkonnas D selle pinna valikust,

$$\oiint\limits_{S_1} \vec{a}\, d\vec{S} = \oiint\limits_{S_2} \vec{a}\, d\vec{S}. \tag{3.48}$$

Selleks näitamiseks rakendame Gaussi teoreemi

$$\oiint\limits_{S} \vec{a}\; d\vec{S} = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\; \vec{a}\, dV$$

kaheli sidusale piirkonnale V, mida ümbritsevad punkti P ümbritsevad kinnised pinnad S_1 ja S_2.



Et piirkond V on allikavaba, siis

$$\oiint\limits_{S_1+S_2} \vec{a}\, d\vec{S} = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\; \vec{a}\, dV = 0. \tag{3.49}$$

Nüüd arvestame, et valemis (3.49) on vektor $d\vec{S} = \vec{n}\; dS$ suunatud piirkonna V välisnormaali suunas (vt joonis). Valemi (3.48) vasakpoolses integraalis on $d\vec{S}$ suunatud pinna S_1 välisnormaali suunas, st valemites (3.48) ja (3.49) on pinna S_1 normaalid vastassuunalised. Siit järeldubki valemi (3.48) kehtivus.

Ülesanne 95 *Leida punktlaengu q elektrivälja tugevuse voog läbi laengut ümbritseva pinna.*

Lahendus. Olgu meil punktlaeng punktis $P = P(x_0, y_0, z_0)$. Punktlaengu q elektrivälja tugevus mingis suvalises väljapunktis $M = M(x, y, z)$ on ristkoordinaatides määratud järgmise valemiga

$$\vec{E}(M) = \frac{q\vec{r}_{PM}}{4\pi r_{PM}^3} = \frac{q}{4\pi\left[(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,(x-x_o,\; y-y_o,\; z-z_o)\,. \tag{3.50}$$

Näitame esmalt, et $\mathrm{div}\;\vec{E} = 0$ kõikjal peale punkti M.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\;\vec{E} &= \frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-x_0)}{2r^5}2(x-x_0) + \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-y_0)^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}\right) = \\ &= \frac{q}{4\pi}\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3}\right) = 0.\end{aligned}$$

Allikapunkt P on välja singulaarsuseks: seal saavad lõpmatuks nii väljavektori absoluutväärtus kui ka selle koordinaadid (vähemalt üks koordinaatidest); seetõttu pole seal ka vektori koordinaadid diferentseeruvad.
Määrame vektorvälja $\vec{E}$ voo läbi sfääri $S_{r_0}^P$ tsentriga punktis P ja raadiusega r_0. Üle sfääri pinna integreerimisel võime kasutada parameetrilist integreerimist (3.32), kus

$$x = x_0 + r_0 \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad y = y_0 + r_0 \sin\vartheta \sin\varphi \qquad z = z_0 + r_0 \cos\varphi$$

Siis

$$\sqrt{EQ - F^2} = r_0^2 \sin\vartheta, \quad du = d\vartheta, \quad dv = d\varphi, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Vektorvälja voo jaoks saame siis

$$\phi_{\vec{E}} = \oiint\limits_{S_{r_0}^P} \frac{q}{4\pi r_0^2} \vec{e}_r \, d\vec{S} = \frac{q}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = q \neq 0. \tag{3.51}$$

Nagu näha, voog $\phi_{\vec{E}}$ ei sõltu sfääri raadiusest r_0 ja on valemi (3.48) kohaselt sama ka läbi suvalise pinna, mis ümbritseb punkti P.
Analoogiliselt divergentsile on lineaarne ka vektori voog, seetõttu punktlaengute staatilise süsteemi elektrivektori (elektrivälja tugevuse vektori) voog läbi kinnise pinna võrdub selle pinna poolt piiratud ruumalas asuva kogulaenguga, st kui

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_{P_iM}^3} \vec{r}_{P_iM} \quad , \text{ siis} \quad \oiint\limits_{S} \vec{E}(M) \, d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i = Q, \tag{3.52}$$

(kõik allikapunktid P_i asuvad kinnise pinna S sees). Valem (3.52) annab diveregentsteoreemi Gaussi erikuju.

3. Vektorvälja, mille vektorid on paralleelsed mingi kindla tasandiga ja ei muutu selle tasandi normaali sihis, nimetatakse **tasandiliseks**. Kui välja tasand on valitud xy-tasandiks, siis tasandiline vektorväli on määratud kahe kahemuutuja funktsiooniga

$$\vec{a} = a_x(x, y)\vec{e}_x + a_y(x, y)\vec{e}_y. \tag{3.53}$$

Tasandilise vektorvälja korral muutub integraalteoreemis integraalide kordsus ühe võrra väiksemaks:

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{a}\vec{n} \, ds = \iint\limits_{S} \operatorname{div} \vec{a} \, dS, \tag{3.54}$$

kus $\operatorname{div} \vec{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y}$ ja γ on kinnine kõver, mis piirab xy-tasandi pinnatükki S, $\vec{n}$ selle kõvera ühiknormaal. Tõestuseks rakendame valemit (3.46) püstsilindrile, mille põhjaks on kõveraga γ piiratud xy-tasandi pinnatükk S, silindri kõrgus olgu h. Tasandilise vektorvälja voog läbi silindri põhjade on null (sest $a_z = 0$), z-telje sihis ei muutu ka vektori $\vec{a}$ koordinaadid, seega pidades silmas, et silindri külgpinnal $d\vec{S} = \vec{n} \, ds \, dz$ ja $dV = dS \, dz$, saame

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{V} \operatorname{div} \, \vec{a} \, dV &= \int\limits_0^h dz \iint\limits_{S} \operatorname{div} \vec{a} \, dS = h \iint\limits_{S} \operatorname{div} \, \vec{a} \, dS, \\
\oiint\limits_{S} \vec{a} \, d\vec{S} &= \int\limits_0^h \oint\limits_{\gamma} \vec{a}\vec{n} \, ds \, dz = h \oint\limits_{\gamma} \vec{a}\vec{n} \, ds,
\end{aligned}$$

mis on samaväärne valemiga (3.54).

3.9 Vektorvälja tsirkulatsioon.

Ülesanne 96 *Leida jõuvälja $\vec{F}(M) = (x^2+2y)\vec{e}_x + (y^2+2x)\vec{e}_y$ töö rakenduspunkti liikumisel mööda kõverat γ punktist $P_1 = (-4,0)$ punkti $P_2 = (0,2)$, kui γ on antud võrrandiga $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$.*

Lahendus. Jõuvälja töö on leitav järgmise integraaliga: $A = \int\limits_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{s}$. St, tegemist on joonintegraaliga. Üldjuhul käib joonintegraali leidmine järgmiselt. Olgu meil joon γ antud parameetrilisel kujul $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \xi(t)$ ning punktidele P_1 ja P_2 vastavad parameetri väärtused vastavalt α ja β. Siis

$$\int\limits_{\gamma} \vec{F}(x,y,z)d\vec{s} = \int\limits_{P_1}^{P_2} (F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)dz) =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [F_x(\phi(t),\psi(t),\xi(t))\phi'(t) + F_y(\phi(t),\psi(t),\xi(t))\psi'(t) + F_z(\phi(t),\psi(t),\xi(t))\xi'(t)]\,dt.$$

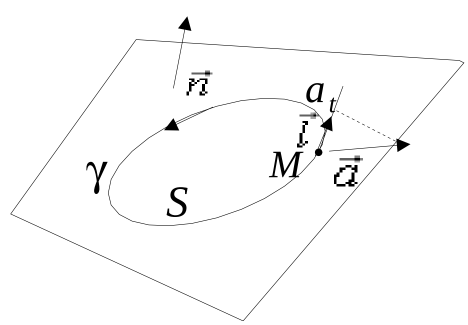
Antud juhul on meil antud joon xy-tasandil. Me võime võtta parameetriks $t = x$. Siis $\phi(x) = x$, $\psi(x) = 2 - \dfrac{x^2}{8}$, $z = 0$. $x'_x = 1$, $y'_x = -\dfrac{x}{4}$. Saame

$$A = \int\limits_{-4}^{0} \left[\left(x^2 + 4 - \frac{x^2}{4}\right) + \left(4 + \frac{x^4}{64} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\left(-\frac{x}{4}\right)\right] dx = \frac{128}{3}.$$

Vektorvälja $\vec{a}(M)$ **tsirkulatsiooniks** nimetatakse joonintegraali

$$A = \oint\limits_{\gamma} \vec{a}\, d\vec{l} \equiv \oint\limits_{\gamma} a_t\, dl = \oint\limits_{\gamma} (a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz), \tag{3.55}$$

kus γ on kinnine kõver ja a_t vektori $\vec{a}$ projektsioon temale (tangentsiaalkoordinaat): $a_t = \vec{a}\vec{l}$ ($\vec{l}$ - puutuja ühikvektor). Paremorienteeritud süsteemis on positiivne ümberkäigu suund mööda kõverat γ selline, et sisepiirkond jääks vasakule, st liikumine toimub vastupidi kellaosuti suunale. Seejuures on eeldatud, et kõveraga γ piiratud pinnatükk S on orienteeritud: ümberkäigu püstiasend ühtib pinnanormaali suunaga, kellaosuti reegli rakendamisel on vaatesuund vastupidine pinnanormaali suunale.



Ülesanne 97 *Arvutada vektorvälja $\vec{a} = (y, -x, z^2)$ tsirkulatsioon mööda kinnist kõverat γ, kusjuures ümberkäigu suund ühtib parameetri t kasvu suunaga. γ on antud parameetrilisel kujul:*

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \quad z = \sin t.$$

Lahendus. Ilmselt $t \in [0, 2\pi]$. $x'(t) = y'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$, $z'(t) = \cos t$. Saame

$$\begin{aligned} A &= \oint_\gamma (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \\ &+ \sin^2 t\cos t\Big) = \frac{\sin^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Nullist erinev tsirkulatsioon osutab välja pööriselisele iseloomule ehk kinniste väljajoonte olemasolule. Mööda kinnist väljajoont on tsirkulatsioon positiivne, kui positiivses suunas liikumisel ühtib puutuja suund väljavektori suunaga; vastupidisel juhul on tsirkulatsioon negatiivne.

3.10 Vektorvälja rootor

Tsirkulatsioon sõltub nii tasandilise kontuuri γ orientatsioonist kui ka tema poolt piiratud pindalast. Suvalise vektorvälja $\vec{a}(M)$ tsirkulatsiooni intensiivsust mingis punktis M iseloomustab selle **vektorvälja rootor** rot $\vec{a}$. (Kasutatakse ka sümbolit curl $\vec{a}$). Rootor on vektor, mille projektsioon suvalisele vektorile $\vec{m}$ ($\mathrm{rot}_m \vec{a}(M)$) määratakse piirprotsessiga

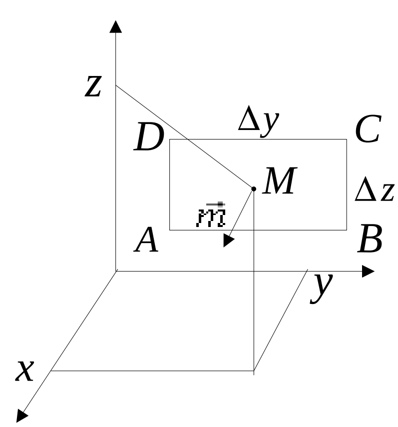
$$\mathrm{rot}\,_m\vec{a}(M) = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ M \in \Delta S}} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta\gamma} \vec{a}\,d\vec{l}, \tag{3.56}$$

kus ΔS on punktiks M kokkutõmbuva tasandilise kontuuri poolt piiratud pindala, $\vec{m}$ on kontuuri tasandi normaal, mille suund on seotud positiivse ümberkäigu suunaga joonintegraalis. Ka siin eeldame, et vektorväli $\vec{a}$ on pidev ja diferentseeruv. See tingimus kindlustab piirväärtuse sõltumatuse punktiks M kokkutõmbuva kontuuri $\Delta\gamma$ kujust.

Ülesanne 98 *Leida vektorvälja rootori* rot $\vec{a}(M)$ *kuju ristkoordinaatides.*

Descartes'i ristkoordinaatides määravad rootorvektori tema projektsioonid koordinaattelgedele. Leiame projektsiooni rot $_x\vec{a}(M)$. Lihtsuse mõttes valime kontuuriks ristküliku tippudega $ABCD$. Olgu punkt $M = (x, y, z)$, ristküliku külgede pikkused olgu Δy, Δz. Siis

$$\begin{aligned} A &= \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2}\right), \\ B &= \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z - \frac{\Delta z}{2}\right), \\ C &= \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}\right), \\ D &= \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}\right). \end{aligned}$$



Ristküliku pindala $\Delta S = \Delta y \Delta z$, ümberkäigu $ABCDA$ korral on pinnanormaal suunatud piki x-telge.

$$\begin{aligned}
\Delta A = \oint\limits_{ABCDA} \vec{a}\, d\vec{l} &= \int\limits_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} a_y(x, \eta, z - \frac{\Delta z}{2}) d\eta + \int\limits_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} a_z(x, y + \frac{\Delta y}{2}, \zeta) d\zeta + \\
&+ \int\limits_{y+\frac{\Delta y}{2}}^{y-\frac{\Delta y}{2}} a_y(x, \eta, z + \frac{\Delta z}{2}) d\eta + \int\limits_{z+\frac{\Delta z}{2}}^{z-\frac{\Delta z}{2}} a_z(x, y - \frac{\Delta y}{2}, \zeta) d\zeta = \\
&= \int\limits_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} \left[a_y\left(x, \eta, z - \frac{\Delta z}{2}\right) - a_y\left(x, \eta, z + \frac{\Delta z}{2}\right) \right] d\eta + \\
&+ \int\limits_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} \left[a_z\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, \zeta\right) - a_z\left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, \zeta\right) \right] d\zeta.
\end{aligned}$$

Kasutades nüüd Lagrange'i keskväärtusteoreemi (vt ka ül. 89), saame

$$\Delta A = - \int\limits_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} \Delta z \frac{\partial}{\partial z} a_y(x, \eta, z_1) d\eta + \int\limits_{z-\frac{\Delta z}{2}}^{z+\frac{\Delta z}{2}} \Delta y \frac{\partial}{\partial y} a_z(x, y_1, \xi) d\zeta.$$

Integraalarvutuse keskväärtusteoreemi abil saame sellest

$$\Delta A = \left[\frac{\partial}{\partial y} a_z(x, y_1, z_2) - \frac{\partial}{\partial z} a_y(x, y_2, z_1) \right] \Delta y \Delta z,$$

kus $y - \dfrac{\Delta y}{2} < y_1, y_2 < y + \dfrac{\Delta y}{2}$ ja $z - \dfrac{\Delta z}{2} < z_1, z_2 < z + \dfrac{\Delta z}{2}$.
Arvestades, et $\Delta S = \Delta y \Delta z$, siis piirprotsessil $\Delta S \to 0$, $(\Delta x \to 0,\ \Delta z \to 0)$ punktid $M(x, y_1, z_2), M(x, y_2, z_1) \to M(x, y, z)$ ning

$$\mathrm{rot}\ _x\vec{a}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} a_z(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} a_y(x, y, z). \tag{3.57}$$

Analoogiliselt on leitavad ka ülejäänud projektsioonid.

$$\mathrm{rot}\ _y\vec{a} = \frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z, \tag{3.58}$$

$$\mathrm{rot}\ _z\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x. \tag{3.59}$$

Vektorvälja $\vec{a}$ rootori võime seega kirjutada järgmiselt:

$$\mathrm{rot}\ \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial y} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_y \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x \right) \vec{e}_z = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} a_k. \tag{3.60}$$

Rootori projektsiooni võib Levi-Civita pseudotensori abil kirjutada siis järgmiselt:

$$\text{rot }_i\vec{a} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}a_k. \tag{3.61}$$

Vektorvälja rootor Levi-Civita pseudotensori ning nablaoperaatori abil:

$$\text{rot } \vec{a} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}a_k = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{3.62}$$

Rootor on tõlgendatav pseudovektorina (võrdle vektorkorrutisega), mis on Levi-Cevita pseudotensori abil vastavusse seatud vektori gradiendi antisümmeetrilisele osale. Viimasel on 3 sõltumatut koordinaati

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}a_j - \frac{\partial}{\partial x_j}a_i\right) = a_{[ij]} \qquad \text{rot }_i\vec{a} = \varepsilon_{ijk}a_{[jk]} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}a_k.$$

Rootori operatsioon on lineaarne:

$$\text{rot }(\vec{a}+\vec{b}) = \text{rot } \vec{a} + \text{rot } \vec{b} \qquad \text{ja} \qquad \text{rot }(\alpha\vec{a}) = \alpha\,\text{rot } \vec{a} \quad (\alpha = \text{const}). \tag{3.63}$$

Ülesanne 99 *Arvutada* rot $\vec{a}$, *kui 1)* $\vec{a} = (x^2+y^2, y^2+z^2, x^2+z^2)$, *2)* $\vec{a} = \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{r})$, *3)* $\vec{a} = (\vec{b}\vec{r})^2\vec{r}$, *kus* $\vec{b}$ *ja* $\vec{c}$ *on konstantsed vektorid,* $\vec{r}$ *on kohavektor.*

Lahendus. 1) rot $\vec{a} = -2z\vec{e}_x - 2x\vec{e}_y - 2y\vec{e}_z$.

2) rot $\vec{a} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}a_k$. Arvestame, et

$$a_k = [\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{r})]_k = \varepsilon_{klm}b_l(\vec{c}\times\vec{r})_m = \varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp}b_lc_nx_p = c_kb_lx_l - x_kb_lc_l.$$

Siis saame

$$\text{rot } \vec{a} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(c_kb_lx_l - x_kb_lc_l) = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_ic_kb_l\delta_{jl} - \varepsilon_{ijk}\vec{e}_ib_lc_l\delta_{jk} = \varepsilon_{ijk}e_ib_jc_k = \vec{b}\times\vec{c}.$$

$$\begin{aligned} 3) \qquad \text{rot } \vec{a} &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(b_lx_lb_mx_mx_k) = 2\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i(b_l\delta_{jl}b_mx_mx_k) + \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i(\vec{b}\vec{c})^2\delta_{jk} = \\ &= 2\varepsilon_{ijk}\vec{e}_ib_jx_k\vec{b}\vec{r} = 2(\vec{b}\vec{r})(\vec{b}\times\vec{r}). \end{aligned}$$

Ülesanne 100 *Leida* rot $(u\vec{a})$ *ja* rot $\vec{a}(u)$, *kus* $u(M)$ *on skalaarväli.*

Lahendus.

$$\begin{aligned} 1) \qquad \text{rot } u\vec{a} &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(ua_k) = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_ia_k\frac{\partial u}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}a_k = \\ &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i(\text{grad } u)_ka_k + u\,\text{rot } \vec{a} = \text{grad } u\times\vec{a} + u\,\text{rot } \vec{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \qquad \text{rot } \vec{a}(u) &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(a_k(u)) = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{da_k}{du} = \varepsilon_{ijk}(\text{grad } u)_j\frac{da_k}{du} = \\ &= \text{grad } u\times\frac{d\vec{a}}{du} = -\frac{d\vec{a}}{du}\times\text{grad } u. \end{aligned}$$

3.11 Stokes'i teoreem.

Teoreem: **vektori $\vec{a}$ tsirkulatsioon mööda kinnist kõverat γ võrdub selle vektori rootori** (rot $\vec{a}$) **vooga läbi suvalise pinna S, mis läbib kõverat** γ:

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{a}\, d\vec{l} = \iint\limits_{S} \text{rot } \vec{a}\, d\vec{S}. \tag{3.64}$$

Vektorväli $\vec{a}$ peab pinnal S olema pidev ja diferentseeruv, kontuuril γ integreeruv.

Tõestame teoreemi. Analoogiliselt Gaussi divergentsiteoreemiga jaotame pinna S n väikeseks tükiks ΔS_k rajajoonega $\Delta\gamma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Vastavalt rootori definitsioonile

$$\text{rot }_m\vec{a}(M) = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ M \in \Delta S}} \frac{1}{\Delta S} \oint\limits_{\Delta\gamma} \vec{a}\, d\vec{l},$$

kus $\vec{m}$ on risti pinnatükiga ΔS, võime iga tüki tsirkulatsiooni avaldada järgmiselt:

$$\oint\limits_{\Delta\gamma_k} \vec{a}\, d\vec{l} = (\text{rot}_{m_k}\vec{a}(M_k) + \varepsilon_k)\Delta S_k. \tag{3.65}$$

Siin $\varepsilon_k \to 0$, kui $\Delta S_k \to 0$ (eeldusel, et ka pinnatüki ΔS_k läbimõõt $d_k \to 0$). M_k on pinna ΔS_k suvaline punkt, $\vec{m}_k$ selle pinnatüki normaal. Liidame tsirkulatsioonid üle pinnatükkide ΔS_k:

$$\sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\Delta\gamma_k} \vec{a}\, d\vec{l} = \sum_{k=1}^{n} \text{rot } \vec{a}\, \Delta S_k + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta S_k. \tag{3.66}$$

Kuivõrd mööda naaberpindasid eraldavaid joonetükke tuleb integreerida kaks korda - üks kord ühte, teine kord teistpidi, siis sellised integraalid koonduvad. Järele jääb vaid integraal üle pinna S välisjoone γ (ehk võrduse (3.64) vasak pool). Piirväärtus võrduse (3.66) parema poole esimesest summast

$$\lim_{\substack{\Delta S_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} \text{rot }_{m_k}\vec{a}\, \Delta S_k = \iint\limits_{S} \text{rot }_m\vec{a}\, dS = \iint\limits_{S} \text{rot } \vec{a}\, \vec{m}\, dS = \iint\limits_{S} \text{rot } \vec{a}\, d\vec{S}.$$

Võrduse (3.66) parema poole teise summa piirväärtuse hindamiseks kui $\Delta S_k \to 0$ vaatame järgmist absoluutväärtust (vt ka 3.7., Gaussi teoreemi tõestus):

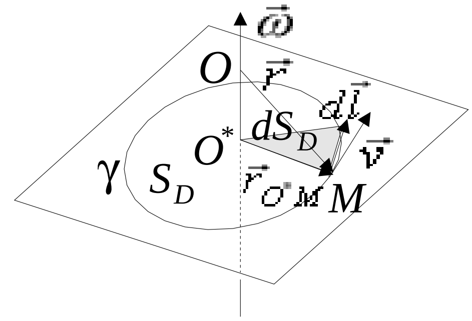
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta S_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k| \Delta_S \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_n \Delta S_k = \alpha_n \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \alpha_n S,$$

kus $\alpha_n = \max \varepsilon_k$. Et $\varepsilon_k \to 0$ kui $\Delta S_k \to 0$, siis $\lim\limits_{\Delta S_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k \Delta S_k = 0$.

Sellega on teoreem tõestatud.

3.12 Järeldusi Stokes'i teoreemist. Rootori füüsikaline tähendus.

Rootori füüsikalise tähenduse näitamiseks vaatleme statsionaarse nurkkiirusega $\vec{\omega}$ pöörleva keha (vedeliku) kiiruste välja $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Vaatluspunkti M kohavektor alguspunktiga O on $\vec{r}$. $\vec{r}_o$ on vektori $\vec{r}$ projektsioon tasandile D. Leiame vektorvälja $\vec{v}$ tsirkulatsiooni üle joone γ:



$$A = \oint_\gamma \vec{v}\, d\vec{l} = \oint_\gamma (\vec{\omega} \times \vec{r}) d\vec{l} = \oint_\gamma \vec{\omega}(\vec{r} \times d\vec{l}) = \vec{\omega} \oint_\gamma \vec{r} \times d\vec{l}. \tag{3.67}$$

Avaldame nüüd $\vec{r} = \vec{r}_{OO^*} + \vec{r}_{O^*M}$. Arvestades vektorkorrutise interpretatsiooni (vt ül. 52), $\vec{r}_{O^*M} \times d\vec{l} = 2d\vec{S}_D = 2\vec{n}\, dS_D$, kus dS_D on vektoritele $\vec{r}_{O^*M}$ ja $d\vec{l}$ üles ehitatud pinna pindala ja $\vec{n}$ pinna normaali ühikvektor, saame

$$A = \oint_\gamma \vec{v}\, d\vec{l} = 2\vec{\omega}\vec{S}_D = 2\vec{\omega}\vec{n}S_D, \tag{3.68}$$

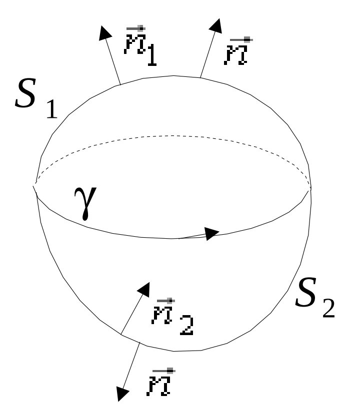
sest $\vec{\omega} \times \vec{r}_{OO^*} = 0$. Valemi (3.68) kohaselt on tsirkulatsioon maksimaalne, kui kontuuri tasand on orienteeritud risti vektoriga $\vec{\omega}$ ja seejuures $\vec{\omega} \upuparrows \vec{S}$.

Järeldusi Stokes'i teoreemist.

1. Rootorvektori voog ei sõltu kontuuri γ läbiva pinna S kujust:

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{a}\, d\vec{S} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \vec{a}\, d\vec{S}. \tag{3.69}$$

Moodustagu pinnad S_1 ja S_2 kinnise pinna S, millel asub kontuur γ. Pindade S_1 ja S_2 normaali suund valemis (3.69) on seotud integreerimissuunaga mööda kõverat γ kellaosuti reegliga (vt joonist). Kui me vaatleme pindu S_1 ja S_2 ühe kinnise pinna S osadena, siis on loomulikuks normaali suunaks välisnormaal ($\vec{n}$), mis on ühel osapindadest vastupidine (joonisel on $\vec{n}_2 \uparrow\downarrow \vec{n}$) kellaosuti reegliga määratule, seetõttu on valemiga (3.69) samaväärne võrdus



$$\oiint_S \operatorname{rot}\vec{a}\, d\vec{S} = 0, \qquad \text{(kus S on suvaline kinnine pind).} \tag{3.70}$$

Vektorvälja $\vec{b}$, mis on esitatav mõne teise vektorvälja $\vec{a}$ rootorina, st $\vec{b} = \text{rot } \vec{a}$ nimetatakse **solenoidaalseks väljaks**. Solenoidaalne on näiteks magnetväli, välja $\vec{a}$ nimetatakse sel juhul magnetvälja **vektorpotentsiaaliks**. St magnetvälja tugevus $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$.

Solenoidaalse välja voog läbi suvalise kinnise pinna on null. Gaussi divergentsteoreemi kohaselt tähendab see, et solenoidaalne väli on allikavaba, st tema divergents on null:

$$\text{div rot } \vec{a} \equiv 0. \tag{3.71}$$

Ülesanne 101 *Näidata otsese arvutusega valemi (3.71) kehtivust.*

Lahendus.

$$\text{div rot } \vec{a} = \text{div} \left(\varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial \vec{a}_k}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Osatuletise võtmisel suhtes on indeksid i ja j ära vahetatavad (see liige on indeksite vahetamise suhtes sümmeetriline), kuid Levi-Civita pseudotensor on indeksite vahetamise suhtes antisümmeetriline, seetõttu on tulemus 0. Pikalt lahti kirjutatuna:

$$\text{div rot } \vec{a} = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = 0.$$

Kehtib ka väide: kui vektorväli $\vec{b}$ on allikavaba ($\text{div } \vec{b} = 0$), siis on ta ühtlasi solenoidaalne, st leidub vektorpotentsiaal $\vec{a}$ nii, et $\vec{b} = \text{rot } \vec{a}$.

2. Öeldakse, et vektorväli $\vec{a}$ on piirkonnas D **pöörisvaba**, kui tema rootor on selles piirkonnas null ($\text{rot } \vec{a} = 0$). Stokesi teoreemi kohaselt on null siis ka vektorvälja $\vec{a}$ tsirkulatsioon mööda piirkonnas D asuvat suvalist kontuuri. Nulltsirkulatsioon tähendab, et joonintegraal väljavektorist, $\int\limits_{P_1(\gamma)}^{P} \vec{a}\, d\vec{l}$, ei sõltu punkte P_1 ja P ühendava integreerimistee γ valikust, seega

$$\int\limits_{P_1}^{P} \vec{a}\, d\vec{s} = u(P) - u(P_1). \tag{3.72}$$

Selline vektorväli on käsitletav skalaarse funktsiooni (välja potentsiaali) $u(M)$ gradiendina (vt ül 77, valem (3.8). Niisiis, kui

$$\text{rot } \vec{a} = 0, \qquad \text{siis} \qquad \vec{a} = \text{grad}\, u. \tag{3.73}$$

Vektorvälja $\vec{a}(M)$, mis on esitatav sobiva skalaarse funktsiooni $u(M)$ gradiendina, nimetatakse **potentsiaalseks väljaks**. Sellise välja näiteks on elektriväli. Elektrivälja tugevus $\vec{E} = \text{grad } \varphi$, kus φ on elektrivälja potentsiaal.

Ülesanne 102 *Näidata, et iga potentsiaalne väli on pöörisvaba,*

$$\text{rot grad } u \equiv 0. \tag{3.74}$$

Termineid "pöörisvaba väli" ja "potentsiaalne väli" kasutatakse samuti kui sünonüüme. Valemist (3.72) selgub, et pöörisvaba välja potentsiaal $u(M)$ on määratud aditiivse konstandi täpsusega - potentsiaali arvväärtus punktis P sõltub integreerimistee alguspunkti P_1 valikust, ehk teisiti, suvalise konstandi liitmine potentsiaalile $u(M)$ ei muuda joonintegraali (3.72) väärtust. Seevastu allikavaba välja vektorpotentsiaal on (3.73) tõttu määratud skalaarse välja gradiendi täpsusega, sest

$$\vec{b} = \text{rot } \vec{a} = \text{rot } \vec{a} + \text{rot grad } u = \text{rot } (\vec{a} + \text{grad } u). \tag{3.75}$$

Ülesanne 103 *Arvutada vektorvälja $\vec{a} = (y, -x, z^2)$ tsirkulatsioon mööda kinnist kõverat γ, kusjuures ümberkäigu suund ühtib parameetri t kasvu suunaga, kasutades Stokes'i teoreemi. γ on antud parameetrilisel kujul:*

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \quad z = \sin t.$$

Lahendus. Vastavalt Stokes'i teoreemile $\oint\limits_\gamma \vec{a}\, d\vec{l} = \oiint\limits_S \text{rot } \vec{a}\, d\vec{S}$,

$$\text{rot } \vec{a} = \Big(-\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial y}\Big)\vec{e}_x + \Big(\frac{\partial z^2}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z}\Big)\vec{e}_y + \Big(\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial x}\Big)\vec{e}_z.$$

Seega tuleb võtta järgmine pindintegraal: $\iint\limits_{S_{xy}} 2dx\, dy$, kus S_{xy} on joonega γ piiratud pinna S projektsioon xy-tasandile. xy-tasandil $z = 0$, joone γ parameetrilisest kujust on näha, et sel juhul $x = y$, $t \in [0, 2\pi]$ järeldub, et selle pinna S projektsiooniks xy-tasandile on sirglõik punktist koordinaatidega $\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ punktini $\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$. Sellise joone 'pindala' on null ja seega ka pindintegraal ning tsirkulatsioon on võrdsed nulliga.

Lisaülesanded.

Ülesanne 104 *Leida skalaarvälja $u = ln(x+y+z+1)$ ja $u = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ tuletis suunas, mille nurgad kõigi koordinaattelgedega on ühesugused.*

Ülesanne 105 *Leida skalaarväljade $u = \dfrac{1}{r}$ ja $u = \ln r$ gradient, $r = |\vec{r}|$, $\vec{r} = (x, y, z)$.*

Ülesanne 106 *Leida gradient järgmisest funktsioonist $(\vec{a}\vec{b}\vec{r})$, kus $\vec{a}$, $\vec{b}$ on konstantsed vektorid ning $\vec{r}$ on punkti $M(x, y, z)$ kohavektor.*

Ülesanne 107 *Leida järgmiste vektorite gradientväljad*

$$\vec{a}(M) = (10xy - 3y^3, 5x^2 - 9xy^2 + 4y^3, 0), \qquad \vec{a}(M) = r\vec{r}.$$

kus $\vec{r}$ *on punkti* M *kohavektor* $\vec{r} = (x, y, z)$.

Ülesanne 108 *Leida eelmises ülesandes leitud vektorväljade muutused koordinaattelgede suundadel.*

Ülesanne 109 *Leida integraal* $\iint\limits_D \frac{1}{x(x+y)} dxdy$, *kus* D *on piiratud joontega* $y = 0$, $x + y = 1$ *ja* $x = e$.

Ülesanne 110 *Leida väljajooned, kui 1)* $\vec{a} = (0, 9z, -4y)$, *2)* $\vec{b} = (2y, 3x, 0)$.

Ülesanne 111 *Leida pindintegraal* $\iint\limits_S (6x + 4y + 3z) dS$, *kus* S *on tasandi* $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ *osa, mis asub piirkonnas, kus* $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Ülesanne 112 *Leida integraal*

$$\iint\limits_S \sqrt{1 - x^2 - y^2} dS,$$

kus S *on sfääri* $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ *ülemine pool.*

Ülesanne 113 *Leida vektorvälja* $\vec{a} = (x^2 + y^2, y^2 + z^2, z^2 + x^2)$ *voog* z*-telje suunas läbi* xy*-tasandi pinnatüki, mida piirab ringjoon* $x^2 + y^2 = 1$.

Ülesanne 114 *Leida vektori* $\vec{a}(M) = r^{-2}\vec{w} \times \vec{r}$ *gradientväli.* $\vec{w}$ *on konstantne vektor,* $\vec{r}$ *on punkti* $M(x, y, z)$ *kohavektor.*

Ülesanne 115 *Leida tuletised vektori* $\vec{l}$ *suunale:*

$$\frac{\partial}{\partial l}(\vec{r} \otimes \vec{a}), \qquad \frac{\partial}{\partial l}(\vec{a} \otimes \vec{r}),$$

kus $\vec{a}$ *on kosntantne vektor,* $\vec{r}$ *on kohavektor ja* $\vec{l}$ *on suvaline ühikvektor.*

Ülesanne 116 *Leida* $\iint\limits_S z dxdy$, *kus* S *on sfääri* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *ülemine pool.*

Ülesanne 117 *Leida* $\iint\limits_S (x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy)$, *kus* S *on sfääri* $x^2+y^2+z^2=R^2$ *ülemine pool.*

Ülesanne 118 *Leida* $\iint\limits_S (y+z+\sqrt{a^2-x^2})dydz$, *kus* S *on silindri* $x^2+y^2=a^2$ *osa, mis asetseb tasandite* $z=0$ *ja* $z=a/\pi$ *vahel.*

Ülesanne 119 *Arvutada* $\operatorname{div}\vec{a}$, *kui 1)*$\vec{a} = (6xy+z^3, 3x^2-z, 3xz^2-y)$, *2)* $\vec{a} = (yx^3, yx^3, yx^3)$.

Ülesanne 120 *Leida* $\operatorname{div}\frac{f(r)\vec{r}}{r^3}$ *ja* $\operatorname{div}(\vec{a}\vec{r})\vec{r}$, *kus* $\vec{r}$ *on kohavektor,* $\vec{a}$ *on konstantne vektor ja* α *on reaalarvuline konstant.*

Ülesanne 121 *Leida vektorvälja* $\vec{c} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ *divergents punktides* $P(1,1,1)$ *ja* $Q(-1,2,3)$.

Ülesanne 122 *Leida vektorvälja* $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$ *voog läbi ühiksfääri keskpunktiga koordinaatide alguspunktis (kahekordse integraali abil).*

Ülesanne 123 *Leida vektorvälja* $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$ *voog läbi ühiksfääri keskpunktiga koordinaatide alguspunktis Gaussi teoreemi abil.*

Ülesanne 124 *Leida jõuvälja töö rakenduspunkti liikumisel mööda kõverat* γ *punktist* P_1 *punkti* P_2, *kui*

$$\vec{F} = xy\vec{e}_x, \qquad \gamma: \ \ y = \sin x, \qquad P_1 = (\pi, 0), ; \ P_2 = (0,0)$$

Ülesanne 125 *Arvutada vektorvälja tsirkulatsioon mööda kinnist kõverat* γ, *kusjuures ümberkäigu suund ühtib parameetri* t *kasvu suunaga*

$$\vec{a} = (x, -z^2, y), \qquad \gamma: \ \ x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad z = 4\cos t - 3\sin t - 3$$

Ülesanne 126 *Leida vektorvälja* $\vec{a} = 3x^2y^2z\vec{e}_x + 2x^3yz\vec{e}_z$ *rootor ning* $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$ *punktis* $M = (2,-1,2)$.

Ülesanne 127 *Leida* $\operatorname{rot}\vec{a}$ *ja* $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$, *kui* $\vec{a} = (10xy - 3y^3, 5x^2 - 9xy^2 + 4y^3, 0)$.

Ülesanne 128 *Leida* $\operatorname{rot}\vec{a}$, *kui* $\vec{a} = r^n(\vec{b}\times\vec{r})$.

Ülesanne 129 *Arvutada vektorvälja tsirkulatsioon mööda kinnist kõverat γ, kusjuures ümberkäigu suund ühtib parameetri t kasvu suunaga*

$$\vec{a} = (x, -z^2, y), \qquad \gamma: \quad x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad z = 4\cos t - 3\sin t - 3$$

kasutades Stokes'i teoreemi.

Ülesanne 130 *Leida vektrovälja tsirkulatsioon mööda kinnist kõverat γ, kusjuures ümberkäigu suund ühtib parameetri t kasvu suunaga:*

$$\vec{a} = (-x^2y^3, 4, x), \qquad \gamma: \quad x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t \quad z = 4.$$

Ülesanne 131 *Leida vektrovälja tsirkulatsioon mööda kinnist kõverat γ, Stokes'i teoreemi abil. Pinna S võrrandi saab lihtsalt: leidke $x^2 + y^2$ (vaadake, kui võimalust on pinda MathCad'i, Mathematica', MatLab'i või Maple'i abil).*

$$\vec{a} = (-x^2y^3, 4, x), \qquad \gamma: \quad x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t \quad z = 4.$$

4 Hamiltoni formalism.

4.1 Hamiltoni formalism.

Nagu nägime, on kõik vektoranalüüsi operatsioonid ja neile vastavad operaatorid: *grad, div, rot* esitatavad Hamiltoni vektoroperaatori *del* (*nabla*) $\nabla = \vec{e}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \equiv \vec{e}_i \nabla_i$ abil:

$$\begin{cases} \text{grad } u & = & \nabla u = \vec{e}_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{grad }_i u = \nabla_i u; \\ \text{div } \vec{a} & = & \nabla \vec{a} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} a_i = \nabla_i a_i; & \\ \text{rot } \vec{a} & = & \nabla \times \vec{a} = \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial}{\partial x_j} a_k \vec{e}_i, & \text{rot }_i \vec{a} = \varepsilon_{ijk} \nabla_i a_k; \\ \text{grad } \vec{a} & = & \nabla \otimes \vec{a} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} a_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, & \text{grad }_{ij} \vec{a} = \nabla_i a_j. \end{cases} \tag{4.1}$$

Operaatorit grad võib rakendada ka suvalist järku tensoritele

$$\text{grad } \mathbf{T}^{(p)} = \nabla \otimes \mathbf{T}^{(p)} = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{j_1 j_2 \dots j_p} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_{j_1} \otimes \vec{e}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_p}. \tag{4.2}$$

Gradiendi võtmisel suureneb tensori järk ühe võrra. Tensorkorrutise $\nabla \otimes \mathbf{T}^{(p)}$ ahendamine tuletise indeksi ja tensori ühe indeksi järgi annab $(p-1)$-järku tensori - tensori $\mathbf{T}^{(p)}$ divergentsi.
Näiteks ahendamisel üle tensori esimese indeksi (üldjuhul tuleb alati valemit täpsustada ja näidata, üle mitmenda tensorindeksi ahendatakse, div $_{(2)}\, \mathbf{T}^{(p)}$ jne.)

$$\text{div}\, \mathbf{T}^{(p)} = \nabla \cdot \mathbf{T}^{(p)} = \frac{\partial}{\partial x_i} T_{i\, j_2 j_3 \dots j_p} \vec{e}_{j_2} \otimes \vec{e}_{j_3} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{j_p}. \tag{4.3}$$

Vektori korral $(p = 1)$ on protseduur rangelt ühene: tulemuseks on skalaar - vektori gradiendi jälg.

4.2 Operaatori ∇ kasutamine arvutustel.

Toetudes valemeile (4.1), on lihtne sooritada liitoperatsioone operaatoriga ∇ ja rakendada seda operaatorit skalaarsete ja vektorväljade mitmesugustele korrutistele (uv, $u\vec{a}$, $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ jne). Seejuures:
1) tuleb jälgida kõiki vektoralgebra reegleid,
2) diferentsiaaloperaatori ∇ rakendamisel korrutisele tuleb teda rakendada igale tegurile eraldi, lugedes teisi tegureid konstantseteks (nii toimitakse ka tuletise võtmisel).

Ülesanne 132 *Leida* rot grad u, div rot $\vec{a}$, div grad u, rot rot $\vec{a}$, grad rot $\vec{a}$, div $(\vec{a}\vec{b})$, div $(\vec{a} \times \vec{b})$, rot $(\vec{a} \times \vec{b})$, grad $(\vec{a}\vec{b})$.

Lahendus.

$$1) \qquad \text{rot grad } u = \text{rot} \left(\vec{e}_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \tag{4.4}$$

sest osatuletise osa on sümmetriline indeksite j, k äravahetamise suhtes, Levi-Civita pseudotensor antisümmeetriline.

$$2)\qquad \text{div rot } \vec{a} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{4.5}$$

$$3)\qquad \text{div grad } u = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \equiv \Delta u, \tag{4.6}$$

kus Δ tähistab Laplace'i operaatorit: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$.

$$\begin{aligned} 4)\qquad \text{rot rot } \vec{a} &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\varepsilon_{klm}\frac{\partial a_m}{\partial x_l}\Big) = \vec{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{lj})\frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} = \\ &= \vec{e}_i\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i \partial x_j} - \vec{e}_i\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta\vec{a}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$5)\qquad \text{grad rot } \vec{a} = \vec{e}_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\varepsilon_{jkl}\vec{e}_j\frac{\partial a_l}{\partial x_k}\Big) = \varepsilon_{jkl}\frac{\partial^2 a_l}{\partial x_i \partial x_k}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \qquad . \tag{4.8}$$

Viimane võrdus komponentkujul:

$$(\text{grad rot } \vec{a})_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 a_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 a_2}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 a_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \dfrac{\partial^2 a_3}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 a_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 a_2}{\partial x_2 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 a_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \dfrac{\partial^2 a_3}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 a_2}{\partial x_2 \partial x_1} - \dfrac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 a_3}{\partial x_3 \partial x_2} - \dfrac{\partial^2 a_2}{\partial x_3^2} & \dfrac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2} - \dfrac{\partial^2 a_3}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 a_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \dfrac{\partial^2 a_1}{\partial x_3 \partial x_2} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

6) div $(\vec{a}\vec{b})$. $\vec{a}\vec{b}$ on skalaar, kuid skalaarist divergentsi võtta ei saa.

$$7)\qquad \text{div } \vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_j b_k) = \varepsilon_{ijk}(a_j\frac{\partial b_k}{\partial x_i} + b_k\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\Big) = \vec{b}\text{ rot } \vec{a} - \vec{a}\text{ rot } \vec{b}, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} &8)\qquad \text{rot } (\vec{a} \times \vec{b}) = \text{rot } (\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i a_j b_k) = \varepsilon_{lmi}\vec{e}_l\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_m}(a_j b_k) = \\ &= (\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{jm})\vec{e}_l\Big(a_j\frac{\partial b_k}{\partial x_m} + b_k\frac{\partial a_j}{\partial x_m}\Big) = \qquad (4.11) \\ &= \vec{e}_l a_l\frac{\partial b_k}{\partial x_k} - \vec{e}_l a_j\frac{\partial b_l}{\partial x_j} + \vec{e}_l b_k\frac{\partial a_l}{\partial x_k} - \vec{e}_l b_l\frac{\partial a_j}{\partial x_j} = \vec{a}\,\text{div } \vec{b} - \vec{b}\,\text{div } \vec{a} - \vec{a}\,\text{grad } \vec{b} + \vec{b}\,\text{grad } \vec{a}, \end{aligned}$$

$$9)\qquad \text{grad } (\vec{a}\vec{b}) = \vec{e}_i\left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right)a_j + \vec{e}_i\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)b_j = \text{grad } \vec{a}\cdot\vec{b} + \text{grad } \vec{b}\cdot\vec{a}. \tag{4.12}$$

Võrduses (4.12) on tegemist tensori ja vektori ahendatud otsekorrutisega (ahendatud tensorkorrutisega), seega on ka tegurite järjekord oluline.

Ülesanne 133 *Arvutada* div $((\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{b})$, rot $(\vec{b}(\vec{a}\vec{r}))$, grad $(r\vec{a})$, grad $(r^2\vec{r})$, *kus* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *on konstantsed vektorid,* $\vec{r}$ *on kohavektor.*

Lahendus.

$$1) \qquad \text{div } [(\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{b}] = \text{div } [(\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i(\vec{r} \times \vec{a})_j b_k] = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}x_l a_m b_k) =$$

$$= \quad (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})\delta_{il}a_m b_k = \vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{b} = -2\vec{a}\vec{b},$$

$$2) \qquad \text{rot } \vec{b}(\vec{a}\vec{r}) = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j}(b_k a_l x_l) = b_k a_l \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \delta_{jl} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i a_j b_k = \vec{a} \times \vec{b},$$

$$3) \qquad \text{grad } (\vec{r}\vec{a}) = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_l a_l) = \vec{e}_i \delta_{il} a_l = \vec{a},$$

$$4) \qquad \text{grad } (r^2\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(r^2 x_j)\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = (2x_i x_j + r^2\delta_{ij})\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j.$$

Lisaülesanded.

Ülesanne 134 *Arvutada* $(\nabla\nabla)\vec{a} - \nabla(\nabla\vec{a})$.

Ülesanne 135 *Arvutada* rot $(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{r}$.

Ülesanne 136 *Leida* div $\vec{a}(\vec{b}\vec{r})$.

Ülesanne 137 *Leida* grad $(r^n\vec{r})$. *Kõigis toodud ülesannetes on* $\vec{a}, \vec{b}$ *konstantsed vektorid,* $\vec{r}$ *- kohavektor.*

Ülesanne 138 *Leida* div $\vec{a}$, *kus* $\vec{a} = \vec{r}e^{-r}$, *kus* $\vec{r}$ *on kohavektor.*

Ülesanne 139 *Leida* rot $\vec{a}$, *kus* $\vec{a} = \vec{r}e^{-r}$, *kus* $\vec{r}$ *on kohavektor.*

Ülesanne 140 *Leida* div $((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c})$. *Soovitav on kasutada Levi-Civita pseudotensorit.*

5 Vektoranalüüsi põhiteoreem

5.1 Püörisevaba vektorvälja määramine tema allikate kaudu.

Antud peatükis vaatleme lähemalt divergentsi, rootori ja gradiendi füüsikalisi rakendusi. Kuidas nende abil määrata välja (näiteks - kuidas leida elektrivälja või magnetvälja tugevust).
Vaatleme püörisvaba välja $\vec{a}(M)$, st

$$\text{rot } \vec{a}(M) = 0. \tag{5.1}$$

Olgu

$$\text{div } \vec{a}(M) = \rho(M). \tag{5.2}$$

Olgu meil tegemist näiteks elektrilaengute väljaga, siis vastavalt Gaussi teoreemile ja teoreemi järeldustele (Vt ül 95, valem (3.52)) annab $\iiint\limits_V \text{div } \vec{a}$ allikate koguintensiivsuse ruumalas V:

$$\iiint\limits_V \text{div } \vec{a}(M)dV = \iiint\limits_V \rho(M)dV = \sum_{i=1}^{n} q_i = Q,$$

kus q_i on i-nda osakese laeng, Q on kogulaeng. $\rho(M)$ on seega laengutihedus.
Püörisvaba väli on potentsiaalne. Et rot grad $u = 0$, siis võime valida $\vec{a} = \text{grad } u$, seega on väljavektor $\vec{a}(M)$ esitatav kujul

$$\vec{a}(M) = -\text{grad } u(M). \tag{5.3}$$

Märgi gradiendi ees võime valida ise. Siis võrrandist (5.2) saame võrrandi

$$\Delta u(M) = -\rho(M). \tag{5.4}$$

Võrrandit (5.4) nimetetakse Poissoni võrrandiks potentsiaali $u(M)$ jaoks. Selle võrrandi lahend pole ühene: olgu lahendiks funktsioon $u(M)$, siis on lahendiks ka

$$u^*(M) = u(M) + u_o(M),$$

kus $u_0(M)$ on homogeense võrrandi

$$\Delta u_o(M) = 0 \tag{5.5}$$

lahend. Võrrandit (5.5) nimetatakse Laplace'i võrrandiks.
Funktsiooni, mis rahuldab piirkonnas D Laplace'i võrrandit nimetatakse **harmooniliseks funktsiooniks** piirkonnas D. Seega on püörisvaba välja potentsiaal määratud harmoonilise funktsiooni täpsusega. Potentsiaal $u(M)$ peab olema ka kõikjal lõplik.
Püörisevaba välja näiteks on elektriväli. Elektrivälja tugevus $\vec{E} = -\text{grad } U$, kus U on elektrivälja (skalaarne) potentsiaal. Seejuures rahuldab potentsiaal U Poissoni võrrandit (5.4).

5.2 Allikavaba vektorvälja määramine tema pööriste kaudu

Vaatleme nüüd allikavaba välja $\vec{a}(M)$, st

$$\text{div } \vec{a} = 0. \tag{5.6}$$

Olgu

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{j}(M). \tag{5.7}$$

Et div rot $\vec{a} = 0$, siis on ka pööriseid kirjeldav vektorväli $\vec{j}$ allikavaba:

$$\text{div } \vec{j}(M) = 0 \tag{5.8}$$

ja seega on väli $\vec{j}(M)$ ka solenoidaalne, st leidub selle välja vektorpotentsiaal $\vec{A}$, nii et

$$\vec{a}(M) = \text{rot } \vec{A}(M). \tag{5.9}$$

Vektorpotentsiaali $\vec{A}$ jaoks saame siis võrrandi

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta\vec{A} = \vec{j}. \tag{5.10}$$

Viimast võrrandit saab lihtsustada, kui arvestame, et

$$\text{rot grad } u = 0.$$

Seetõttu algne vektorväli $\vec{a}$ ei muutu, kui liidame vektorpotentsiaalile $\vec{A}$ otsa gradiendi suvalisest skalaarväljast grad v (vektorvälja rootor on määratud gradiendi täpsusega).

$$\vec{A} \to \vec{A}^* = \vec{A} + \text{grad } v. \tag{5.11}$$

Viimast teisendust nimetatakse **kalibratsioonteisenduseks**. Selline vektorpotentsiaali meelevaldsus lubab talle peale panna täiendava **kalibreerimistingimuse**: me võime nõuda, et vektorpotentsiaal oleks allikavaba

$$\text{div } \vec{A} = 0. \tag{5.12}$$

Kui esialgne vektorpotentsiaal $\vec{A}$ ei rahulda kalibreerimistingimust (5.12), siis valime uue potentsiaali $\vec{A}^*$, nii et div $\vec{A}^* = 0$. Kui skalaarväli v rahuldab Poissoni võrrandit:

$$\Delta v = -\text{div } \vec{A} \neq 0,$$

siis ümberkalibreeritud potentsiaal $\vec{A}^*$ on allikavaba. Kui vektorpotentsiaal $\vec{A}$ rahuldab kalibreerimistingimust (5.12), siis saame võrrandist (5.10) Poissoni võrrandi vektorpotentsiaali $\vec{A}$ jaoks:

$$\Delta\vec{A}(M) = -\vec{j}(M). \tag{5.13}$$

Allikavaba vektorväli on näiteks magnetväli. Magnetvälja tugevus $\vec{H}$ on määratud vektorpotentsiaali kaudu: $\vec{H} = \text{rot } A$, rot $H = \mu_0\vec{j}$, kus j on voolutihedus. Vektorpotentsiaal $\vec{A}$ rahuldab seejuures Poissoni võrrandit (5.13).

5.3 Vektorvälja määramine allikate ja pööriste kaudu

Vaatame üldist ülesannet - on teada vektorvälja $\vec{a}(M)$ allikad ja püörised (divergents ja rootor), määrata tuleb vektorväli $a(M)$.

$$\text{div } \vec{a} = \rho(M), \qquad \text{rot } \vec{a}(M) = \vec{j}(M), \tag{5.14}$$

lisatingimus

$$\text{div } \vec{j} = 0. \tag{5.15}$$

Välja $\vec{a}$ võime otsida kujul

$$\vec{a}(M) = \vec{a}_1(M) + \vec{a}_2(M), \tag{5.16}$$

kus

$$\begin{array}{ll} \text{div } \vec{a}_1(M) = \rho(M), & \text{rot } \vec{a}_1(M) = 0, \\ \text{rot } \vec{a}_2(M) = \vec{j}(M), & \text{div } \vec{a}_2(M) = 0. \end{array}$$

St $\vec{a}_1$ on potentsiaalne ja $\vec{a}_2$ on solenoidaalne. Valemitest (5.3) ja (5.10) saame siis

$$\vec{a}(M) = -\text{grad } u(M) + \text{rot } \vec{A}(M), \tag{5.17}$$

kus

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= -\rho(M), \\ \text{grad div } \vec{A}(M) - \Delta\vec{A}(M) &= \vec{j}(M). \end{aligned}$$

Kui kasutame kalibreeritud vektorpotentsiaali, st div $\vec{A} = 0$, siis saame ka vektorpotentsiaali $\vec{A}$ jaoks Poissoni võrrandi:

$$\Delta\vec{A}(M) = -\vec{j}(M).$$

Poissoni võrranditele konstrueeritud lahendid on ilmselt ühesed. See on saavutatud tänu mõnedele varjatud eeldustele: punktallika väli on tsentraalsümmeetriline ja lõpmatuses null; lõplikku ruumipiirkonda V koondunud allikate ja pööriste korral on skalaarne ja vektorpotentsiaal lõpmatuses nullid. Nende eeldustega on välistatud suur klass allika- ja püörisvaba välju - konstantsed vektorväljad.

Vektoranalüüsi põhiteoreemi: iga pidev ja diferentseeruv vektorväli $\vec{a}(M)$, mis on määratud kogu ruumis ning lõpmatuses, saab nulliks koos oma divergentsi ja rootoriga, on üheselt esitatav pöörisvaba (potentsiaalse) vektorvälja $\vec{a}_1(M)$ ja allikavaba (solenoidaalse) vektorvälja $\vec{a}_2(M)$ summana (5.16).

5.4 Näide pöörisvaba vektorvälja leidmise kohta

Poissoni võrrand, millele taandub skalaar- ja vektorpotentsiaalide arvutamine, on 2. järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand. Selle lahendamine ei kuulu antud kursusesse, aga vaatame ühte lihtsamat näidet. Olgu meil vektorväli, isoleeritud allikaga punktis P.

$$\vec{a}(M) = \frac{q}{4\pi\, r_{PM}^3}\vec{r}_{PM}, \tag{5.18}$$

q - allika tugevus, selle vektorvälja potentsiaaliks on funktsioon:

$$u(M) = \frac{q}{4\pi\, r_{PM}}.$$

Käsitledes ruumielemendis $dV(P)$ asuvaid allikaid punktallikana, tugevusega $\varrho(P)\, dV(P)$, võime esitada Poissoni võrrandi lahendi kujul

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\varrho(P)\, dV(P)}{r_{PM}}, \tag{5.19}$$

kus on sisuliselt summeeritud kõigi elementaarsete punktallikate tekitatud potentsiaalid punktis M. Ilmselt saame ka pööristega $\vec{j}(M)$ määratud allikavaba välja vektorpotentsiaali, mille iga koordinaat rahuldab samuti Poissoni võrrandit, esitada selliselt

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\vec{j}(P)}{r_{PM}} dV(P). \tag{5.20}$$

Valemid (5.19-5.20) on välisest sarnasusest hoolimata erinevad. Kui läheme piirkonnaga, üle mille integreerime, punktiks ($V \to 0$), siis annab valem (5.19) punktallikale vastava potentsiaali. Valemis (5.20) ei anna selline lihtne piirprotsess midagi, sest

$$\iiint\limits_V \vec{j}\, dV = 0.$$

Täpsem käsitlus näitab, et ka valemil (5.20) on isoleeritud "punktpöörist" kirjeldav piirkuju

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{4\pi\, r^3{}_{PM}}\, \vec{m} \times \vec{r}_{PM},$$

kus

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \vec{r}_{PQ \times} \vec{j}_{(Q)}\, dV_{(Q)}$$

on konstantne pööriste momendi vektor.

6 Vektorarvutuse alused Minkowski aegruumis

6.1 Vektoralgebra pseudoeukleidilises ruumis. Põhimõisted. Lorentzi teisendused. Vektorite ko- ja kontravariantsed koordinaadid

Siiani vaatlesime ruumi eraldi ajast. Füüsikalist protsessi ruumis iseloomustas matemaatiline objekt - punkt ruumis. Protsesse iseloomustab lisaks asukohale ruumis ka ajahetk. Matemaatiliseks objektiks, mis kirjeldab reaalset protsessi ruumis ja ajas, on sündmus, mida iseloomustab 4-vektor - sündmuse kohavektor. Selleks, et saada ajakoordinaati dimensiooniliselt samasugusena kui ruumikoordinaati, korrutame teda konstandiga - valguse kiirusega vaakumis -c.
Seega, (Minkowski) aegruum on 4-mõõtmeline vektorruum, selles on maksimaalselt 4 lineaarselt sõltumatut vektorit. Vektorruumi baasis on 4 baasivektorit. 4-mõõtmelises aegruumis on vektorite skalaarkorrutisel samasugused omadused kui kolmemõõtmelises ruumis ühe erandiga - $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ ei pea enam olema mittenegatiivne. Vektori ruut (skalaarkorrutis iseendaga) võib olla nii positiivne, negatiivne kui ka null, isegi siis, kui vektor pole nullvektor. Samamoodi ka vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ skalaarkorrutis võib olla nii positiivne, negatiivne kui ka null. Sellist skalaarkorrutise tingimust rahuldavaid vektorruume nimetatakse **pseudoeukleidilisteks ruumideks**.

Pseudoeukleidilises ruumis pole võimalik valida ortonormeeritud baasi. Lihtsaim baas on nn **galileiline baas**, mille korral ruumiliste baasvektorite $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ skalaarkorrutis iseendaga on 1, ajatelje baasvektori $\mathbf{e_0}$ korrutis ruumiliste baasvektoritega on null - $\mathbf{e_0}\mathbf{e_i} = 0$, $i = 1, 2, 3$ ja ajatelje baasvektori skalaarkorrutis iseendaga on -1. Sellised skalaarkorrutised võime panna kirja järgmise maatriksi H abil:

$$H = (e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Vektorite indekseid tähistame edaspidi järgmiselt: kui tegemist on vaid vektori ruumiliste koordinaatidega või kui indeks tähistab ruumilist baasivektorit, siis on indeksiks ladina täht, nt $i = 1, 2, 3$. Kui indeks on kreeka täht, siis mõeldakse selle all kõiki koordinaate, $\mu = 0, 1, 2, 3$.
Kuivõrd vektorruumi baas pole ortonormeeritud, siis teisenevad vektori koordinaadid erinevalt baasvektoritest. Selle erinevuse rõhutamiseks kirjutame edaspidi vektori koordinaatide indeksid üles, baasvektori indeksid alla. Summeerimisel kasutame Einsteini kokkulepet nõudes, et üks indeks oleks all, teine ülal. Siis võime aegruumi 4-vektori $\mathbf{a}$ (ilma vektori märgita nüüd, vektori märgiga esitame vaid 3-ruumi vektoreid!) esitada baasi $\{\mathbf{e}_\mu\}$ kaudu järgmiselt:

$$\mathbf{a} = a^\mu \mathbf{e}_\mu. \tag{6.2}$$

Vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ skalaarkorrutis avaldub siis (6.1) kaudu järgmiselt:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^\mu \mathbf{e}_\mu, b^\nu \mathbf{e}_\nu) = a^\mu b^\nu \eta_{\mu\nu} = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3. \tag{6.3}$$

Vektori skalaarkorrutis iseendaga on siis

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -(a^0)^2 + (a^1)^1 + (a^2)^2 + (a^3)^2. \tag{6.4}$$

Siit on näha, et see pole alati positiivselt määratud. Kui $(\mathbf{a},\mathbf{a}) > 0$, siis nimetatakse vektorit **a ruumisarnaseks vektoriks**, kui $(\mathbf{a},\mathbf{a}) < 0$, siis **ajasarnaseks** ja kui $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$, siis **isotroopseks** ehk **valgusesarnaseks** vektoriks.
Kahe sündmuse $M = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$ ja $N = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ vahelise kauguse 4-ruumis võime analoogiliselt 3-ruumi juhule esitada järgmiselt: $\mathbf{NM} = (ct_2 - ct_1, x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Juhul, kui $(\mathbf{NM},\mathbf{NM}) \geqslant 0$, on need kaks sündmust põhjuslikult seotud, kui $(\mathbf{NM},\mathbf{NM}) < 0$, siis mitte.
Sündmuste $A = (a^0, a^1, a^2, a^2)$ ja $B = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ vahelist kaugust 4-ruumis iseloomustab intervalli ruut:

$$s^2(A,B) = -(b^0-a^0)^2+(b^1-a^1)^2+(b^2-a^2)^2+(b^3-a^3)^2 \equiv -(b^0-a^0)^2+r^2(A,B), \quad (6.5)$$

kus r on sündmuste A ja B vaheline (3)-ruumiline kaugus.

6.2 Lorentzi teisendused

Teisendusi, mis viivad ühe galileilise baasi $\{\mathbf{e}_\mu\}$ teiseks galileiliseks baasiks $\{\mathbf{e}_{\mu'}\}$ nim Lorentzi teisenduseteks. Analoogiliselt 3-ruumi juhuga on ka Lorentzi teisendused määratud teisendusmaatriksiga $L = (L^\nu_\mu)$. St me võime kirjutada:

$$\mathbf{e}_{\mu'} = L^\nu_{\mu'}\mathbf{e}_\nu. \quad (6.6)$$

Märgime, et erinevalt 3-ruumi juhust kirjutame siin teisendusmaatriksi vana baasi indeksi üles, uue baasi indeksi alla. Kuivõrd nii vana kui ka uus baas rahuldavad võrdust (6.1), siis saame teisendusmaatriksi jaoks tingimuse

$$\eta_{\nu'\mu'} = L^\kappa_{\mu'}L^\lambda_{\nu'}\eta_{\kappa\lambda}, \quad (6.7)$$

mille võime kirjutada ka kujul $H = LHL^T$, kus $L^T = (L^\mu_\nu)$. Siit saame veel $\det L = \pm 1$, arvestades, et $\det H = -1$.
ON teisendused moodustasid teisenduste rühma (pärisortogonaalteisendused), milles kahe ON teisenduse järjestikune rakendamine andis uuesti ON teisenduse. Kui $\det L = 1$ (L_+), siis nim teisendusi päris-Lorentzi teisendusteks ning antud teisendused moodustavad ka teisenduste rühma - kahe päris-Lorentzi teisenduse järjestikune rakendamine annab taas päris-Lorentzi teisenduse. L_--rühma teisendusteks on näiteks aja peegeldus J_0 ja ruumiline inversioon on J:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teisendused, mis jätavad muutmata ajatelje ühikvektori on tegelikult 3-ruumi ON teisendused ja need võime esitada järgmiselt:

$$L_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Ka kolmruumi teisendused moodustavad Lorentzi rühma alarühma.

6.3 Vektorite ko- ja kontravariantsed koordinaadid.

Vaatame veel 4-vektoreid ja nende esitusi koordinaatkujul erinevates galileilistes baasides (teisenevad vastavalt $\mathbf{e}_{\mu'} = L^{\nu}_{\mu'}\mathbf{e}_{\nu}$):

$$\mathbf{a} = a^{\mu'}\mathbf{e}_{\mu'} = a^{\mu'}L^{\nu}_{\mu'}\mathbf{e}_{\nu} = a^{\nu}\mathbf{e}_{\nu}.$$

Siit saame teisenduseeskirja 4-vektori koordinaatide jaoks:

$$a^{\nu} = a^{\mu'}L^{\nu}_{\mu'}. \tag{6.9}$$

Baasivektorite teisenemiseeskirjas viis maatriks L vanalt baasilt uuele, siin vastupidi - uuelt vanale, siin toimub summeerimine üle maatriksi L reaindeksite (valemis (6.6) toimub summeerimine üle veeruindeksite). Objekte, mis teisenevad nagu baasivektorid nim **kovariantseteks**, objekte, mis teisenevad nagu vektori koordinaadid nim **kontravariantseteks**.

Leiame ka vektori koordinaatide teisenduse vanalt baasilt uuele. Selleks korrutame seost (6.9) paremalt Lorentzi teisenduse pöördmaatriksiga L^{-1}, elementidega $(L^{-1})^{\kappa'}_{\nu}$:

$$a^{\nu}(L^{-1})^{\kappa'}_{\nu} = a^{\mu'}L^{\nu}_{\mu'}(L^{-1})^{\kappa'}_{\nu} = a^{\mu'}\delta^{\kappa'}_{\mu'} = a^{\kappa'}. \tag{6.10}$$

Maatriksiga H määratud 2.järku tensorit (6.1) nim **meetriliseks tensoriks** galileilises baasis. Maatriksi $H = \eta_{\mu\nu}$ pöördmaatriks on ta ise, st

$$H^{-1} = H, \qquad HH^{-1} = I,$$

kus I on ühikmaatriks. Arvestades summeerimiskokkulepet, peab pöördmaatriksi juures kirjutama indeksid üles:

$$H^{-1} = (\eta^{\mu\nu}) \qquad \text{ja} \qquad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{6.11}$$

Seega võime ka kirjutada

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}. \tag{6.12}$$

Maatriksi elemente $\eta^{\mu\nu}$ ja $\eta_{\mu\nu}$ võime käsitleda kui 2.järku tensori ko- ja kontravariantseid koordinaate. Meetrilist tensorit kasutades saame esialgsele galileilisele baasile vastavusse seada tema **kaasbaasi** $\{\mathbf{e}^{\mu}\}$:

$$\mathbf{e}^{\mu} = \eta^{\mu\nu}\mathbf{e}_{\nu}. \tag{6.13}$$

Vektori koordinaadid kaasbaasis avalduvad siis:

$$\mathbf{a} = a^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} = a_{\nu}\eta^{\nu\mu}\mathbf{e}_{\mu} = a_{\nu}\mathbf{e}^{\nu}. \tag{6.14}$$

Analoogiliselt vektoritega võib tensoreid (ja pseudotensoreid) esitada ko- ja kontravariantsete või segakoordinaatide abil. Näiteks 2.järku tensor

$$\mathbf{S} = S^{\mu\nu}\mathbf{e}_{\mu}\otimes\mathbf{e}_{\nu} = S_{\mu\nu}\mathbf{e}^{\mu}\otimes\mathbf{e}^{\nu} = S^{\mu}_{\nu}\mathbf{e}_{\mu}\otimes\mathbf{e}^{\nu}.$$

Levi-Civita pseud0tensor 4-ruumis defineeritakse järgmiselt. Kontravariantsed koordinaadid:

$$\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} (-1)^{p}, & \text{kus p on substitutsiooni } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \kappa & \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}\text{, paarsus} \\ 0, & \text{kui vähemalt kaks indeksit on võrdsed.} \end{cases} \tag{6.15}$$

Seega $\varepsilon^{0123} = 1, \varepsilon_{0123} = \eta_{00}\eta_{11}\eta_{22}\eta_{33}\varepsilon^{0123} = -1$.

Ülesanne 141 *Näidata, et Lorentzi teisendustel, mis jätavad ajatelje ühikvektori* $\mathbf{e}_0$ *muutmata, käitub 4-vektori* (a^μ) *0-koordinaat* a^0 *skalaarina, koordinaadid* a^i *3-vektorina.*

Lahendus. Vastavalt valemile (6.8)

$$L_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \text{kus} \qquad AA^T = I,$$

võime Lorentzi teisendused, mis jätavad ajatelje muutmata kirja panna järgmiselt:

$$\begin{aligned} a^{\mu'} &= a^\nu (L^{-1})_\nu^{\mu'} \quad \text{ehk} \\ a^{\mu'} &\equiv (a^{0'}, a^{i'}) = (a^0, a^j) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a^{-1})_j^{i'} \end{pmatrix} = (a^0, a^j (a^{-1})_j^{i'}). \end{aligned}$$

Siit on näha, et $a^{0'} = a^0$ ning $a^{i'} = a^j (a^{-1})_j^{i'} = a_j^{i'} a^j$, st tõepoolest käitub 4-vektori 0-koordinaat Lorentzi teisendustel, mis jätavad ajatelje muutmata (ehk 3-ruumi ON-teisendustel) skalaarina ja a^i 3-vektorina.
Tihti tähistataksegi 4-vektorit nii: $\mathbf{a} = (a^0, \vec{a}) = (-a_0, \vec{a})$.

6.4 Lorentzi teisendused (jätk), Galilei teisendused

Ülesanne 142 *Leida Lorentzi teisendused, mis jätavad vektorid* $\mathbf{e}_2$ *ja* $\mathbf{e}_3$ *muutmata, kuid säilub vektorkolmiku* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *orientatsioon.*

Lahendus. Otsime lahendit analoogilisena 3-ruumi pööretele, mille saime esitada pöördenurga φ kaudu. Oletame, et ka otsitava Lorentzi teisenduse võime esitada mingi parameetri χ abil, kusjuures teisendus $\chi = 0$ korral jätab baasi muutumatuks.
Et $\mathbf{e}_2$ jääb muutmata, saame seosest $\mathbf{e}_{2'} = l_{2'}^{\mu} \mathbf{e}_\mu$

$$\mathbf{e}_2' = l_{2'}^{0} \mathbf{e}_0 + l_{2'}^{1} \mathbf{e}_1 + l_{2'}^{2} \mathbf{e}_2 + l_{2'}^{3} \mathbf{e}_3,$$

kust saame $l_{2'}^0 = l_{2'}^1 = l_{2'}^3 = 0$, $l_{2'}^2 = 1$. Analoogiliselt $l_{3'}^0 = l_{3'}^1 = l_{3'}^3 = 0$, $l_{3'}^2 = 1$. Kirjutame nüüd välja seose (6.7):

$$\eta_{\mu'\nu'} = L_{\mu'}^{\kappa} L_{\nu'}^{\lambda} \nu_{\kappa\lambda} \qquad \text{ehk} \qquad H = LHL^T,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0^{0'} & L_0^{1'} & 0 & 0 \\ L_1^{0'} & L_1^{1'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_0^{0'} & l_1^{0'} & 0 & 0 \\ l_0^{1'} & l_1^{1'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Korrutades viimase avaldise lahti saame järgmised seosed:

$$(l_0^{0'})^2 - (l_1^{0'})^2 = 1, \qquad (l_1^{1'})^2 - (l_0^{1'})^2 = 1, \qquad l_0^{0'} l_1^{1'} - l_1^{0'} l_0^{1'} = 0. \tag{6.16}$$

Tingimusest $\det L = 1$, saame lisaks seose

$$l_0^{0'} l_1^{1'} - l_0^{1'} l_1^{0'} = 1. \tag{6.17}$$

Seostest (6.16) ja (6.17) saame järgmised võrdused: $l_0^{0'} = l_1^{1'}$ ja $l_0^{1'} = l_1^{0'}$. Nüüd võime võtta parameetri χ sellise, et

$$l_0^{0'} = l_1^{1'} = \text{ch}\ \chi, \qquad l_0^{1'} = l_1^{0'} = \text{sh}\ \chi, \tag{6.18}$$

mis rahuldavad seost $\mathrm{ch}^2\chi - \mathrm{sh}^2\chi = 1$. Hüperboolne siinus $\mathrm{sh}\,\chi = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ja hüperboolne koosinus $\mathrm{ch}\,\chi = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Otsitav teisendusmaatriks on seega

$$L_+ = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi & \mathrm{sh}\,\chi & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\,\chi & \mathrm{ch}\,\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

Ülesanne 143 *Olgu tegemist kahe galileilise baasiga $\{\mathbf{e}_\mu\}$ ja $\{\mathbf{e}_{\nu'}\}$, kusjuures uus baas liigub kiirusega v vanas baasis vektori $\mathbf{e}_1$ suunas (x^1-telje suunas). Erirelatiivusteooriast tuntud Lorentzi teisendus seob omavahel koordinaadid*

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t + \frac{vx^1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ x^{1'} &= \frac{x^1 + vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ x^{2'} &= x^2, \\ x^{3'} &= x^3. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Näidata, et see on kirja pandav maatriksi (6.19) abil $a^{\mu'} = L^{\mu'}_{\nu} a^\nu$. Võtke th $\chi = \frac{v}{c}$, arvestage, et $x^0 = ct$. $a^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, $a^{\mu'} = (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$.

Lahendus. Leiame esmalt $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ avaldise sh χ ja ch χ kaudu. $\mathrm{th}\,\chi = \frac{\mathrm{sh}\,\chi}{\mathrm{ch}\,\chi} = \frac{v}{c}$, siis

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \mathrm{th}^2\chi = 1 - \frac{\mathrm{sh}^2\chi}{\mathrm{ch}^2\chi} = \frac{\mathrm{ch}^2\chi - \mathrm{sh}^2\chi}{\mathrm{ch}^2\chi} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\chi},$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathrm{ch}\,\chi.$$

Teisalt,

$$\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathrm{th}\,\chi \cdot \mathrm{ch}\,\chi = \frac{\mathrm{sh}\,\chi}{\mathrm{ch}\,\chi} \cdot \mathrm{ch}\,\chi = \mathrm{sh}\,\chi.$$

(6.20) esimese võrduse võime nüüd kirjutada järgmiselt:

$$x^{0'} = ct' = \frac{ct}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{x^1\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = x^0\mathrm{ch}\,\chi + x^1\mathrm{sh}\,\chi.$$

Analoogiliselt saame (6.20) teise võrduse järgmiselt:

$$x^{1'} = \frac{ct\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = x^0\mathrm{sh}\,\chi + x^1\mathrm{ch}\,\chi.$$

Maatriksite abil võime nüüd Lorentzi teisendused (6.20) kirja panna järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} x^{o'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\chi & \mathrm{sh}\,\chi & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\,\chi & \mathrm{ch}\,\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

mis ongi seos (6.19) pikalt lahti kirjutatuna.

6.5 4-gradient, 4-rootor, 4-divergents

Gradiendi, divergentsi ja rootori käsitlemisel tuleb silmas pidada, et sündmuse koordinaadid (kohavektor) on kontravariantsed suurused x^μ, st $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. ∇-operaatori on koordinaatideks on osatuletised $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$. Vaatame, kuidas teisenevad Lorentzi teisendustel ∇-operaatori koordinaadid. Selleks arvestame, et $x^\nu = x^{\mu'} L^\nu_{\mu'}$. Siis saame

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = L^\nu_{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \tag{6.21}$$

Seega teisenevad ∇-operaatori koordinaadid Lorentzi teisendustel kui vektori kovariantsed koordinaadid ning teda on loomulik esitada kaasbaasis

$$\nabla_{(4)} = \mathbf{e}^\mu \nabla_\mu, \qquad \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{6.22}$$

Gradient skalaarist u 4-ruumis on seega vektor kaasbaasis

$$\mathrm{grad}\ _{(4)}u = \nabla_{(4)} u = \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \mathbf{e}^\mu. \tag{6.23}$$

Gradient vektorist

$$\mathrm{grad}\ _{(4)}\mathbf{a} = \nabla_{(4)} \otimes \mathbf{a} = \frac{\partial a^\nu}{\partial x^\mu} \mathbf{e}^\mu \otimes \mathbf{e}^\nu. \tag{6.24}$$

Divergents on gradiendi ahendamine, kusjuures üks indeks on kovariantne, teine kontravariantne (vt Einsteini summeerimisreeglit 4-ruumis - üks indeks alati ülal, teine all!). Seega on divergentsi leidmisel üks indeks tuletise kontravariantne indeks, teine tensori (vektori) kovariantne indeks. Divergents vektorist on seega

$$\mathrm{div}\ _{(4)}\mathbf{a} \equiv (\nabla_{(4)}, \mathbf{a}) = \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu}. \tag{6.25}$$

Rootori defineerimiseks tuletame meelde rootorit 3-ruumis. 3-ruumis seati vektori gradiendi grad $\vec{a}$ antisümmeetrilisele osale

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)$$

Levi-Civita pseudotensori abil vastavusse pseudovektor koordinaatidega rot $_i\vec{a} = \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial a_k}{\partial x_j}$.

4-ruumis talitame analoogiliselt. 4-ruumis on Levi-Civita pseudotensor 4.-ndat järku, seega on tulemuseks 2.järku pseudotensor

$$\mathrm{rot}\,{}_{(4)}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\kappa}. \tag{6.26}$$

4-ruumis divergents rootorist

$$(\mathrm{div}\ {}_{(4)}\mathrm{rot}\ {}_{(4)}\mathbf{a})^\nu = \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\frac{\partial a^2_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} = 0. \tag{6.27}$$

Divergents rootorist 4-ruumis on 0-vektor!
Samamoodi on ka rootor gradiendist 4-ruumis 0:

$$(\mathrm{rot}\ {}_{(4)}\mathrm{grad}\ {}_{(4)})^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} = 0.$$

6.6 Diferentsiaaloperaatorite füüsikalisi rakendusi 4-ruumis

Esmalt vaatame allikavaba vektorvälja tingimuse div $\vec{a} = 0$ üldistust 4-ruumis:

$$\mathrm{div}\ {}_{(4)}\mathbf{a} = \frac{1}{c}\frac{\partial a^0}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{a} = 0. \tag{6.28}$$

Selle füüsikalise sisu leidmiseks integreerime seost (6.28) üle ruumipiirkonna V ja ajavahemiku $[t_1, t_2]$:

$$\frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} a^0 dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{a}\ dV = 0.$$

Kasutades Gaussi teoreemi, saame

$$\frac{1}{c}\iiint_V a^0 dV\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S \vec{a}\ d\vec{S} = 0. \tag{6.29}$$

St ajavahemiku $[t_1, t_2]$ jooksul kompenseerivad suuruse $\frac{a_0}{c}$ muutus ruumalas V ja vektori $\vec{a}$ voog ruumalast V läbi selle äärepinna välja teineteise. Defineerides vektori $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$, kus ρ on laengutihedus (elektromagnetismis elektrilaengutihedus), $\vec{j}$ - voolutihedus, annab seose (6.29) ja seega ka (6.28) laengu jäävuse seaduse.

Jäävusseadustena saab tõlgendada ka (6.28) sarnaseid seoseid tensorite jaoks, näiteks

$$\mathrm{div}\ {}_{(4)}\mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu\nu} = 0. \tag{6.30}$$

Laplace'i operaatori $\Delta = \mathrm{div\ grad}$ üldistus aeg-ruumi on d'Alembert'i operaator $\Box$:

$$\begin{aligned}\Box &= (\nabla, \nabla) = \mathrm{div}\ {}_{(4)}\mathrm{grad}\ {}_{(4)} = \frac{\partial^2}{\partial^\mu \partial_\mu} = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial^\mu \partial^\nu} = \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}.\end{aligned} \tag{6.31}$$

Laplace'i võrrandi üldistus aegruumile on lainevõrrand

$$\Box u = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = 0.$$

6.7 Aegruumi Minkowski esitus

4-mõõtmelise aegruumi esimese käsitluse andis Hermann Minkowski. See on pisut teistsugusel kujul. Aluseks on võetud eukleidline ortonormeeritud baasiga eukleidiline 4-ruum.

$$\{\mathbf{e}_\mu\} = \{\mathbf{e_m}, \mathbf{e_4}\} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}, \quad \text{kus} \quad (\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \delta_{\mu\nu} \tag{6.32}$$

Ajatelje ühikvektor Minkowski aegruumis on $\mathbf{e_0} = i\mathbf{e_4}$, siis

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a^\mu \mathbf{e}_\mu = a^0 \mathbf{e_0} + a^i \mathbf{e}_i = ia^0 \mathbf{e}_4 + a^i \mathbf{e_i} = a_\mu \mathbf{e}_\mu, \qquad (6.33) \\ \text{st} & \qquad a_4 = ia^0, \quad a^m = a_m \end{aligned}$$

Sellest lähtudes võib defineerida diferentsiaaloperaatorid ka Minkowski aegruumis.

$$\text{grad}_{(4)} u = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathbf{e}_i + \frac{1}{ic}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6.34}$$

$$\text{div}_{(4)} a = \frac{\partial a_\mu}{\partial x_\mu}. \tag{6.35}$$

Rootor vektorist Minkowski esituses on 2.järku pseudotensor, mille komponendid on järgmised:

$$(\text{rot}_{(4)}\mathbf{a})_{\kappa\lambda} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\left(\frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu}\right). \tag{6.36}$$

Lisaülesanded

Ülesanne 144 *Galileilised baasis on antud vektorid* $\mathbf{a} = (a^\mu) = (2, 1, -1, 1)$ *ja* $\mathbf{b} = (b^\mu) = (-1, -1, 0, 1)$. *Selgitada, kas need vektorid on aja-ruumi või valgusesarnased ja kas nad on omavahel ortogonaalsed.*

Ülesanne 145 *Leida sündmuste* $A = (2, 3, -1, 2)$ *ja* $B = (2, -3, 1, 2)$ *vahelise intervalli ruut.*

Ülesanne 146 *Näidata, et kui kaks sündmust toimuvad samas ruumipunktis, kuid erinevatel ajahetkedel (null-koordinaat on erinev), siis on need sündmused põhjuslikult seotud.*

Ülesanne 147 *Näidata, et kui kaks sündmust toimuvad samal ajahetkel erinevates ruumipunktides, siis ei saa need sündmused põhjuslikult seotud olla.*

Ülesanne 148 *Leida sündmuste B ja C vahelise intervalli ruut, kui sündmuse B asukohta 4-ruumis kirjeldab vektor* $\mathbf{b} = -4\mathbf{e_0} + 3\mathbf{e_2} + 1\mathbf{e_3}$ *ja C asukohta vektor* $\mathbf{c} = 2\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_3}$. *Kas sündmused B ja C võivad omavahel põhjuslikult seotud olla?*

Ülesanne 149 *Näidata, et suurused* a_μ *teisenevad teisendustel analoogiliselt baasivektoritele.*

Ülesanne 150 *Näidata, et Lorentzi teisendustel, mis jätavad ajatelje ühikvektori* $\mathbf{e}_0$ *muutmata, käitub 2.järku tensori* $(T^{\mu\nu})$ *koordinaat* T^{00} *skalaarina, koordinaadid* T^{0i} *ja* T^{i0} *3-vektoritena ja* T^{mn} *3-tensorina.*

Ülesanne 151 *Leida 4-divergents kohavektorist.*

Ülesanne 152 *Leida 4-divergents 4-vektorist* $\mathbf{a} = (x^0)^2\mathbf{e}_0 + x^2x^3\mathbf{e}_1 + x^2x^3\mathbf{e}_3$.

Ülesanne 153 *Leida 4-gradient skalaarväljast* $u = 4ctr^2$ *(pseudoeukleidilses 4-ruumis).*

Ülesanne 154 *Leida 4-vektor, mis on risti vektoriga* $\mathbf{a} = 4x^0\mathbf{e}_0 - x^2\mathbf{e}_1 - 4x^0\mathbf{e}_2 + x^2\mathbf{e}_3$.

Ülesanne 155 *Minkowski aegruumis on antud vektor* $\mathbf{d} = -3\mathbf{e}_0 + 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. *Vektor* $\mathbf{k} = a\mathbf{e}_0 + b\mathbf{e}^1 + c\mathbf{e}^2 + 2b\mathbf{e}^3$. *Leida konstandid* a, b, c, *kui on teada, et vektorid* $\mathbf{d}$ *ja* $\mathbf{k}$ *on ortogonaalsed.*

Ülesanne 156 *Leida 4-divergents vektorväljast* $\mathbf{a} = (x^1 + x^2 + x^3)x^0\mathbf{e}_0 - \frac{1}{x^0}(x^1)^2\mathbf{e}_1 - \frac{1}{x^0}(x^1)^2\mathbf{e}_2 - \frac{1}{x^0}(x^1)^2\mathbf{e}_3$.

Ülesanne 157 *Leida 4-gradient skalaarväljast* $u = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$.

7 Kõverjoonelised koordinaadid

7.1 Üldised kõverjoonelised koordinaadid

Vaatame taas eukleidilist kolmruumi. Punkt M on määratud 3 koordinaadiga, Descartes'i ristkoordinaatides x, y, z abil. Analoogiliselt Descartes'i koordinaatidega võime punkti M ruumis määrata ka mingi teise koordinaatsüsteemi abil. Olgu meil defineeritud punkti kõverjoonelised koordinaadid üldise muutujate vahetuse abil:

$$u = u(x, y, z), \qquad v = v(x, y, z), \qquad w = w(x, y, z). \tag{7.1}$$

Funktsioonide u, v, w kohta eeldame, et nad on pidevad koos esimest järku osatuletistega ja jakobiaan

$$J = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.2}$$

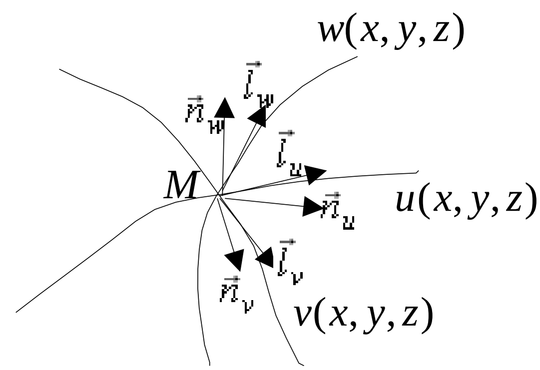
Siis kehtib koordinaatide x, y, z ja u, v, w vahel üksühene vastavus ja leiduvad üheselt määratud funktsioonid

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w). \tag{7.3}$$

Pindasid $u = c_1$, $v = c_2$, $w = c_3$, kus c_1, c_2, c_3 on konstandid, nim koordinaatpindadeks ja kõveraid, mis on iga sellise koordinaatpinna lõikejooneks, nim koordinaatjoonteks. Kui koordinaatpinnad lõikuvad täisnurkade all, siis nim kõverjoonelist koordinaatsüsteemi **ortogonaalseks**.

Olgu $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ punkti M kohavektor. Siis võime võrdused (7.1) kirjutada järgmiselt: $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$. Koordinaatjoone u (v ja w on konstandid) puutujavektor punktis M on

$$\vec{l}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{e}_z \tag{7.4}$$



Analoogiliselt saame määrata puutujavektorid $\vec{l}_v$ ja $\vec{l}_w$.

Punkti M läbivate koordinaatpindade normaalivektorid on gradiendid:

$$\vec{n}_u = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z. \tag{7.5}$$

Samamoodi võime leida $\vec{n}_v$ ja $\vec{n}_w$.

Järelikult saab igas punktis M üldiselt üheselt määrata 2 vektorkolmikut (Descartes'i ristkoordinaatides langevad nad kokku). $\{\vec{l}_u, \vec{l}_v, \vec{l}_w\}$ on koordinaatjoonte puutujasihilised ja $\{\vec{n}_u, \vec{n}_v, \vec{n}_w\}$ koordinaatpindadega risti. Üldjuhul pole need vektorkolmikud ortogonaalsed ega normeeritud (kuigi neid saab lihtsalt normeerida), kuid

$$\begin{cases} \vec{n}_u\vec{l}_u = \vec{n}_v\vec{l}_v = \vec{n}_w\vec{l}_w = 1 \\ \vec{n}_u\vec{l}_v = \vec{n}_u\vec{l}_w = \vec{n}_v\vec{l}_u = \vec{n}_v\vec{l}_w = \vec{n}_w\vec{l}_u = \vec{n}_w\vec{l}_v = 0 \end{cases} \tag{7.6}$$

Vektorkolmikuid, mis rahuldavad tingimusi (7.6) nim **kaaskolmikuteks**.
Rakenduslikku huvi pakuvad eeskätt ortogonaalsed kõverjoonelised koordinaadid, mille korral on koordinaatpinna normaali ja koordinaatjoone puutuja vektorid paralleelsed ning vektorkolmiku vektorid omavahel risti:

$$\vec{n}_u \uparrow\uparrow \vec{l}_u, \quad \vec{n}_v \uparrow\uparrow \vec{l}_v, \quad \vec{n}_w \uparrow\uparrow \vec{l}_w; \quad \vec{n}_u\vec{n}_v = \vec{n}_u\vec{n}_w = \vec{n}_v\vec{n}_w = 0 \tag{7.7}$$

Descartes'i ristkoordinaatide baasi saab ühest ruumipunktist teise viia lihtsa nihke abil. Sellist baasi nim **globaalseks baasiks**. Kõverjooneliste koordinaatide korral on igas ruumipunktis määratud **lokaalne ON baas**.

7.2 Gradient sfäärilistes ja silindrilistes koordinaatides

Punkti M sfäärilised koordinaadid (r, ϑ, φ) ja silindrilised koordinaadid (ρ, φ, z) on ristkoordinaatide (x, y, z) kaudu määratud järgmiselt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \vartheta = \arccos\frac{z}{r}, \qquad \varphi = \arctan, \frac{y}{x} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{7.8}$$

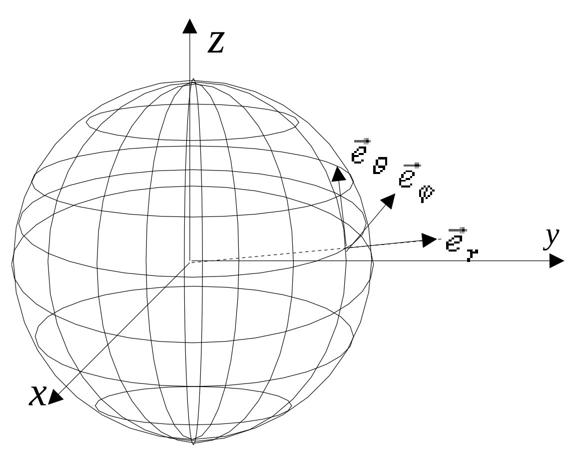
Üleminekuvalemid silindrilistest koordinaatidest ristkoordinaatidesse:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \, . \\ z = z \end{cases} \tag{7.9}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \, . \\ z = r\cos\vartheta \end{cases} \tag{7.10}$$

Lokaalse ortonormeeritud baasi vektorid võime määrata gradiendi kaudu, näiteks $\vec{e}_\varphi = \dfrac{\text{grad } \varphi}{|\text{grad } \varphi|}$. Saab näidata, et lokaalse ON baasi vektorid kõverjoonelistes koordinaatides on

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \frac{1}{r}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z), \\ \vec{e}_\rho &= \frac{1}{\rho}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y), \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \end{aligned} \tag{7.11}$$



$$\vec{e}_\vartheta = \frac{1}{\rho}(z\vec{e}_r - r\vec{e}_z) = \frac{1}{z\rho}[xz\vec{e}_x + yz\vec{e}_y - (x^2 + y^2)\vec{e}_z]. \tag{7.12}$$

Kõrvaloleval joonisel on toodud sfääriliste koordinaatide lokaalse baasi vektorid. Leiame nüüd gradiendi sfäärilistes koordinaatides:

$$\begin{aligned}\text{grad } u &= \Big(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)\vec{e}_x + \Big(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)\vec{e}_y + \\ &+ \Big(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big)\vec{e}_z.\end{aligned}$$

Leides seostest (7.8) vastavad osatuletised ja arvestades seoseid (7.11), saame gradiendi avaldise sfäärilistes koordinaatides

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi. \tag{7.13}$$

Silindrilistes koordinaatides

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z. \tag{7.14}$$

7.3 Divergents ja rootor sfäärilistes ning silindrilistes koordinaatides

Divergents sfäärilistes ja silindrilistes koordinaatides avaldub vastavalt järgmiselt:

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta a_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}a_\varphi, \tag{7.15}$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\rho}(\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}a_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}a_z. \tag{7.16}$$

Rootor sfäärilistes ja silindrilistes koordinaatides vastavalt:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{a} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta a_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}a_\vartheta\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}a_r - \frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta + \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta}a_r\right)\vec{e}_\varphi,\end{aligned} \tag{7.17}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial a_z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\varphi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z. \tag{7.18}$$

Laplace'i operaator sfäärilistes ja silindrilistes koordinaatides:

$$\Delta_{sf}u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}, \tag{7.19}$$

$$\Delta_{sil}u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{7.20}$$

Lisaülesanded.

Ülesanne 158 *Leida Δu, kus $u = zr^3$ (tegemist on 3-ruumiga).*

Ülesanne 159 *Leida 4-vektor* $\mathbf{b}$, *mis on risti vektoriga* $\mathbf{a} = 2\mathbf{e_0} + 4\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2}$ *ja et* $(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$.

Ülesanne 160 *Avaldada skalaarväli* $u = z(x^2 + y^2)$ *sobivates kõverjoonelistes (kas silindrilised või sfäärilised) koordinaadid ja leida* Δu.

Ülesanne 161 *Avaldada skalaarväli* $u = \frac{x}{y}(x^2 + y^2 + z^2)$ *sobivates kõverjoonelistes (kas silindrilised või sfäärilised) koordinaadid ja leida* Δu.