

TALLINNA ÜLIKOOL
Loodus- ja terviseteaduste instituut

SISSEJUHATUS PLASMAFÜÜSIKASSE

Tõnu Laas

2016

Sisukord

1. SISSEJUHATUS. PÕHIMÕISTED	4
1.1. Sissejuhatus.	4
1.2. Plasmafüüsika arengu lühiülevaade	7
1.3. Plasma tekitamine. Plasma ioniseerituse aste.	8
2. Plasma põhilised parameetrid	12
2.1. Ideaalne plasma. Landau kaugus.	12
2.2. Plasma sagedus. Debye kaugus.	12
2.3. Debye varjestus.	14
2.4. Plasma sagedus. Erinevad karakteristikud sagedused ja ajaskaalad.	14
3. Termotuumaprotsessid ja plasma magnetvangistus.	17
3.1. Termotuumaprotsessid.	17
3.2. Tingimused termotuumareaktsiooniks	18
3.3. Ühe osakese liikumine	20
3.4. Osakeste triiv	23
3.5. Adiabaatilised invariandid	25
4. Plasma kineetiline teooria	29
4.1. Jaotusfunktsioon. Boltzmanni ja Vlassovi võrrandid.	29
4.2. Pidevuse võrrand. Momentide võrrandid	30
4.3. Kollektiivsed fenomenid. Plasma ostsillatsioonid.	34
5. Magnetohüdrodünaamika	36
5.1. Plasma kui vedeliku kirjeldus	36
5.2. Magnethüdrodünaamika võrrandid	36
5.3. Alfveni lained	38
6. Kõrgtemperatuurse magnetvangistuse seadmed. Rakendused	40
6.1. TOKAMAK-tüüpi seadmed	40
6.2. Plasma-fookusseadmed	40
6.2.1. Plasma-fookus-seadme tööpõhimõte	40
6.2.2. Plasma-fookus seadme rakendusi	41

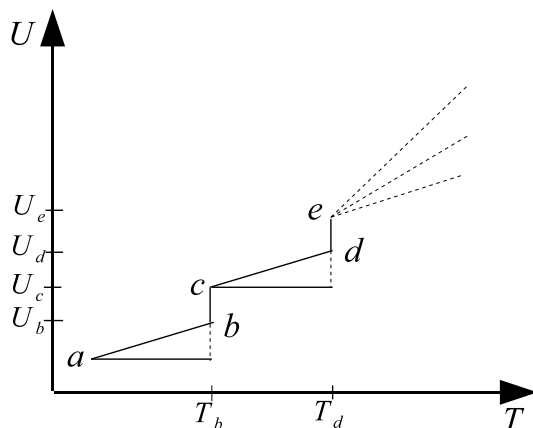
7. Astrofüüsikalised ja geomagnetilised plasmad	43
7.1. Päikese magnetism	43
7.2. Planetaarsed magnetväljad	44
7.3. Magnetosfääri plasmad ja päikesetuul	44
8. Plasma diagnostika	45
8.1. Plasma spektroskoopia	45
8.2. Spektraalsed kiirusjooned	46
References	48

1. SISSEJUHATUS. PÕHIMÕISTED

1.1. Sissejuhatus.

Kõigile on teada aine kolm olekut (agregaatolekuks): tahke, vedel ja gaasiline. Aine temperatuuri tõstmisel muutub algselt tahke aine vedelaks, edasisel temperatuuri tõusul gaasiliseks. Neid võib nimetada aine olekuteks "tavalistes", st Maal tavalistes tingimustes. Antud kursuse raames räägitakse plasmast, mida on sageli nimetatud ka aine neljandaks olekuks. Põhiline erinevus neutraalse gaasi ja plasma vahel tuleneb tõsiasjast, et plasma puhul ei saa eirata osakeste omavahelist Coulomb'i vastastikmõju. Isegi juhul, kui vaid väike osa gaasi molekulidest on ioniseeritud, siis nendevaheline vastastikmõju võib mõjutada gaasi kui terviku käitumist oluliselt.

Joonisel 1 on toodud ühes fikseeritud ainehulgas (olgu see näiteks 1 kg) sisalduva energia hulga sõltuvus tema temperatuurist. Piisavalt madalal temperatuuril on aine tahkes olekus. Joonisel 1 kujutab seda lõik a-b. Kindlal temperatuuril T_b hakkab aine sulama ning juurdeantav energia läheb aine sulatamiseks (temperatuur seejuures ei kasva). Seda kujutab lõik b-c. Energiate vahe $U_c - U_b$ vastab ainekoguse 1 kg korral sulamissoojusele. Lõik c-d kujutab vedeliku siseenergia sõltuvust temperatuurist - aine jääb vedelasse olekusse, suureneb vaid molekulide kineetiline energia. Punktis d temperatuuril T_d algab aurustumine (lõik d-e vastab vedeliku aurustumisele) - energia läheb molekulide vaheliste sidemete lõhkumiseks. Energiate vahe $U_e - U_d$ on aine aurustumissoojus. Tuleb märkida, et antud skeem kehtib kindla rõhu korral - on ju teada, et näiteks rõhu tõstmisel tõuseb ka keemistemperatuur.



Joonis 1: Ainehulgas sisalduva energia sõltuvus aine temperatuurist.

Temperatuuri edasisel tõstmisel muutub gaasi molekulide kineetiline energia nii suureks, et molekulide põrgetel lagunevad molekulid aatomiteks (molekulide kineetiline energia ületab aatomitevahelise seoseenergia). Seega muutub gaasi koostis. Tõstes gaasi temperatuuri mingi kriitilise temperatuurini muutub aatomite kineetiline energia suuremaks elektrone ja aatomituuma siduvast elektrostaatilisest energiast. Seetõttu lüüakse gaasiosakeste omavaheliste põrgete tagajärjel aatomist välja elektrone - aatomid muutuvad

ioonideks. Neutraalsetest aatomitest koosneva kuuma gaasi asemele oleme saanud vastasmärgiliselt laetud osakestest - elektronidest ja positiivsetest ionidest - koosneva segu ehk plasma. Neutraalset gaasi saab ioniseerida ka UV või röntgenkiirgusega, samuti selle pommitamisel suure energiaga elektronidega või ioonidega.

Plasma võib defineerida järgmiselt:

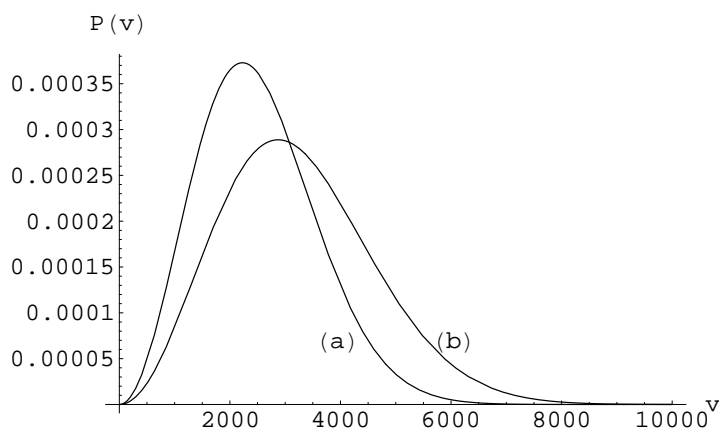
Plasma on täielikult ioniseeritud gaas, mis koosneb vabalt liikuvatest positiivsetest ioonidest ehk aatomituumadest ning negatiivselt laetud elektronidest.

Plasmat nimetatakse ka aine neljandaks olekuks. Kuigi Maal esineb plasmat märksa vähem kui ainet ülejäänud kolmes olekus, pole see Universumis haruldane - 90% Universumi ainest on plasma.

Teame, et gaas koosneb vabade molekulide või (harvem) aatomite segust. Need osakesed põrkuvad üksteisega, anuma seintega ja kokkuvõttes on gaasi molekulid tervikuna väliskeskkonnaga tasakaalus, kuid molekulide kiirus pole kõigil võrdne, vaid vastab tasakaaluolekule - Maxwelli jaotusele. Joonisel 2 on toodud Maxwelli jaotuse graafik - graafiku horisontaalteljel on molekulide kiirus, vertikaalteljel tõenäosustihedus (tõenäosus, et osakese kiirus on vahemikus $]v, v + dv[$ (vt. täpsemalt üldfüüsika õpikutest [1-3]).

Maxwelli jaotust kirjeldab jaotusfunktsioon:

$$P(v) := \frac{dN}{Ndv} = 4\pi \sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (1.1)$$



Joonis 2: Maxwelli jaotus vesiniku aatomi korral. (a) $T = 300K$, (b) $T = 600K$.

Seost (1.1) analüüvides näeme, et väikeste kiiruste korral on jaotusfunktsioon ligikaudu võrdeline kiiruse ruuduga v^2 , suuremate kiiruste korral hakkab domineerima eksponentfunktsioon, st jaotusfunktsioon $P(v) \sim e^{-v^2} \rightarrow 0$ (kui $v \rightarrow \infty$). Seega, väga väikese või väga suure kiirusega liikuvaid molekule on vähe, enim on molekule, mille kiirused on tõenäolisima kiiruse v_t juures. Tänu gaasi osakeste pidevatele omavahelistele põrgetele muutuvad nende kiirused pidevalt, kuid kiiruste jaotus aja jooksul ei muutu.

Kuigi väga suurte kiiruste (ja seega ka suure kineetiliste energiatega) osakesi on vähe, kasvab selliste osakeste hulk temperatuuri tõstmisel. Kui kokkupõrkuvate molekulide

kineetiline energia E_k on piisavalt suur, võib pörkel toimuda ühe või mõlema molekuli ergastamine (molekuli kui terviku ergastamine või molekulis olevate elektronide ergastamine), kuid võib toimuda ka molekuli lagundamine aatomiteks (dissotsiatsioon). Samuti võib toimuda molekulide ionisatsioon. Näiteks normaaltingimuste juures ($p \approx 10^5$ Pa, $T \approx 300K$) on 1 cm^3 -s õhus umbes $2,7 \cdot 10^{19}$ molekuli ning neist umbes $10^3 - 10^5$ on ioonid.

Ionisatsiooni, ergastamise ja dissotsiatsiooni protsessid leiavad aset molekulide mitte-elastsetel pörgetel, mil osa molekulide algsest kineetilisest energiast läheb ioniseerimiseks, ergastamiseks või molekulide lagundamiseks. Tavalises gaasis on mitteelastseid pörkeid võrreldes elastsetega vähe, kuid temperatuuri kasvamisel nende arv suureneb. Plasma uurimisel on eriti oluline ioniseerimise protsess, mille käigus aatomid või molekulid lagunevad ioonideks ja elektronideks.

Miks on ioniseerimine aine käitumise seisukohalt oluline? Aatomid ja molekulid on tervikuna neutraalsed. Seetõttu võib ka nende vahelisi pörkeid käsitleda elastsetena. Elektronid ja ioonid on elektriliselt laetud ning see mõjutab sellistest osakekest koosneva aine osakeste vahelist vastastikmõju. Jämedalt öeldes - pörgetel hakkavad osakesed üksteist kaugemalt mõjutama - nende vahel mõjuvad Coulombi'i jõud, samas kui neutraalsete osakeste korral ulatub elektriline mõju suhteliselt lähedale - toimivad nn van der Waalsi jõud. Just 'kaugem' mõju võrreldes neutraalsetest osakekest koosneva gaasiga viib uute nähtuste - plasmanähtuste tekkeni.

Gaasi ja vedeliku või vedeliku ja tahkise vahele võib tõmmata üsna selge piiri - öelda, millal aine on gaas või vedelik või tahkis. Gaasi ja plasma vahel sellist vahet pole - temperatuuri tõstmisel muutub gaas neutraalse gaasi ja plasma seguks, milles üha enam domineerib plasma osalus. Saha valem (vt allpool) lubab hinnata ioonide-elektronide paaride kontsentratsiooni gaasis, näiteks ka küünlaleegis, teades tema temperatuuri. Kuid nii madala temperatuuriga gaasi nagu küünlaleek ei nimetata plasmaks - domineerivad veel neutraalsete osakeste omadused.

Plasmat ja gaasi eraldava 'piiri' otsimisele võib läheneda ka teiselt poolt. "Tõeline plasma" koosneb ainult ioonide ja elektronide segust ning jääb plasmaks kuni neutraalsed gaasi osakesed ei mõjuta oluliselt tema omadusi. Täpsemaks definitsiooniks, millal võib gaasi lugeda plasmaks ja millal mitte, on vaja kvalitatiivset kriteeriumi. Sellised kriteeriumid saab panna paika kasutades Langmuiri sageduse ja Debye kauguse mõistet (vt 2. pt). Neid mõisteid ja plasma definitsiooni kasutades selgub, et plasmale omased efektid ilmnevad ka muudes keskkondades - näiteks elektrongaas metallides, elektron-auk "vedelik" pooljuhtides, tähtede kiirguse poolt ioniseeritud gaas kosmoses jms. Selliseid keskkondi nim. plasmasarnasteks. Ka elektrolüüte (ka näiteks vereplasma inimkehas) nimetatakse sageli plasmasarnasteks.

Metallides leiduvat elektrongaasi nimetatakse kõdunud elektrongaasiks. Sellise nimetuse põhjuseks on suur kontsentratsioon ja elektronide lähedus Fermi energiale. Kui temperatuur langeb alla Fermi energiale vastava energia, siis hakkavad suure kontsentratsiooniga osakeste korral domineerima kvantefektid (nt ülijuhtivus, ülivoolavus). Täpsem seos on määratud sellega, kui palju osakeste energia erineb Fermi energiast. Meie käsitleme oma kursuse raames "mittekõdunud" plasmat - osakeste kontsentratsioon on väga väike ja/või temperatuur on väga kõrge. Tihti lisatakse plasmat iseloomustava omadusena, et plasma ei ole elektromagnetkiirgusele läbipaistev. Viimane väide kehtib tähtede ja

väga kõrgetemperatuurse tiheda plasma kohta, kuid näiteks laborites on plasma keskkond pigem optiliselt (ja seega ka elektromagnetiliselt) läbipaistev.

Toome nüüd mõned järeldused plasma omaduste kohta.

- Plasma - see on osaliselt või täielikult ioniseeritud gaas, milles positiivselt ja negatiivselt laetud osakeste arv on võrdne. Sellist segu nimetatakse kvaasineutraalseks, sest kuigi ta moodustub erinimeliselt laetud osakeste segust, on see tervikuna neutraalne.
- Laetud osakesed mõjuvad plasmas (Coulomb'i) jõududega, mis iseloomustavad 'kaugmõju' ('kaug' võrreldes neutraalsete osakeste vahel mõjuvate van der Waalsi jõududega). Viimane tingib plasmas paljude kollektiivsete efektide olemasolu.
- Plasmas leiduvad lained ja müra, mis omakorda mõjutavad plasma osakesi. Kui võnkumised plasmas muutuvad ebaregulaarseks, siis tekivad turbulentsid, st mitte-lineaarsed efektid. Üldiselt on kaasaegne plasmafüüsika seotud just mittelineaarsete efektidega. Kuivõrd mittelineaarseid protsesse uuriv füüsika on arenenud tugevalt just viimasel 60 aastal, siis on see valdkond suhteliselt uus.
- Plasmat iseloomustavad veel enesega kooskõlalised väljad - uurides plasma käitumist välises väljas, peame arvestama ka seda, et plasma omakorda tekitab elektromagnetvälja, mis tuleb lisada välisele ning mis koos mõjutavad plasmat. Seetõttu on kogu käsitus keeruline võrreldes tavalise elektrodünaamikaga, kus käsitletakse laetud osakese liikumist välises väljas, jättes arvestamata osakese enda poolt tekitatud välja.

1.2. Plasmafüüsika arengu lühiülevaade

Plasma mõiste toodi teadusesse esmalt vereplasma - erinevatest osakestest puhastatud läbipaistva vedeliku - nimetamiseks Tšehhi meediku Johannes Purkinje (1787-1869) poolt. Ioniseeritud gaasi kirjeldamiseks kasutati plasma mõistet 1927-1928.a. Irving Langmuiri ja Lewi Tonksi poolt. Langmuir ja Tonks uurisid hõõglampide volframniite ning leidsid, et need on ümbritsetud plasmakihist. Plasmalahenduslampide uurimisel avastas Langmuir elektronide tiheduse võnkumised, mida tänapäeval tuntakse Langmuiri lainete nimetuse all. Langmuiri tööd panid aluse elektronskeemide plasmatootmistehnikale.

Plasma uurimissuundadest võib nimetada 5 olulisemat.

Esimene - raadio ringhäälingu areng viis Maa ionosfääri uuringuteni. Maa ionosfäär on Maa atmosfääri ülemises kihis osaliselt ioniseeritud gaasi kiht, mis peegeldab raadiolaineid. Tänu viimasele on meil võimalik raadiolainete vastvõtt horisondi tagant, mitte ainult antennist otsese nägemisulatuseni. Paraku ionosfäär ka neelab ja häiritab raadiolaineid. Ionosfääris raadiolainete leviku paremaks mõistmiseks ning raadiokommunikatsiooni parandamiseks on arendatud välja mittehomoogeenses magnetiseeritud plasma keskkonnas elektromagnetlainete levimise teooria.

Teiseks on plasmafüüsika rakendused astrofüüsikas, siin oli pioneeriks Hannes Alfvén 1940. aastal, kes pani aluse *magnetohüdrodünaamikale* (MHD), mis käsitleb plasmat elek-

trit juhtiva vedelikuna. Antud teooriat on rakendatud edukalt päikeseplekkide, loidete, päikesetuule, tähetekke jm astrofüüsikaliste uurimisobjektide kirjeldamisel.

Kolmandaks on plasmafüüsika rakendus seotud kontrollitud termotuumareaktsiooni ehk tuumade sünteesiga. Huvipakkuvaks suunaks on siin termotuumareaktsiooni rakendamine energiaallikana tulevikus. Põhiline osa nimetatud teooriast on loodud 1950. aastal lõpus 1960. aastatel.

Neljas oluline rakendus on seotud 1958. a. James van Alleni avastusega, et Maad ümbritsevad kiirgusvööndid (van Alleni vööd), kui koguti andmeid Maa magnetosfäärilist satelliidi abil. Need uuringud on avanud kosmose plasmafüüsika valdkonna. Kosmosefüüsikud on laenanud plasma lukustamise teooria termotuumafüüsikutelt, plasmalainete teooria ionosfääri uurijatelt ning mitmeid osasid veel ka astrofüüsikutelt.

Viies olulisem plasmafüüsika suund on seotud laserite leiutamise ja võimsate laserite rakendamisega 1960. aastal - laser-plasma-füüsika. Võimsa laserikiire juhtimisel tahkisesse aurustub aine hetkeliselt ning tekib tihe plasmakogum. Plasma tihedus võib lühikeses ajavahemikus ulatuda kuni tahkise tiheduseni. Laser-plasmafüüsika praegune olulisem uurimissuund on seotud plasma inertsaalse vangistamisega. Selle kohaselt suunatakse võimas laserikiir tahkele kehale, et tekitada selles temperatuur ja tihedus nagu vesinikupommi keskmes.

Kuuendaks võib lisada plasma rakendused tehnoloogias materjalide katmisel õhukeste metallikiledega, materjalide nõ kuumtöötlemise jms.

1.3. Plasma tekitamine. Plasma ioniseerituse aste.

Plasma tekitamine põrgetel.

Järgnevad tähistame osakeste põrked järgmiselt:

$AB + CD \rightarrow AB + CD$	Absoluutselt elastne põrge. Kehtivad nii impulsi jäävuse seadus kui ka mehaanilise energia jäävuse seadus.
$AB + CD \rightarrow AB^* + CD$	Mitteelastne põrge. Põrkel on ergastatud AB molekul.
$AB + CD \rightarrow A + B + CD$	Dissotsiatsioon. Võib toimuda ka mõlema algse molekuli lagunemine ning samaaegselt mõne lõpposakese ergastamisega.
$AB + CD \rightarrow AB^+ + CD + e^-$, $AB + CD \rightarrow A + B^+ + CD + e^-$ jne	Ionisatsioon. Palju erinevaid võimalusi.

Nii dissotsiatsioon kui ka ionisatsioon on lävienergiaga protsessid, st kui põrkuvate molekulide summaarne kineetiline energia on väiksem vastavalt kas molekuli lagunemiseks või ioniseerimiseks vajalikust energiast (ehk lävienergiast), siis protsess ei saa toimuda.

Dissotsiatsiooni vastandprotsess on assotsiatsioon ehk molekulide osade ühinemine molekuliks. Ionisatsiooni vastandprotsess on rekombinatsioon.

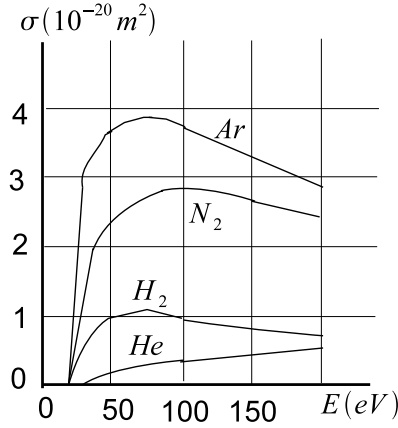
Ergastatud olekus ei saa aatom või molekul olla kaua, üldiselt on see aeg $10^{-7} - 10^{-9}$ s. Selle aja vältel läheb aatom tagasi ergastamata olekusse kiirates footoni. Aatomid

võivad olla ergastatud vaid elektrontasemel, st elektronid on kõrgemal energiatasemel, kuid molekulid võivad olla ergastatud ka võnketasanditel.

Plasmat saab tekitada peale gaasi osakeste omavaheliste põrgete ka gaasi aatomite kiiritamisel elektromagnetkiirgusega (näiteks kosmoses), või aatomi kiirel liikumisel tugevas elektromagnetväljas - nn Lorentzi ionisatsioon.

Molekulide põrkeid iseloomustatakse põrke ristlõikepindalaga σ . Elastsete põrgete korral on $\sigma \approx d^2$, kus d - molekuli diameeter. Näiteks vesiniku aatomi korral on Bohri raadius $r_B = 0,529 \cdot 10^{-10}$ m ning $\sigma \sim 10^{-20} \text{ m}^2$.

Käsitledes näiteks aatomi ioniseerimist elektroni poolt, siis lävitemperatuuril on $\sigma = 0$, st elektron annab kogu oma kineetilise energia aatomist elektroni väljalöömisele ning peab aatomit tabama seejuures otse tsentrisse. Temperatuuri kasvades suureneb ka põrke ristlõikepindala, kuni mingist maksimaalväärtusest alates hakkab uuesti langema. Viimase asjaolu põhjus on järgmine - väga suurte temperatuuride korral liiguvad elektronid väga suure kiirusega, seetõttu toimub elektroni ja aatomi vastastikmõju lühema aja jooksul. Seetõttu peab väline elektron aatomis oleva elektroni mõjutamiseks sattuma aatomile lähemale. Põrke ristlõikepindalade sõltuvus temperatuurist on toodud joonisel 3.



Joonis 3: Ionisatsiooniristlõikepindala sõltuvus temperatuurist erinevate gaaside korral.

Osakeste füüsikas antakse tihti osakeste kineetiline energia elektronvoltides (eV), ning antud energiale vastav temperatuur seosega

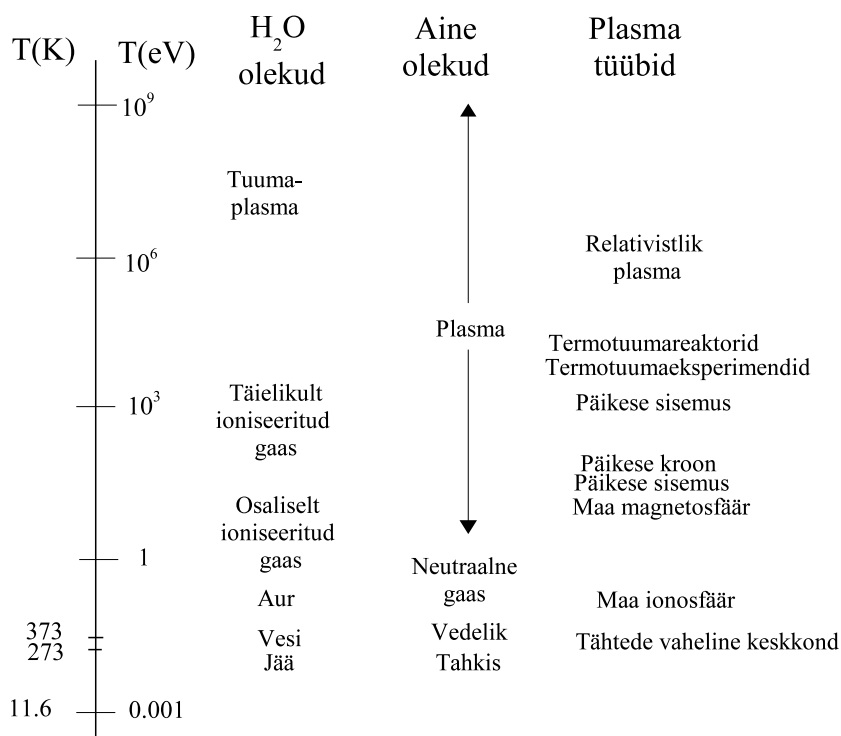
$$E_k = \frac{mv^2}{2} = kT, \quad (1.2)$$

kus $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ on Boltzmanni konstant. Teatavasti $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Joonisel 4 on toodud näited, millised plasmad vastavad erinevatele temperatuuridele ning osakeste kineetilistele energiatele.

Ioonide ja neutraalsete aatomite kontsentratsioonide suhet võimaldab hinnata Saha valem:

$$\frac{n_i}{n_n} = \frac{\pi_i \pi_e}{\pi_n} \left(\frac{2\pi m_e k}{h^2} \right)^{3/2} \frac{T^{3/2}}{n_e} \exp\left(-\frac{U_i}{kT}\right), \quad (1.3)$$



Joonis 4: Plasma tüübid erinevatel temperatuuridel, võrdlus aine ja vee olekutega.

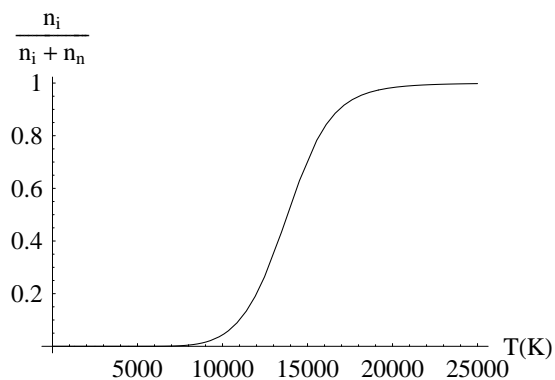
kus n_i, n_n, n_e vastavalt ionide, neutraalsete aatomite ja elektronide kontsentratsioon, π_i, π_n, π_e - ionide, neutraalsete aatomite ja elektronide statistilised kaalud, $\pi_i = \pi_e = 2$, vesiniku korral $\pi_n = 1$. U_i - ionisatsiooni energia, vesiniku korral $U_i = 13,6$ eV.

Arvestades seost (1.4) ning võttes rõhu võrdseks $p = 10^5$ Pa, sõltub vesiniku ioniseerituse aste temperatuurist nii nagu näidatud joonisel 5.

Küsimused, kordamisküsimused ja ülesanded.

1. Mida nimetatakse elastseks, mida mitteelastseks pörkeks? Millised mehaanika seadused kehtivad elastse ja millised mitteelastete pörgete korral?
2. Täida järgnev tabel osakeste kineetilise energia (antud elektronvoltides) ja sellele vastava temperatuuri (antud kelvinites) ning nendele energiatele vastava elektroni ning prootoni kiiruse jaoks. Lisa joonisele 4 temperatuur kelvinites vastavate $T(eV)$ väärtuste juurde.

Tabel 1. Osakese kineetilise energia $E(eV)$, temperatuuri $T(K)$ ning elektronide ja prootonite kiiruste vaheline skaala.



Joonis 5: Vesinikuplasma ioniseerituse astme sõltuvus temperatuurist konstantse rõhu $p = 10^5$ Pa korral.

$E(eV)$	$T(K)$	$v_e(m/s)$	$v_p(m/s)$
1	11600		
10			
13,6			
1000			
10^6			

3.. Arvestades konstantse rõhuga $p = nkT$, kus $n = n_n + n_i + n_e$ - gaasi kontsentratsioon, näidata, et Saha valemist (1.3) järeldeb, et gaasi ioniseerituse aste:

$$\frac{n_i}{n_i + n_n} = \left(1 + \frac{p}{kTS}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.4)$$

$$\text{kus } S = \frac{\pi_i \pi_e}{\pi_n} \left(\frac{2\pi m_e k}{h^2}\right)^{3/2} T^{3/2} \exp\left(-\frac{U_i}{kT}\right).$$

2. Plasma põhilised parameetrid

2.1. Ideaalne plasma. Landau kaugus.

Kui gaasi kontsentratsioon on n , siis osakestevaheline keskmine kaugus on $\langle r \rangle = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Gaasi võib käsitleda makroskoopilisena, kui selle gaasikogumi mõõde L on palju suurem osakeste vahelisest keskmisest kaugusest $L \gg \langle r \rangle$.

Ideaalseks plasmaks nimetatakse plasmat, mille korral osakeste vahelise vastastikmõju energia on väike võrreldes nende kineetilise energiaga.

Plasma korral kirjeldab osakestevahelist vastastikmõju Coulombi'i jõud, mille korral elektronide vaheline potentsiaalne energia on

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\langle r \rangle} = \frac{e^2 n^{1/3}}{4\pi\epsilon_0} \ll kT = E_K. \quad (2.1)$$

Kui üks elektron läheneb teisele, siis kineetiline energia väheneb ning potentsiaalne energia suureneb. Ilmselt võib elektron läheneda teisele maksimaalselt nii kaugele kuni kineetiline energia on muutunud nulliks.

Landau kaugus λ_L - vähim vahemaa keskmise energiaga samasuguste osakeste vahel, milleni osakesed tänu oma kineetilisele energiale on võimelised jõudma.

Võrdsustades osakese kineetilise energia potentsiaalse energiaga teise samasuguse osakese elektriväljas potentsiaaliga ϕ :

$$kT = q\phi = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\lambda_L}.$$

Siit saame

$$\lambda_L = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 kT}. \quad (2.2)$$

2.2. Plasma sagedus. Debye kaugus.

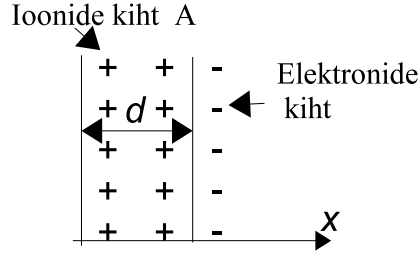
Lähtume elektrostaatikast ning lihtsuse mõttes eeldame, et ioonid ja elektronid paiknevad tasanditena (vt joonis 6). Oletame, et tänu soojusliikumise fluktuatsioonile on elektronide kiht ionide kihi suhtes nihutatud d võrra. Kuivõrd iooni mass on märksa suurem elektroni massist, siis võime lugeda ioonid praktiliselt paigalolevateks selliste fluktuatsioonide suhtes.

Kaugusel d tekitab ionide kiht A elektrivälja, mille väljatugevus on

$$E = 4\pi\sigma d \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}.$$

Laengu pindtihedus $\sigma = ne$. Seega

$$E = \frac{dne}{\epsilon_0}. \quad (2.3)$$



Joonis 6: Elektronide tasandi nihe ionide tasandi suhtes.

Väljanihutatud elektronidele mõjub elektrostaatilisest väljast jõud $\vec{F} = e\vec{E}$. Elektronide tagasiviimiseks vajalik töö on

$$A = \int_0^d F ds = eEd = \frac{e^2 nd^2}{\epsilon_0}.$$

Teisalt, arvestades, et väli teeb tööd A , et osakest tagasi tõmmata, siis selleks, et elektron algselt soojusliikumise tõttu nii kaugemale liiguks, peab tal olema kineetiline energia, mis on võrdne A -ga. See annab maksimaalse kauguse $\lambda_D = d$,

$$kT = \frac{e^2 nd^2}{\epsilon_0}$$

$$\lambda_D := d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{e^2 n}}. \quad (2.4)$$

Suurust λ_D nimetatakse **Debye kauguseks**, mis näitab kui kaugemale maksimaalselt võib elektron soojusliikumise tõttu liikuda.

Osakesed ei saa soojusliikumise tõttu ületada Debye kaugust, sellest väiksemate vahemaade korral võib aga laengute keskmine tihedus fluktueeruda. **Seega võib plasmat lugeda kvaasineutraalseks, kui piirkonna karakteristiklik mõõde $d \gg \lambda_D$.**

Märkused:

Seose (2.3) näitamiseks, peaksime tegelikult lähtuma Poissoni võrrandist.

Debye kauguse arvutamiseks tuleb tegelikult arvestada nii elektronide kui ka ionide kontsentratsiooni. Arvestades mõlemat, on täpne valem tegelikult:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{\sum_j Z_j^2 e^2 n_j}},$$

kus $j = e, i$, n_e - elektronide kontsentratsioon, n_i - ionide kontsentratsioon.

Kui võrd edaspidises on olulised arvutused suurusjärgu piires, siis lihtsuse mõttes kasutame Debye kauguse arvutamisel valemit (2.4).

2.3. Debye varjestus.

Oletame, et laeng q (elektron võiioon) paikneb plasmas, mille ioonide laeng on Ze . Saab näidata, et ümber laengu q on sel juhul laengutihedus järgmine:

$$\rho_E = \sum_j Z_j e n_j = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\lambda_D^2} \cdot \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r},$$

kus $j = 1$ - elektronid, $Z_1 = 1$, $j = 2$ - ioonid, $Z_2 = Z$ (iooni laenguaste). St, laengut q ümbritseb vastasmärgiliste laengute pilv, mis r suurenedes langeb eksponentsiaalselt ning kaugusel λ_D on see laeng teda ümbritsevate laengute poolt varjestatud - Coulomb'i potentsiaal selle laengu poolt pole väljapoole enam tunda. Seda efekti nimetatakse **Debye varjestuseks**.

Debye varjestus kehtib juhul, kui laengut q ümbritsevas sfääris raadiusega λ_D on suur arv laenguid. Sfääris raadiusega λ_D asuvate osakeste arvu nimetatakse **plasma parameetriks**:

$$N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n. \quad (2.5)$$

Plasma varjestus kehtib juhul, kui $N_D \gg 1$. Arvestades seoseid (2.2), (2.4) ja (2.5) võime plasma parameetri elektroni jaoks kirjutada järgmiselt:

$$N_D = \frac{1}{3} \frac{\lambda_D}{\lambda_L} \sim \left(\frac{\langle r \rangle}{\lambda_L} \right)^{3/2}. \quad (2.6)$$

Seega tingimus $N_D \gg 1$ tähendab, et osakestevaheline keskmine kaugus $\langle r \rangle$ on palju suurem Landau kaugusest, seega - laetud osakesed ei suuda teisele samamärgiliselt laetud osakesele lähedale jõuda (nende kineetilisest energiast piisaks vahemaa λ_L läbimiseks).

2.4. Plasma sagedus. Erinevad karakteristlikud sagedused ja ajaskaalad.

Plasma elektronide soojusliikumise energia on nii väike, et nad ei saa nihkuda rohkem kui Debye kauguse λ_D võrra. Samas, kui nihe on väiksem, hakkavad elektronid ostsilleerima. Hindame ostsillatsioonide sagedust. Elektronile mõjuv (ja tasakaaluoleku poole tagasitõmbav jõud) on elektrostaatiline jõud:

$$\begin{aligned} m_e \ddot{x} &= -eE = -\frac{e^2 n x}{\epsilon_0}, \\ m_e \ddot{x} + \frac{e^2 n x}{\epsilon_0} &= 0, \\ \ddot{x} + \frac{e^2 n x}{\epsilon_0 m_e} &= 0. \end{aligned}$$

Oleme saanud vabavõnkumiste võrrandi $\ddot{x} + \omega_p^2 x = 0$, kus vabavõnkumiste sagedus

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n}{\epsilon_0 m_e}}. \quad (2.7)$$

Sagedust ω_p nimetatakse **Langmuiri sageduseks**. Elektronide võnkumise periood $T = \frac{2\pi}{\omega_p} \sim \frac{1}{\omega_p}$ näitab ette ajaskaala, mille jooksul elektron suudab reageerida elektromagnetvälja muutusele. Kuivõrd ionide mass on tuhandeid kordi suurem elektroni massist, siis ionid võnkumises ei osale, neid võib antud juhu jaoks lugeda praktiliselt paigalseivateks. Juhul, kui välise elektromagnetlaine sagedus $\omega > \omega_p$, siis ei võnguta väline elektromagnetlaine plasma elektrone - väline laine läbib plasma. Kui aga $\omega < \omega_p$, siis võib selline laine tungida plasmasse maksimaalselt sügavuseni

$$d_c = \frac{c}{\omega_p} = 5,31 \cdot 10^6 \frac{1}{\sqrt{n_e}} \text{ m.}$$

Analoogiliselt on ka metallide sees sügavus, millest sügavamale väline elektromagnetväli ei tungi.

Mikroskoopilisi vastastkõjusid raadiusega λ_D Debye sfääris paiknevate osakeste vahel iseloomustatakse põrgete sagedusega. Leiame, milline on keskmine põrgete sagedus (põrgete arv ajaiühikus) nimetatud sfääris olevate osakeste vahel.

Võtame põrke ristlõikepindala $\sigma \sim \lambda_L^2$, kus Landau kaugus on antud seosega (2.4). Osakeste keskmine kiirus $\langle v \rangle \sim \sqrt{\frac{kT}{m_e}}$. Elektronide põrkumise sagedus on seega

$$\nu_e = n \langle \sigma v \rangle \sim n \lambda_L^2 \sqrt{\frac{kT}{m_e}} \sim \frac{ne^4}{\varepsilon_0^2 (kT)^{3/2} \sqrt{m_e}}. \quad (2.8)$$

Seega, $\frac{\nu_e}{\omega_p} \sim \frac{1}{N_D} \ll 1$. St, dünaamiline ajaskaala $1/\omega_p$, mis iseloomustab elektronide reageerimisaega välja muutustele, on palju lühem, kui soojusliku energia ümberjaotamise ajaskaala $1/\nu_e$. Kui väline väli muutub, siis reageerivad elektronid välisele väljale, kuid soojuslikku energiat ei jõua kiiresti ümber jaotada, seetõttu ei saavutata plasmal soojuslikku tasakaalu.

Elektronide keskmine vaba tee pikkus:

$$\lambda_{vt} = \langle v \rangle \frac{1}{n u_e} = \sqrt{\frac{kT}{m_e}} \cdot \frac{1}{\nu_e}.$$

Seega $\frac{\lambda_D}{\lambda_{vt}} \sim \frac{1}{N_D} \ll 1$.

Kui plasma parameeter $N_D \rightarrow \infty$ (on väga suur), siis võib mikroskoopilised efektid kõrvale jätta ja käsitleda plasmal vaid keskmise elektromagnetvälja poolt määratuna.

Kokkuvõttes:

$$\left(\frac{\lambda_L}{\langle r \rangle} \right)^{3/2} \sim \left(\frac{\langle r \rangle}{\lambda_D} \right) \sim \frac{\lambda_D}{\lambda_{vt}} \sim \frac{1}{N_D} \ll 1.$$

Kui plasma parameeter ehk Debye sfääris sisalduvate osakeste arv $N_D \rightarrow \infty$, siis võib mikroskoopilised efektid kõrvale jätta ja käsitleda plasmal keskmise elektromagnetvälja poolt määratuna, vastasel juhul tuleb arvestada elektromagnetvälja iseloomustavate suuruste (laengu tihedus, elektrivälja tugevus vms) fluktuatsioone.

Küsimused, kordamisküsimused ja ülesanded.

1. Mida nimetatakse Landau kauguseks? Debye kauguseks? Osakeste vaheline vaba tee pikkus? Mille poolest erinevad Landau kaugus ja Debye kaugus (milliste osakeste vahelist interaktsiooni uuritakse)?

2. Täida järgnev tabel.

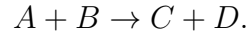
Tabel 2. Plasmat iseloomustavad parameetrid erinevate plasmatüüpide korral.

Plasma liik	$T(eV)$	$n \left(\frac{1}{m^3} \right)$	$\lambda_L(m)$	$\lambda_D(m)$	$\lambda_{vt}(m)$	$\omega_i(1/s)$	$\nu_i(1/s)$	N_D
Tähtedevaheline gaas	0,01 – 1	10^6						
Pint	100	10^{22}						
Päikese atmosfäär	1	10^{20}						
Päikese tuum	1000	10^{32}						
TOKAMAK	100 – 10000	$10^{18} - 10^{20}$						
Päikese kromosfäär	200	10^{12}						
Maa ionosfäär	0,1	$10^5 - 10^{12}$						

3. Termotuumaprotsessid ja plasma magnetvangistus.

3.1. Termotuumaprotsessid.

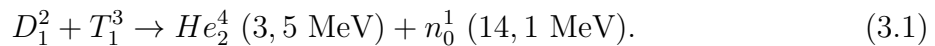
Termotuumareaktsioonideks nimetatakse tuumade ühinemisreaktsioone, mille käigus alg-tuumade A ja B liitumisel tekib üks raskem tuum C , ning veel üks osake või tuum D :



Energia eraldub sel protsessil juhul, kui ilmneb massidefekt, st, kui kehtib võrratus:

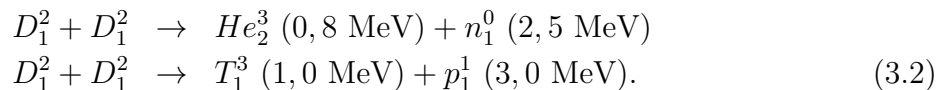
$$(m_A + m_B)c^2 > (m_C + m_D)c^2,$$

st - algosakeste seisuenergiate summa on suurem kui lõpposakeste seisuenergiate summa. Laboratoorseses süsteemides on protsessil osalevateks tuumadeks vesiniku isotoobid deuteerium D_1^2 ja triitium T_1^3 . Nimetatud gaaside segu arvatakse loodava termotuumareaktori jaoks olevat kõige perspektiivsem. Deuteeriumi ja triitiumi liitumisel tekib He_2^4 ja neutron n_0^1 , kusjuures eraldub 17,6 MeV energiat, millest 3,5 MeV saab heeliumi aatomituum kineetilise energiana, ning 14,1 MeV neutron kineetilise energiana:

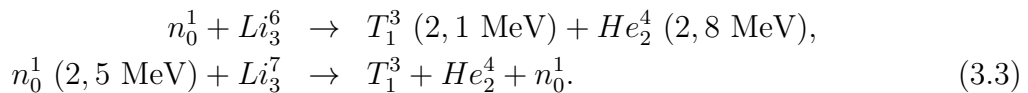


Deuteerium on stabiilne aatomituum, mida sisaldub ka tavalises vees. Näiteks ookeanis on iga 6500 vee molekuli kohta 1 raske vee D_2O molekul. Triitium on radioaktiivne element poolestusajaga 12 aastat, seetõttu looduslikult seda ei leidu. Termotuumareaktsiooniks vajalikku triitiumit saadakse liitiumi aatomituumadest.

Deuteeriumi tuumade liitumisel on võimalikud järgmised protsessid:

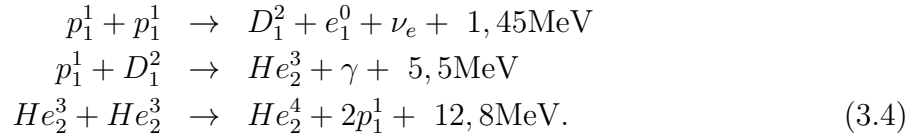


Kavandatavas termotuumareaktoris, kus kasutatakse $D + T$ -protsessi, jäävad elektriliselt laetud heeliumi aatomi tuumad plasmasse. Elektriliselt neutraalseid neutroneid ei saa magnetväljaga kinni hoida, seetõttu liiguvad need plasmast välja ning pidurdatakse reaktorit ümbritsevas vedelas liitiumis, kus neutronite kineetiline energia muudetakse soojusenergiaks. Ühtlasi toimuvad järgmised protsessid:



Protsessidest (3.3) esimesel energia eraldub, teisel neeldub. Nimetatud protsesside käigus tekitatakse uuesti termotuumaprotsessiks vajalikku triitiumit. Termotuumareaktoreid iseloomustavad järgmised parameetrid: temperatuur $T \sim 10^8$ K (10 keV), võimsustihedus ~ 10 MW/m³, osakeste kontsentratsioon $n \sim 10^{21}$ 1/m³, plasma vangistuse ajaskaala $\tau \sim 100$ s.

Kuigi tihti on öeldud, et termotuumareaktoris toimuvad samasugused protsessid nagu Päikese tuumas, siis tegelikult tuleb Päikese energia peamiselt siiski teistsugustest protsessidest:

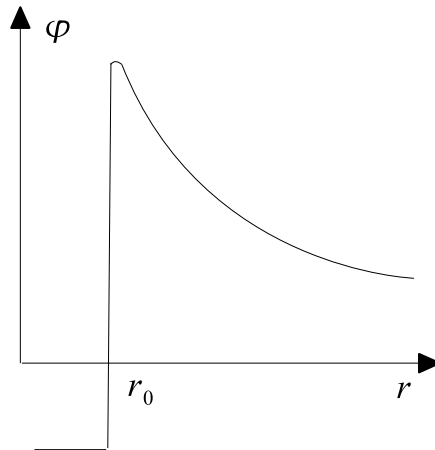


Siin on toodud ka ära, kui palju igal protsessil energiat vabaneb. Kvandid ja neutriinod tulevad Päikese tuumast välja sadu aastaid kaotades iga pörkega energiat, seetõttu on Päikese pinnale jõudes kvandi energia muutunud algsega võrreldes märksa väiksemaks ning spekter nihkunud nähtava valguse spektriossa.

3.2. Tingimused termotuumareaktsiooniks

Seostest (3.1), (3.2), (3.4) on näha, et termotuumaprotsessides osalevad positiivselt laetud aatomituumad. Tänu Coulomb'i jõududele tõukuvad sellised tuumad üksteisest eemale - tuumad saavad üksteisele ligineda vaid tänu oma kineetilisele energiale. Teisalt - tuumaosakeste, nukleonide, vaheline tõmbejõud hakkab mõjuma ja ületab elektrostaatilist jõudu, kui osakeste vaheline kaugus on umbes $10^{-12} - 10^{-13}$ m. Selleks, et deuteeriumi tuumad jõuaksid sellise kauguseni, peab nende kineetiline energia ulatuma umbes 10 keV-ni.

Joonisel 7 on toodud deuteeriumi tuumade potentsiaal. Nagu jooniselt näha mõjub tuumale lähenevale ($r \rightarrow 0$) positiivsele laengule tõukejõud - ta peab ületama kõrge potentsiaalibarjääri, et jõuda kauguseni r_0 alates millest hakkab mõjuma tugev vastastikmõju, mis ületab Coulomb'i tõukejõu.



Joonis 7: Deuteeriumi tuuma potentsiaali φ sõltuvus kaugusest r tuumani.

Kuivõrd sellises plasmas liiguvad laetud osakesed peaaegu vabalt (osakestevahelised põrked on harvad), siis võib plasmata lageda elektrivoolu peaaegu ideaalselt juhtivaks "vedelikuks". Sellistes keskkondades on elektrivool kergesti tekitatav ning indutseeritud elektrivooluga seotud magnetväljad on vastastikmõjustatud plasmaga nii, et on võimalik

plasmad magnetiliselt "vangistada" või plasmaosakesi kiirendada. Vastav teooria on magnetihüdrodünaamika (MHD), st magnetvedelike dünaamika.

Termotuumareaktoritele on järgmised nõuded (Miyamata, Wesson). Vaatame, milliste energiakadude ja juurdekasvudega peame arvestama termotuumareaktori korral:

a) Termotuumareaktori toodang ühe ruumalaühiku kohta:

$$P_T = n^2 f(\tilde{T}), \quad \text{kus} \quad f(T) = \frac{1}{4} \langle \sigma v \rangle E_T, \quad E_T = 22,4 \text{ MeV}, \quad (3.5)$$

E_T - termotuumareaktsioonil eralduv keskmine energia, σ - deuteeriumi-triitiumi ühinemise reaktsiooni ristlõikepindala, v - tuumade liikumise suhteline kiirus. $\langle \sigma v \rangle$ - tuumareaktsioonide keskmine sagedus, n - kontsentratsioon.

b) Energia kadu ruumalaühiku kohta tänu pidurduskiirgusele, st. tänu elektron-ioonkõrgele tekkinud kiirgusele:

$$P_P = \alpha n^2 \sqrt{\tilde{T}}, \quad \alpha \approx 3,8 \cdot 10^{-29} \frac{\sqrt{Jm^3}}{s}, \quad (3.6)$$

kus \tilde{T} on temperatuur keV-des.

c) Kaod tänu soojuse transpordile läbi plasma:

$$P_K = \frac{3n\tilde{T}}{\tau_E}, \quad (3.7)$$

kus τ_E - plasma vangistusae on määratud katseliselt. $3n\tilde{T}$ - ionide koguenergia. \tilde{T} on antud keV-des ning absoluutse temperatuuriskaalaga on seotud järgmiselt: $\tilde{T}(keV) = 8,62 \cdot 10^{-8} T(K)$.

Arvestades nüüd energiakadusid ja plasma soojendamiseks kuluvaid energiasid, saame nn *Lawsoni kriteeriumi*:

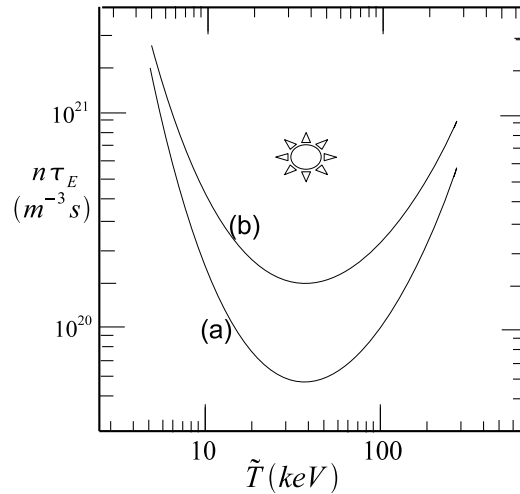
$$P_K + P_P = \eta(P_T + P_P + P_K), \quad (3.8)$$

kus võrduse paremal poolel olev energia läheb plasma kuumutamisele (energia juurdekasv), Kordaja η empiiriline tegur, $\eta \approx 1/3$; võrduse vasakul poolel on energia kaod. Nagu näha - osa kadudest läheb tegelikult uuesti plasma kuumutamisest, osa aga täielikult kadudeks. Juhul, kui Lawsoni kriteerium on täidetud, on deuteeriumi ja triitiumi segu termotuumareaktori "põlemisel" eralduv energia suurem kui kadudeks minev energia. Seega - sel juhul suudab termotuumareaktor end ise töös hoida. Juhul, kui juurdekasvu energia ületab kaod, saab termotuumareaktorit kasutada ka reaalse energiaallikana.

Pannes võrdused (3.5)-(3.5) võrdusesse (3.8) saame plasma vangistusaja ja kontsentratsiooni jaoks seose:

$$n\tau_E = \frac{3\tilde{T}}{\frac{\eta}{1-\eta} f(\tilde{T}) - \alpha \sqrt{\tilde{T}}}. \quad (3.9)$$

Juhul, kui see võrdus kehtib, siis kehtib parasjagu ka Lawsoni kriteerium. Juhul, kui $n\tau_E$ on suurem võrduse (3.9) olevast suurusel, toodab termotuumareaktor antud protsessiga energiat (rohkem, kui sisse pannakse). Joonisel 8 on toodud $n\tau_E$ sõltuvus temperatuurist. Joonis (a) kujutab sõltuvust juhul, kui $\eta = 1/3$. Siis on $n\tau_E$ minimaalne temperatuuri $\tilde{T} = 25keV$ korral ning $n\tau_E = 0,6 \cdot 10^{20} s/m^3$. Kõver (b) kujutab sõltuvust juhul, kui



Joonis 8: $n\tau_E$ sõltuvus temperatuurist T . Joonest ülevalpool olevate tingimuste korral on termotuumaprotsess võimalik ning energeetiliselt kasulik.

$\eta = 0,135$. Siis on kõvera miinimum temperatuuri $\tilde{T} = 30\text{keV}$ ning $n\tau_E = 1,5 \cdot 10^{20}\text{m}^{-3}\text{s}$. Sel juhul tuleb energiakaod korvata täielikult kompenseerida α -osakeste kuumutamiseega.

Jämedalt öeldes - juhitava termotuumareaktsiooni läbiviimine D-T protsessi abil nõuab temperatuuri umbes $T \sim 3 \cdot 10^8\text{K}$ ning $n\tau_E \sim 10^{20}\text{m}^{-3}\text{s}$. D-D protsessile tugineva reaktori ehitamisel peaks temperatuur olema veel umbes 10 korda kõrgem.

Kuivõrd ükski aine ei suuda hoida plasmat tihedusega 10^{20}1/m^3 ning temperatuuril 100 – 300 miljonit K, siis tekib küsimus - kuidas vangistada sellisel temperatuuril plasmat termotuumareaktsiooniks piisavalt pikaks ajaks. Selleks kasutatakse plasma nn magnetvangistust.

Viimaste uurimuste kohaselt peaks aga $\eta \approx 0,135$, kus on arvestatud, et energiakadu kompenseeritakse α -osakeste kuumutamise abil.

3.3. Ühe osakese liikumine

Teoreetilised mudelid.

Plasmas toimuvate protsesside kirjeldamiseks võib kasutada erinevaid mudeleid. Kasutatakse kolme kirjeldusviisi:

- teooria, mis kirjeldab individuaalsete laetud osakeste liikumist etteantud elektri- ja magnetväljas.
- Selliste laetud osakeste kollektsiooni või kogumit kirjeldav kineetiline teooria, mis kirjeldab plasmat mikroskoopiliselt osakeste jaotusfunktsioonide $f_{e,i}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ abil.
- vedelikteooria (magnethüdrodünaamika), mis kirjeldab plasmat keskmistatud funktsioonide abil, mis sõltuvad \vec{r} -st ja t -st.

Järgnevalt vaatleme, kuidas liiguvad plasmaosakesed välises elektri- ja magnetväljas.

Tsüklotronliikumine

Olgu etteantud väline elektromagnetväli, elektriväljatugevusega \vec{E} ja magnetilise induktiooniga \vec{B} . Osakese laenguga q ja massiga m liikumist selles väljas kirjeldab liikumisvõrrand, mis tuleneb Lorentsi jõust:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.10)$$

Liikumise paremaks iseloomustamiseks uurime esialgu, kuidas toimub liikumine erinevatel juhtudel.

Olgu $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ etteantud, vastavad Maxwelli väljavõrranditele. Mass $m = m_{e,i}$, $q = \pm e$ (tegemist ionide või elektronidega).

a) Olgu $\vec{B} = 0$. Siis

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}. \quad (3.11)$$

Kiirendus hakkab mõjuma vaid elektrivälja \vec{E} suunas. Olgu $\vec{E} = (E; 0; 0)$, siis võrrandist (3.11) saame pärast aja järgi integreerimist, et

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_{0x} + \frac{q}{m}Et, v_{0y}, v_{0z}). \quad (3.12)$$

b) Olgu $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = (0; 0; B)$, st magnetväli on suunatud z -telje suunas. Vaatame, kuidas muutuvad kiiruse komponendid v_{\parallel} - magnetväljasuunaline komponent; ja v_{\perp} - magnetväljaga risti olev komponent.

$v_{\parallel} = v_z$. Lähtume seosest (3.10), mis antud juhul tähendab:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.13)$$

Vektorkorrutise omaduse kohaselt on vektorkorrutis risti vektoritega \vec{v} ning \vec{B} . Seega $(\vec{v} \times \vec{B})_{\parallel} = 0$, st $\frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0$, seega $v_{\parallel} = \text{const}$.

Analüüsime nüüd kiirusevektori v_{\perp} komponenti ($v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2$). Selleks korrutame võrduse (3.13) mõlemat poolt skalaarselt vektoriga \vec{v} . Arvestades vektorkorrutise omadust, et $\vec{v} \times \vec{B}$ on risti mõlema vektoriga, siis $\vec{v}(\vec{v} \times \vec{B}) = 0$ (vektori skalaarkorrutis temaga risti oleva vektoriga on null). Seega:

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m(\vec{v})^2 \right) = 0. \quad (3.14)$$

Seega $\frac{1}{2}m(\vec{v})^2 = \text{const}$. Kuivõrd $(\vec{v})^2 \equiv v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$ ning $v_{\parallel} = \text{const}$, siis ka $v_{\perp} = \text{const}$.

Märkus: Kuigi $v_{\perp} = \text{const}$, siis ei v_x ega ka v_y eraldi pole konstantsed.

Leiame nüüd võrrandist (3.13) lahendi $x(t), y(t), z(t)$ jaoks. Tähistame ajalise tuletise mingist suurusest x täpiga: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ (kahekordne tuletis on seega kaks täppi). Siis võime võrrandi (3.13) kirjutada komponentide jaoks lahti järgmiselt:

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{qB}{m}\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{qB}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} \ddot{x} - \Omega\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \Omega\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}, \quad (3.15)$$

kus $\Omega := \frac{qB}{m}$. Võrrandisüsteemi (3.15) viimasest võrrandist saame $v_z \equiv v_{\parallel} = \text{const}$, st $z(t) = v_{\parallel}t + z_0$.

Kahe viimase võrrandi lahendamisel arvestame, et ajahetkel $t = 0$ on osakese algkoordinaadid ja -kiirused antud: $x(0) = x_0, y(0) = y_0, v_x(0) \equiv \dot{x}(0) = \dot{x}_0, v_y(0) \equiv \dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Siis saame

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c + \frac{\dot{x}_0}{\Omega} \sin \Omega t - \frac{\dot{y}_0}{\Omega} \cos \Omega t \\ y(t) &= y_c + \frac{\dot{y}_0}{\Omega} \sin \Omega t + \frac{\dot{x}_0}{\Omega} \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.16)$$

kus $x_c = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\Omega}$, $y_c = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\Omega}$. Kui $v_z = 0$, siis võiksime öelda, et toimub ringikujuline liikumine ümber tsentri (x_c, y_c) . Kui $v_z \neq 0$, siis toimub spiraalne liikumine ümber punkti (juhttsentri), mis liigub piki z -telge ühtlase kiirusega.

Seosetest (3.16) võib leida ka kiirused $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Võib näidata, et kehtib

$$v_{\perp} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} = \text{const}. \quad (3.17)$$

Analoogiliselt saab näidata, et

$$\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} = \frac{v_{\perp}}{\Omega} =: R = \text{const}. \quad (3.18)$$

Suurust $R = \frac{v_{\perp}}{\Omega}$ nimetatakse güro- eh tsüklotronraadiuseks. Arvestades, et $\Omega := \frac{qB}{m}$, siis saame

$$R = \frac{v_{\perp} m}{qB}. \quad (3.19)$$

Järelikult, fikseeritud kiiruse (temperatuuri) korral on güroradius seda väiksem, mida suurem on magnetiline induktsioon, ja vastupidi.

Seega koosneb kogu liikumine güroliikumisest, mis on risti magnetilise induktsiooni vektoriga \vec{B} , ning inertsiaalsest liikumisest, mis on paralleelne \vec{B} -ga:

$$\begin{cases} x(t) &= x_c + R \cos(\Omega t - \theta_0) \\ y(t) &= y_c - R \sin(\Omega t - \theta_0) \\ z(t) &= z_c(t) = z_0 + v_{\parallel} t \end{cases}, \quad (3.20)$$

kus θ_0 - algnurk polaartasandil.

Ülaltoodu põhjal võib öelda, et osakesed liiguvad ümber magnetvälja jõujoonte (kas ringi või - üldjuhul - spiraali mööda). Magnetvälja geometria määrab ära mõlemat liiki osakeste dünaamika geometria, seega ka plasma kui terviku dünaamika ja geometria.

Elektronid ja ioonid tiirlevad vastassuundades erinevate sageduste ja güroradiustega:

$$\begin{aligned} \Omega_e &= \frac{eB}{m_e} \gg \Omega_i = \frac{ZeB}{m_i}, \\ R_e &= \frac{v_{e\perp}}{\Omega_e} \ll R_i \frac{v_{i\perp}}{\Omega_i}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tabel 2. Elektronide ja ionide gürraadiused ja -sagedused erinevate plasmatüüpide korral.

Plasma liik	$T(K)$	$B(T)$	v_{sooj_e} (m/s)	v_{sooj_i} (m/s)	Ω_e (1/s)	Ω_i (1/s)	R_e (m)	R_i (m)
TOKAMAK	10^8	3						
Päikese kroon	10^6	0,03						

TOKAMAK-tüüpi seadmete korral peab arvestama, et seadme mõõtmed peavad olema palju suuremad ionide gürraadiusest vältimaks ionide kokkupuudet seadme seinamaterjaliga. Peab märkima, et gürosagedus (millega iga kiirendusega liikuv osake liigub) sõltub vaid magnetilisest induktsioonist, seega saab kiiratava kiirguse sageduse järgi kindlaks teha magnetvälja magnetilise induktsiooni suuruse.

Ülesanded.

1. Näidata, et seosed (3.16) rahuldavad võrrandeid (3.15).
2. Leida seostest (3.16) osakese kiirused v_x ja v_y ning näidata seoste (3.18) ja (3.17) kehtivust.

3.4. Osakeste triiv

Vaatame nüüd liikumisvõrrandeid juhul, kui $\vec{B} \neq 0$ ja $\vec{E} \neq 0$. Nagu eelmises alapunktis näidatud, viib elektrivälja olemasolu konstantse kiirendusega liikumiseni piki elektrivälja. Kuumades plasmades viib see nii ärajooksvate elektronideni ('runaway electrons') - kui elektrivälja tugevus \vec{E} ületab mingi kriitilise piiri, siis läheb kiirenevate elektronide kineetiline energia ja kiirus liiga suureks. Elektronid ei jõua põrgetel teiste osakestega kaotada energiat piisavalt kiiresti ning magnetvälja tugevus on liiga väike, et elektrone magnetvangistuses hoida.

Olgu meil $\vec{E} = E\vec{j} \perp \vec{B} = B\vec{k}$. (Meeldetuletus: $E\vec{j} = (0; E; 0)$, $B\vec{k} = (0; 0; B)$). Siis saame liikumisvõrrandid järgmisel kujul:

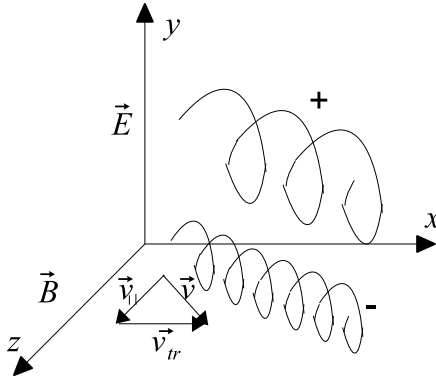
$$\begin{aligned} \ddot{x} - \frac{qB}{m}\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{qB}{m}\left(\dot{x} - \frac{E}{B}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

On toimunud teisendus $\dot{x} \rightarrow \dot{x} - \frac{E}{B}$. St, toimub osakeste pidev triiv x suunas kiirusega $\frac{E}{B}$. Kuivõrd triivi suund on risti nii \vec{E} kui ka \vec{B} -ga, siis nimetatakse seda $\vec{E} \times \vec{B}$ -triiviks kiirusega:

$$\vec{v}_{tr} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (3.23)$$

Et viimane avaldis ei sõltu laengust q , siis triivivad nii ionid kui ka elektronid samas suunas (vt joonis 9). (Eirelatiivsusteooria ja Lorentzi teisenduste abil võib näidata - triiv toimub sellise kiirusega, et laetud osakesed ei 'tunneta' elektrivälja olemasolu.)

Analoogiliselt elektrivälja olemasolu korral toimuva triiviga, toimub osakeste triiv ka juhul, kui elektrivälja puudub, kuid tuleb arvestada gravitatsioonijõuga F_g . Võib näidata,



Joonis 9: Laetud osakeste triiv välise elektrivälja $\vec{E} = (0; E; 0)$ olemasolul.

et sel juhul toimub osakeste triiv kiirusega

$$\vec{v}_{tr} = \frac{\vec{F}_g \times \vec{B}}{q\vec{B}^2}, \quad (3.24)$$

mis sõltub laengust - ioonid ja elektronid triivivad vastasuundades, kusjuures osakeste triiv on suunatud risti nii magnetvälja kui ka gravitatsioonivälja suunaga.

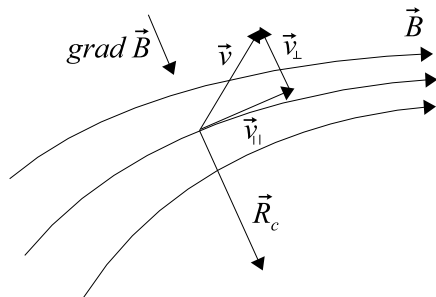
Kui magnetväli pole homogeenne, vaid muutub ruumis, siis leidub nn $\vec{B} \times \text{grad } \vec{B}$ -triiv, mis on samuti sõltuv laengust. Antud juhu erijuhtum on see, kui magnetvälja jõujooned on kõverad. Olgu magnetvälja jõujoonte kõverusraadius (vähemalt mingis punktis) R_c (vaata joonis 10). Siis on lisanduvaks jõuks tsentrifugaaljõud

$$\vec{F} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c^2} \vec{R}_c. \quad (3.25)$$

Täiendav triiv on risti nii magnetväljaga kui ka vektoriga \vec{R}_c kiirusega

$$\vec{v}_{tr} = \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{eB^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\vec{R}_c \times \vec{B}}{eB^2 R_c^2}. \quad (3.26)$$

Kuivõrd ka see triiv sõltub osakese laengust, siis viib see osakeste eraldumiseni.

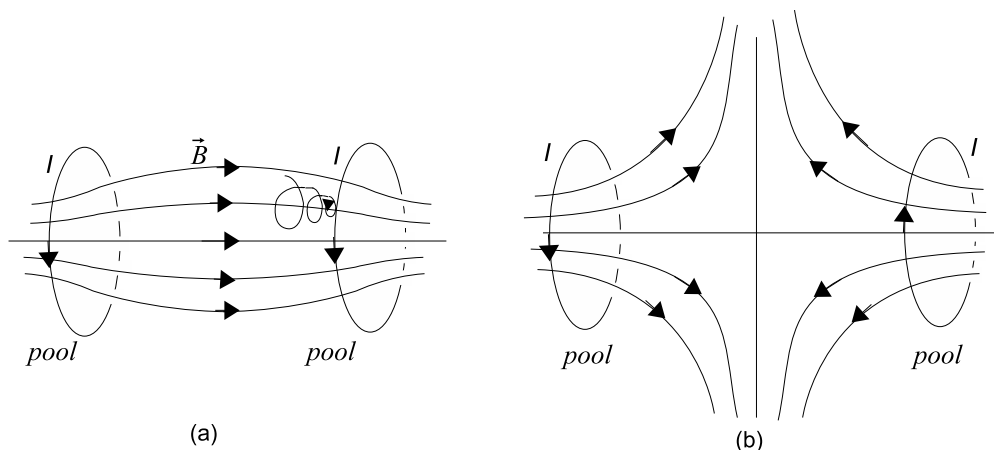


Joonis 10: Laetud osakeste triiv suunas $\vec{v} \perp \vec{B}$, $\vec{v} \perp \text{grad } B$.

Osakeste orbiitidega magnetvälja kõverjooneliste jõujoonte korral on seotud ka nn peegel-efekt - osakesed, mis sisenevad kõrgema magnetvälja tugevusega osasse (kus magnetvälja jõujoonte tihedus on suurem) peegeldatakse tagasi nõrgema magnetvälja tugevusega osasse.

Magnetpeeglit nimetatakse ka magnetpudeliks, selline osakeste magnetvangistus toimib näiteks Maa magnetvälja korral, kus osakesed peegeldatakse pooluste juurest tagasi. Magnetpeegelduse toimemehhanism on järgmine. Magnetvälja jõujooned on kõverad - osakestel, mis sisenevad magnetvälja väiksema magnetvälja tugevuse korral, on suur güroraadius ja v_{\perp} on väike, suurema magnetvälja tugevusega osasse sisenedes güroraadius väheneb, v_{\perp} suureneb ning tänu energia jäävuse seadusele väheneb v_{\parallel} , mis on paralleelne magnetvälja jõujoonte suunaga. Kui $v_{\parallel} \rightarrow 0$, siis peegeldub osake tagasi. Kuid juhul, kui osake on sisenenud magnetvälja liiga väikese nurga alla - nurk \vec{v} ja \vec{B} vahel on väike, siis v_{\parallel} ei lähe nulliks, seetõttu pääsevad osakesed magnetväljast välja. Maa magnetvälja korral võib seda nähtust näha pooluste juures, kus Maa magnetvälja vangistusest pääsenud laetud osakeste vood tekitavad virmalisi.

Joonisel 11 on toodud kaks võimalikku magnetpudelduse viisi. Esimesel juhul (joonis (a)) pääsevad laetud osakesed põgenema peamiselt otstest, kuid joonisel (b) toodud magnetväli on ebastabiilsem, mis võimaldab osakestel pääseda magnetväljast ebastabiilsuste tekkel.

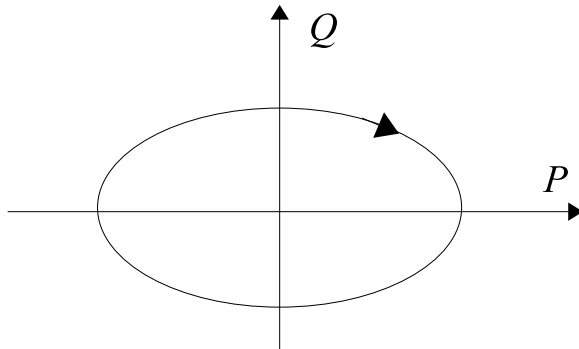


Joonis 11: Plasmavangistuse mudelid. (a) Peegelvangistus. (b) 'cusp'-vangistus.

3.5. Adiabaatilised invariandid

Mehaanikast on teada, et igal mehaanilisel süsteemil, mis sooritab piiratud liikumist, näiteks matemaatiline pendel, kiik, Maa liikumisel ümber Päikese, on faasiruumi piirkonnas piiratud trajektoor. Faasiruumi komponentideks on üldistatud koordinaadid (selleks võib olla x , y , z -koordinaat, pöördenurk vms) ning üldistatud impulsid (lihtsamal juhul on selleks tavaline impulss). Juhul, kui selle süsteemi mehaaniline energia on jääv, vastab antud koguerenergia tasemele faasiruumis suletud trajektoor. Joonisel 12 on toodud matemaatilise pendli trajektoor faasiruumis 1-mõõtmelisel juhul, kus ühe telje peal üldistatud koordinaat Q , mis on antud juhul pöördenurk tasakaaluasendist, positiivseks

suunaks on kellaosuti liikumise suund $Q = \varphi$. Teine koordinaat on üldistatud impulss P . Jooniselt on näha, et tsükliline liikumine vastab faasiruumis suletud trajektoori mööda liikumisele. Sellise suletud trajektoori poolt hõlmatud pinna pindala on konstantne ning seda nimetatakse liikumistrajektooriks. Tsüklilise liikumise korral võib olla liikumistrajektooriks näiteks mehaaniline energia, impulssmoment (Maa liikumine ümber Päikese) vms.



Joonis 12: Matemaatilise pendli liikumistrajektoori 1-mõõtmelisel juhul. Faasiruumis koordinaatidega (P, Q) kirjeldab seda energia jäävuse korral kinnine kõver.

Juhul, kui süsteemile mõjub mingi nõrk väline jõud, näiteks hõõrdejõud, kuid välise jõu periood on palju väiksem süsteemi liikumise perioodist, siis see pindala ei ole konstantne. Seetõttu pole see pindala ka liikumisintegraaliks. Samas võib öelda, et see pindala on peaaegu konstantne ühe perioodi jooksul. Sellist suurust, mis on ühe perioodi jooksul peaaegu konstantne, nimetatakse adiabaatiliseks invariandiks. Selle pindala J on võrdeline keskmise mehaanilise energiaga $\langle W \rangle$ ühe perioodi jooksul ning perioodiga T

$$J \sim \langle W \rangle T.$$

Seetõttu näiteks matemaatilise pendli korral, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Seega, kui pendli pikkus l väheneb, siis keskmine energia $\langle W \rangle$ suureneb.

TOKAMAK-s toimuvate termotuumaprotsesside seisukohalt on plasma jaoks suuruste invariantus oluline - plasma stabiilsuse jaoks on tähtis, et trajektoori (ja ka faasitrajektoori) oleks suletud, kinnine.

Esimene adiabaatiline invariant (liikumisintegraal) on järgmine: $J_1 = \oint P_{\perp} \cdot d\vec{l}$, kus integreeritakse üle kinnise joone - juhul, kui osake tiirleks mööda suletud ringi, siis üle antud ringi. $\vec{P} = (P_{\perp}, P_{\parallel})$ on üldistatud impulss. Antud juhul $P_{\perp} = mv_{\perp} - \frac{1}{2}qBR$. Kuivõrd $dl = R d\theta$, siis

$$J_1 = \oint P_{\perp} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (mv_{\perp} - \frac{1}{2}qBR)R d\theta = \frac{\pi m v_{\perp}^2}{\Omega}. \quad (3.27)$$

Mööda ringjoont perioodiga T ning nurkkiirusega Ω liikuv laeng q tekitab elektrivoolu sel joonel:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{T} = \frac{q\Omega}{2\pi}.$$

Antud ringvoolu magnetmoment on võrdne voolutugevuse I ja pindala S korrutisega

$$\mu = SI = \pi R^2 I = \frac{1}{2} q R^2 \Omega = \frac{1}{2} \frac{m v_{\perp}^2}{B}. \quad (3.28)$$

Seega võime kirjutada

$$J_1 = \frac{2\pi m \mu}{q}. \quad (3.29)$$

Paremaks analüüsiks võib adiabaatilise invariandi J_1 ümber kirjutada arvestades magnetvoogu. Magnetvoog Φ läbi pinna raadiusega R on

$$\Phi_R = SB = \pi R^2 B = \frac{2\pi m}{q^2} \mu. \quad (3.30)$$

Seega

$$J_1 = q\Phi_R. \quad (3.31)$$

Analüüsime nüüd laengu q liikumist mittehomogeenses magnetväljas, mis on toodud joonisel 11 (a). Magnetvälja keskel, kus magnetvälja jõujooned paiknevad hõredamalt (ja magnetiline induktsioon on väiksem), on osakese spiraali raadius suur. Kui osake liigub magnetvälja otsa poole, kus magnetiline induktsioon on suurem, peab J_1 konstantsuse saavutamiseks vastavalt seostele (3.30) ning (3.31) ringjoone raadius vähenema. Vastavalt sellele suureneb aga osakese kiirus v_{\perp} . Tänu energia jäävuse seadusele (antud juhul on jääv kineetiline koguenergia) peab v_{\perp} suurenemisel v_{\parallel} vähenema, seetõttu väheneb ka spiraali samm. Kui v_{\parallel} oli magnetvälja keskel piisavalt väike, siis magnetvälja otsa poole liikumisel muutub v_{\parallel} nulliks ning see osake peegeldatakse tagasi. Kui aga v_{\parallel} ei ole piisavalt väike, võib selline osake magnetvälja otsast välja pääseda.

J_1 põhilise sisu võiks öelda järgmiselt: J_1 konstantsus tähendab, et väiksema \vec{B} korral on spiraali raadius suurem, \vec{B} suurenedes väheneb spiraali raadius ning v_{\perp} vähenevad.

Teine adiabaatiline invariant J_2 on seotud pikisuunalise impulsiga. Arvestame, et osake liigub põrkudes magnetpeegli otstest edasi tagasi. Üks edasi-tagasi liikumise periood on $T_b = \frac{2\pi}{\omega_b}$. Siis

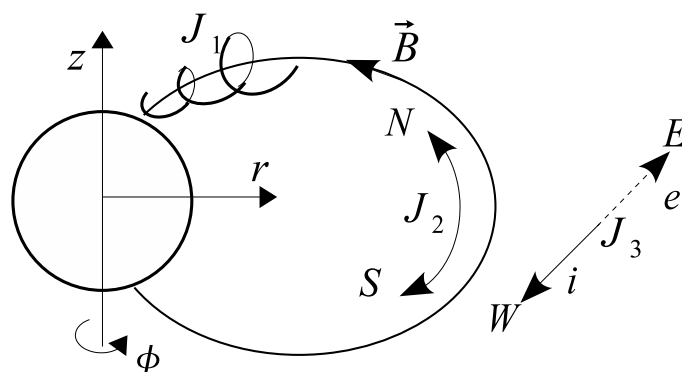
$$J_2 \equiv \oint P_{\parallel} dl = \oint m v_z dz = \oint m v_z^2 dt = \frac{\pi m \hat{v}_z^2}{\omega_b}, \quad (3.32)$$

kus integreerimine toimus ühe edasi-tagasi liikumise, st ühe perioodi jooksul ning arvestasime, et pikisuunaline kiirus muutub perioodiliselt $v_z = \hat{v}_z \cos(\omega_b t)$ (keskel on pikisuunaline kiirus maksimaalne, otstel 0).

J_2 (ligikaudne) konstantsus tähendab, et väiksema \vec{B} korral on v_z suurem, kui osake liigub magnetvälja osasse, milles \vec{B} on suurem, siis v_z väheneb ning võib hakata tagasi liikuma, st trajektoori juhttsenter liigub perioodiliselt magnetpeegli otste vahel edasi-tagasi.

Kolmas adiabaatiline invariant on seotud osakeste trajektoori juhttsentrite aeglase triiviga risti magnetvälja jõujooni. J_3 on seotud magnetvälja gradiendi muutumisega (samuti gürraadiuse muutumisega seotud kesktõmbejõu muutumisega). Antud triiv on risti nii magnetvälja kui ka magnetvälja gradiendiga ning sõltub laengu märgist. Seetõttu triivivad elektronid ja ioonid vastassuundades.

Adiabaatiliste invariantide ning osakeste triivi abil saab seletada ka Maa magnetvälja poolt 'vangistatud' osakeste liikumist ionosfääris (vt joonis 13).



Joonis 13: Adiabaatilised invariantid Maa magnetosfääris liikuvate osakeste jaoks. J_1 tõttu muutub gürraadius. J_2 tõttu toimub edasi-tagasi pendeldamine pooluste vahel. J_3 tõttu toimub ionide ja elektronide triiv, kusjuures ionid triivivad läände, elektronid itta.

4. Plasma kineetiline teooria

Eelpool käsitletud üksikute osakeste orbiitide teooria kehtib ja seda on sobilik kasutada juhul, kui laetud osakeste kontsentratsioon on väike ja nende osakeste vahelised interaktsioonid võib jätta arvestamata. Kuivõrd plasma koosneb väga suurest hulgast laetud osakestest, siis on tihti vaja kasutada, kasvõi hinnanguks, statistilisi meetodeid, mis viivad nn kollektiivsete nähtuste uurimisele.

4.1. Jaotusfunktsioon. Boltzmanni ja Vlassovi võrrandid.

Lihtsuse mõttes eeldame, et plasma koosneb elektronidest ja vaid üht liiki ionidest. Plasmaosakeste kollektiivi kirjeldab ajast sõltuv jaotusfunktsioon $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$, $\alpha = i, e$. Jaotusfunktsioon on defineeritud 6-mõõtmelises faasiruumis kui tihedusfunktsioon:

$$f_\alpha(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t) d^3r d^3v$$

on osakeste arv, mis paikneb faasiruumi piirkonnas (x_0, y_0, z_0) , (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) faasiruumi ruumalas $d^3r d^3v$. Osakeste koguarv on integraal üle kogu faasiruumi $N = \iiint_V \iiint_{V_v} f_\alpha d^3r d^3v = \text{const}$. Termotuumaprotsessi korral, kus tekib uusi osakesi (uut liiki ioone) ning teist liiki ioone kaob, on arvestada enamasti liiki osakestega.

Jaotusfunktsiooni abil on võimalik leida osakeste tihedust (kontsentratsiooni) $n_\alpha(\vec{r}, t)$, keskmist kiirust $\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t)$, laengutihedust $\rho(\vec{r}, t)$ ja voolutihedust $\vec{j}(\vec{r}, t)$ järgmiselt:

$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \iiint_{V_v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v, \quad (4.1)$$

$$\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \iiint_{V_v} \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v, \quad (4.2)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=i,e} q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t), \quad (4.3)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1,e} q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t) \vec{u}_\alpha(\vec{r}, t). \quad (4.4)$$

Võrdustes (4.1) ja (4.2) on integreeritud üle kiiruste ruumi, st on võetud integraal

$$\iiint_{V_v} d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y dv_z.$$

Edaspidi kirjutame lühiduse mõttes kolmekordse integraali asemele ühekordse, arvestades, et selle kordsust ja integreerimismuutujat näitab d^3v (siis üle kiiruste ruumi) või d^3x (siis toimub integreerimine üle tavalise ruumi).

Lihtsaimal juhul võib jaotusfunktsiooni avaldada Maxwelli jaotuse abil: $f(\vec{r}, \vec{v}, t) = P(\vec{v})n(\vec{r}, t)$, kus $P(\vec{v})$ on Maxwelli jaotus (1.1). Tasakaalulisel juhul on osakeste kontsentratsioon ajast sõltumatu ning kõigis ruumipunktides ühesugune $n(\vec{r}, t) = n = \text{const}$. Plasma ei ole ümbritseva keskkonnaga tasakaaluolekus, lisaks peab arvestama osakeste kontsentratsiooni (ja seega ka laengute) pidevate fluktatsioonidega. Fluktatsioonid viivadki nn kollektiivsete efektide tekkimisele, mida ei ole võimalik kirjeldada ilma plasma kineetilise teooriaga.

Antud faasiruumi punktis paiknevate osakeste parve liikumist faasiruumis aja jooksul kirjeldab täistuletis

$$\begin{aligned}\frac{df_\alpha}{dt} &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{df_\alpha}{d\vec{v}}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Siin on kasutatud tähistust:

$$\vec{a} \cdot \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \equiv a_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial y} + a_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \vec{b} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \equiv b_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + b_y \frac{\partial f}{\partial v_y} + b_z \frac{\partial f}{\partial v_z}.$$

Kui osakestevahelised vastastikmõjud puuduvad, siis jaotusfunktsioon aja jooksul ei muutu, st $\frac{df_\alpha}{dt} = 0$. Plasmafüüsika korral see üldiselt ei kehti - kuivõrd toimuvad osakeste vahelised põrked, siis võib faasiruumi piirkonnas olevate osakeste arv (tihedus) muutuda. Arvestades, et faasiruumi tiheduse muutus on tingitud vaid põrgetest, võib jaotusfunktsiooni muutumist aja jooksul kirjeldada **Boltzmanni võrrandiga**:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{df_\alpha}{d\vec{v}} = C_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{põrked}}. \quad (4.6)$$

Võrrandites (4.5) ja (4.6) toodud \vec{E} ja \vec{B} on välise ning osakeste poolt tekitatud väljade summaarsed elektrivälja tugevus ja magnetiline induksioon. Võrrandi paremal poolel toodud liige kajastab jaotusfunktsiooni muutumise kiirust tänu väikeste kauguste juures mõjuvatele Coulomb'i jõududele, tänu millele toimuvad põrked. Plasmas viivad sellised ühe osakese põrgetest teistega tingitud paljud väikesed nurgamuutused kumulatiivselt suurema nurgamuutuseni ehk hajumiseni, mida täpsemalt saab kirjeldada Fokker-Plancki-tüüpi pörkeoperaatori abil.

Lihtsamal juhul võib osakeste paarikaupa põrked jätta arvestata. Siis kirjeldab jaotusfunktsiooni muutust aja jooksul **Vlassovi võrrand**:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{df_\alpha}{d\vec{v}} = 0. \quad (4.7)$$

4.2. Pidevuse võrrand. Momentide võrrandid

Boltzmanni ja Vlassovi võrranditest lähtudes on võimalik teha järeldusi, kuidas muutuvad osakeste kontsentratsioon, temperatuur, impulss. Samuti on Boltzmanni võrrandist lähtudes võimalik leida soojusvooge, soojuse ülekannet või plasma osakeste difusiooni kirjeldavad võrrandid teadmata otseselt jaotusfunktsiooni kuju.

Korrutame võrrandit (4.6) d^3v -ga ja integreerime üle kiiruste ruumi.

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + \int \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d^3v + \frac{q}{m} \int (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d^3v. \quad (4.8)$$

Analüüsime võrrandit (4.8) liikmete kaupa. Esimene integraal:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \int f d^3v = \frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}, t).$$

Teine integraal:

$$\int \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} d^3v = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \int \vec{v} f d^3v = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(n\vec{u}).$$

Kolmanda integraali arvutamisel kasutame Gaussi teoreemi:

$$\int \vec{E} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v \equiv \iiint \vec{E} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = \oint f \vec{E} \cdot d\vec{S}_v = 0,$$

kus kolmekordne integraal on leitud üle kiiruste ruumi, st $v_x, v_y, v_z \in] - \infty, \infty[$. Analoogiliselt - S_v on pind, mis hõlmab seda ruumi. Vaadates raadiusega $|v|$ olevat kera, siis kera pind kolmemõõtmelises kiiruste ruumis $S_v \sim v^2$. Seega peaks kahekordne integraal üle kinnise pinna andma kokku lõpmatuse. Teisalt $f \sim e^{-v^2}$ (vt näiteks Maxwelli jaotust). Et $\lim_{|v| \rightarrow \infty} f S_v = 0$, siis saamegi pindintegraaliks nulli.

Neljas integraal:

$$\iiint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = \iiint \frac{\partial}{\partial \vec{v}} [f(\vec{v} \times \vec{B})] d^3v - \iiint f \frac{\partial}{\partial \vec{v}} (\vec{v} \times \vec{B}) d^3v.$$

Võrduse paremal poolel oleva esimese integraali leidmisel kasutame taas Gaussi teoreemi, mis viib integreerimiseni üle kinnise pinna S_v ning tulemuseks on null. Teise integraali leidmisel arvestame, et vektor $\frac{\partial}{\partial \vec{v}}$ on vektori \vec{v} -sihiline, kuid $\vec{v} \times \vec{B}$ on risti nii vektoriga \vec{B} kui ka \vec{v} . Seetõttu on skalaarkorrutis teises integraalis võrdne nulliga.

Viies integraal

$$\int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d^3v = \left[\frac{\partial}{\partial t} \int f d^3v \right]_c = 0,$$

kuivõrd põrgetel osalevate osakeste arv on konstantne (nii palju kui põrkesse läheb, nii palju sealt ka tuleb), siis tuletis konstandist on null.

Seega oleme saanud Boltzmanni võrrandist järgmise võrrandi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(n\vec{u}) &= 0 & \text{ehk} \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\vec{u}) &= 0 & \text{ehk} \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(nu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(nu_z) &= 0. & (4.9) \end{aligned}$$

Võrrand (4.9) on **pidevuse võrrand**. Võrrandi esimene liige näitab vaadeldavas punktis osakeste kontsentratsiooni (arvu) muutumise kiirust, $\text{div}(n\vec{u})$ näitab, milline on kõigist suundadest antud punkti sisenenud ja sellest väljunud osakeste arvu vahe. Pidevuse võrrand näitab, et osakeste arvu muutumise kiirus (muut ajaühikus) on võrdne punkti sissetulnud ja sellest väljunud osakeste arvu vahega. (Parem on ette kujutada mitte ühte punkti, vaid üht fikseeritud väikest ruumiosa, milles muutust käsitletakse).

Esimese momendi võrrandi ehk impulsivõrrandi muutumise leidmiseks korrutame Boltzmanni võrrandit $m\vec{v}$ -ga ($m = m_\alpha$ - ühe osakese, kas iooni või elektroni, mass) ja integreerime üle kiiruste ruumi. Siis saame võrrandi, mis kirjeldab antud punktis (või väikeses ruumiosas) paiknevate osakeste koguimpulsi muutust:

$$m \int \vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} d^3v + m \int \vec{v} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \right) d^3v + q \int \vec{v} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v = m \int \vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d^3v. \quad (4.10)$$

Analüüsimise võrrandit (4.10) liikmete kaupa. Esimene integraal:

$$m \int \vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} d^3v = m \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{v} f d^3v = m \frac{\partial(n\vec{u})}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Siin kasutasime seost (4.2). Kuivõrd $mn\vec{u}$ annab ruumalaühikus oleva antud osakeste liigi keskmise koguimpulsi, siis $\frac{m\partial(n\vec{u})}{\partial t}$ kirjeldab ruumalaühiku keskmise koguimpulsi muutumise kiirust (muutu ajaühikus).

Võrrandi (4.10) teine integraal:

$$\int \vec{v} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) f d^3v = \int \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (f \vec{v} \vec{v}) d^3v = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \int f \vec{v} \vec{v} d^3v = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n \overline{\vec{v} \vec{v}}),$$

kus $\vec{v} \vec{v}$ tähistab vektorite tensorkorrutist (vt lisa, (L.3)), $\overline{\vec{v} \vec{v}}$ - tensorkorrutise keskmine. Nüüd arvestame, et kiiruse \vec{v} võib avaldada antud ruumalatüki kui terviku liikumise keskmise kiiruse \vec{u} ja soojusliikumise tuleneva juhusliku liikumise kiiruse \vec{w} summa $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$. Seejuures tuleb arvestada, et juhuslik soojusliikumine on kõigis suundades võrdse tõenäosusega, seetõttu $\overline{\vec{w}} = 0$. Siis võime kirjutada

$$\begin{aligned} m \int \vec{v} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) f d^3v &= m \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n \overline{\vec{v} \vec{v}}) = m \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n \vec{u} \vec{u}) + m \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n \overline{\vec{w} \vec{w}}) + \\ &+ m \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot [n(\vec{u} \vec{w} + \vec{w} \vec{u})] = m \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n \vec{u} \vec{u}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \mathbf{P} = \\ &= m \vec{u} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n \vec{u}) + mn \left(\vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{u} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

kus arvestasime, et $\overline{\vec{w}} = 0$. $\mathbf{P} = nm \overline{\vec{w} \vec{w}}$ tähistab rõhutensorit

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix},$$

mida võib interpreteerida järgmiselt. Vaatame vaid ühte, näiteks x -telje suunda, siis p_{xx} näitab antud suunas mõjuvat hüdrostaatilist rõhku, st iseloomustab rõhumisjõudu. p_{xy} ja p_{xz} näitavad x -telje suunaga risti olevaid nihkejõude. $p_{xy} = p_{yx}$ jne. Diagonaalset väljas asuvad elemendid näitavad plasma viskoossust - impulsi ülekannet plasma liikumissihiga risti olevates sihtides. Isotroopsel juhul näitavad antud tensori diagonaalelemendid $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$ hüdrostaatilist rõhku. Enamikul juhtudel võib diagonaalset väljas asuvad elemendid jätta arvestamata ning arvestada plasma isotroopsusega. Sel juhul $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} p = \text{grad } p$ - näitab rõhu gradienti ehk suunda, milles rõhk kõige kiiremini muutub.

Võrrandi (4.10) kolmas integraal:

$$\begin{aligned} \int \vec{v} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d^3v &= \int \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot [f \vec{v} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})] d^3v - \int f \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d^3v - \\ &- \int f (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \vec{v} d^3v. \end{aligned}$$

Esimese integraali leidmisel rakendame Gaussi teoreemi, mis viib selle kolmekordse integraali kahekordse integraali leidmisele üle kinnise pinna kiiruste ruumis. Antud integraal

annab tulemuseks nulli (vt ka ülalt põhjendust). Teise integraali leidmisel arvestame, et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{v}} = 0$ (\vec{E} ei sõltu \vec{v} -st). $\frac{\partial}{\partial \vec{v}}$ on risti vektoriga $\vec{v} \times \vec{B}$ ning seetõttu ka $\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ ja teine integraal võrdub nulliga. Kolmandas integraalis

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv I,$$

kus I in ühiktensor (tensor, mille diagonaalidel on ühed, ülejäänud komponendid on nullid. Vektori ja ühiktensori skalaarkorrutiseks saame taas vektori. Seetõttu kolmandast liikmest saame

$$\begin{aligned} \int f(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \vec{v} d^3v &= \int f(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d^3v = \vec{E} \int f d^3v - \vec{B} \times \int \vec{v} f d^3v = \\ &= n\vec{E} - n\vec{B} \times \vec{u} = n(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Võrrandi (4.10) paremal poolel olevast integraalst saame

$$\int m\vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d^3v = \vec{P}_{ij},$$

mis kirjeldab impulsi muutust tänu erinevat liiki osakeste põrkumisele.

Seega oleme kokkuvõttes saanud impulsi muutuse kirjeldamiseks järgmise võrrandi:

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n\vec{u}) + m\vec{u} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (n\vec{u}) + mn \left(\vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{u} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \mathbf{P} - qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \vec{P}_{ij}. \quad (4.14)$$

Kasutades nüüd toodud võrrandi kahe esimese liikme jaoks pidevuse võrrandit (4.9), võime kirjutada võrrandi, mis kajastab impulsi muutumist järgmisel kujul:

$$mn \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \vec{u} \right] = qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \mathbf{P} + \vec{P}_{ij}. \quad (4.15)$$

Toome siinkohal ära ka antud võrrandi teistsugustes tähistes (vt lisa):

$$\begin{aligned} mn \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] &= qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P} + \vec{P}_{ij} \quad \text{ehk} \\ mn \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} \right] &= qn(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - \text{div} \mathbf{P} + \vec{P}_{ij}. \end{aligned}$$

Analoogiliselt saab leida ka võrrandid energia muutumise kirjeldamiseks, temperatuuri muud, soojusvoo, soojusülekande jms võrrandid.

Mõned uued võrrandid. Soojusvoo võrrandite tuletamiseks arvestame, et soojuslike suuruste definitsioonid on järgmised:

$$T_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{m_\alpha}{3k} \bar{w}_\alpha^2, \quad (4.16)$$

$$\vec{h}_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle w_\alpha^2 \vec{w}_\alpha \rangle, \quad (4.17)$$

$$\vec{R}_\alpha(\vec{r}, t) = m_\alpha \int C_{\alpha\beta} \vec{w}_\alpha d^3v, \quad (4.18)$$

$$Q_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \int C_{\alpha\beta} v_\alpha^2 d^3v, \quad (4.19)$$

kus T on temperatuur, \vec{h} on soojusvoog, \vec{R} kirjeldab impulsi ülekannet tänu erinevat liiki osakeste vahelistele põrgetele (impulsi ülekanne üht liiki osakestelt teist liiki osakestele), ning Q kirjeldab soojuse ülekannet erinevat liiki osakeste vahel.

Ülaltood skeemi kasutades saab siis leida võrrandi soojuse ülekande jaoks:

$$\frac{3}{2}n_{\alpha}k\left(\frac{\partial T_{\alpha}}{\partial t} + \vec{u}_{\alpha} \cdot \text{grad } T_{\alpha}\right) + \mathbf{P}_{\alpha} : \text{grad } \vec{u}_{\alpha} + \text{div } \vec{h}_{\alpha} = \mathbf{Q}_{\alpha}. \quad (4.20)$$

Antud võrrandis toodud matemaatiliste tähistused selgitused on toodud lisas.

4.3. Kollektiivsed fenomenid. Plasma ostsillatsioonid.

Lähtume pidevuse võrrandist

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \text{div } (n_{\alpha}\vec{u}_{\alpha}) = 0 \quad (4.21)$$

ja lihtsustatud impulsi võrrandist

$$m_{\alpha}\left(\frac{\partial \vec{u}_{\alpha}}{\partial t} + u_{\alpha}\text{grad } \vec{u}_{\alpha}\right) = q_{\alpha}\vec{E}, \quad \alpha = i, e. \quad (4.22)$$

kus oleme eeldanud, et $\vec{B} = 0$ ning et plasma on kõikjal isotroopne ja homogeenne (rõhk on konstantne, $\frac{\partial p}{\partial \vec{r}} = 0$).

Elektrivälja tugevus \vec{E} rahuldab Poissoni võrrandit

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{e}{\varepsilon_0}(Zn_i - n_e), \quad (4.23)$$

kus ρ - lanegutihedus, Z - ionide ioniseerituse aste, n_{α} - ionide või elektronide kontsentratsioon (arv ruumalaühikus).

Võrranditest (4.21)-(4.23) on tuletatavad elektronide elektrostaatiliselt ostsillatsioonid plasmas. Näitame seda.

Üks plasma põhilisemaid omadusi on plasma ligikaudne elektriline neutraalsus. Kui plasma poleks elektriliselt neutraalne, siis tekiks makroskoopiliselt tugev elektriväli, mis sunnib vastasmärgilisi osakesi kiirenevalt liikuma, et kompenseerida puuduva laneguga osakesi, seetõttu on elektrilisest tasakaalust väljaviidud plasma tervikuna (makroskoopiliselt) varsti taas elektriliselt neutraalne. Kuid leiduvad mikroskoopilised osakeste kontsentratsioonide fluktuatsioonid, mis viivad väikeste mõõtmete piires elektrilise tasakaalu rikkumiseni. Samuti tekib tänu sellele elektriväli. Kuivõrd $m_i \gg m_e$, siis võime ionid lugeda praktiliselt paigalseisvateks, st $\vec{u}_i = 0$ - valime sellise taustsüsteemi, mille suhtes on ionid praktiliselt paigal. $\vec{u}_e \neq 0$ - elektronid võivad ionide suhtes liikuda.

Tekitame mingis plasma sisepiirkonnas häirituse liigutades elektrone. Sellega rikutakse ses piirkonnas elektriline reaalsus, $n_e \neq Zn_i$. Eeldame, et häiritus on väike, selle tagajärjel toimunud liikumiskiirus on samuti esimest järku väike suurus:

$$\begin{aligned} n_e &\approx n_0 + n_1(\vec{r}, t), & \text{kus } n_0 &= Zn_i = \text{const}, \\ \vec{u}_i &\approx u_1(\vec{r}, t) + 0. \end{aligned}$$

Ioonide kohta käivad võrrandid võime ära jätta. Eelduse kohaselt on häiritused väikesed, st kontsentratsiooni muutus $|n_1(\vec{r}, t)| \ll n_0$. Siis võime võrrandid (4.21)-(4.23) arendada Tayloriga ritta, arvestades vaid esimest järku väikesi liikmeid ja arvestades vaid lineaarse lähendusega (sel juhul näiteks $n_1\vec{u}_1$ on juba teist järku väike liige ja selle võime ära jätta). Seega saame võrrandid:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0, \quad (4.24)$$

$$m_e \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -e\vec{E}, \quad (4.25)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_1. \quad (4.26)$$

Viime võrrandi (4.24) teise liikme paremale poole ja võtame sellest võrrandist siis osatuletise aja järgi, saame:

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = -n_0 \operatorname{div} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{n_0 e}{m_e} \operatorname{div} \vec{E}_1 = -\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} n_1,$$

kus kasutasime lõpptulemuse saamiseks võrrandeid (4.25) ja (4.26). Seega oleme saanud elektronide kontsentratsiooni väikeste häirituste ajaliste muutuste jaoks võrrandi

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} n_1 = 0. \quad (4.27)$$

Antud võrrandit rahuldab lahend

$$n_1(\vec{r}, t) = \hat{n}_1(\vec{r}) \cos(\omega_{pe} t), \quad (4.28)$$

kus $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon m_e}}$. $\hat{n}_1(\vec{r})$ on võnkumise amplituud, mis sõltub asukohast.

Elektrostaatiliste võnkumiste sagedus ω_{pe} on üks plasma põhilisemaid omadusi.

Võnkeamplituudi $\hat{n}_1(\vec{r})$ kuju pole antud võrrandiga võimalik leida, kuid kuuma plasma jaoks, kus kõrvalekalded elektrilisest neutraalsusest on tingitud soojuslikest fluktuatsioonidest, on seda võimalik teha. Kasutades Debye kaugust λ_D , saame seose

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_1}{n_0 e^2}} = \frac{v_{sooj}}{\sqrt{2}\omega_{pe}},$$

kus v_{sooj} on elektronide soojusliku liikumise kiirus. Antud juhul kirjeldab λ_D elektrostaatilise võnkumise lainepikkust. On näha, et elektrostaatilise häirituse levimise lainepikkus on võrdeline soojusliku liikumise kiirusega.

Ka see osa täieneb kunagi, juurde tuleb Landau sumbumine koos selgituse (füüsikaline sisu) ja joonistega.

Ülesanded.

1. Näidata, et võrdus (4.28) rahuldab võrrandit (4.27).
2. Leida elektrostaatiliste võnkumiste sagedus 3 erinevat tüüpi plasma jaoks: TOKAMAK-i, Päikese krooni ja vabalt valitud plasma tüübi jaoks. Andmed kontsentratsiooni kohta saab eespool toodud tabelitest. Võrrelda neid sagedusi samade plasmatüüpide gürosagedustega.

5. Magnetohüdrodünaamika

5.1. Plasma kui vedeliku kirjeldus

Plasma kineetilises teoris arvestatakse jaotusfunktsioonidega, mis arenevad ja muutuvad väga väikeses aja- ja ruumiskaalas. Need skaalad antakse ette elektrostaatilisest võnkumise sagedusega ω_{pe} ja Landau kaugusega λ_D . Plasma mikroskoopiliste muutuste ja fluktuatsioonide uurimisel tuleb kasutada plasma kineetilist teooriat. Teisalt - plasma kui terviku kirjeldamisel kasutatakse magnetohüdrodünaamikat edaspidi lühendatult MHD), mille võrrandid on osaliselt tuletatavad kineetilise teooria võrranditest arvestades, et tegemist on nõ kahe vedeliku - ionide ja elektronidega. Visandame skeemi, mille järgi tuletatakse magnetohüdrodünaamika võrrandid.

a) Formuleerime Boltzmanni võrrandi madalaimad momendid - pidevuse võrrandi, impulsi võrrandi ja energia võrrandi, kõik need nii ionide kui ka elektronide jaoks. Sel moel saame kahe vedeliku võrrandid (elektronid ja ionid) koos 10 tundmatuga: $n_{e,i}$, $\vec{u}_{e,i}$, $T_{e,i}$. Sellise käsitluse eelduseks on elektronide ja ionide vahelised sagedased põrked. Hüdrodünaamiline ajaskaala $\tau_H \gg \tau_i \gg \tau_e$, mille korral saab kasutada vedeliku lähendust (ja momentide võrrandeid koos soojus- ja impulsivoogude võrranditega).

b) Makroskoopilised aja- ja ruumiskaalad.

Kahe vedeliku kirjelduses on sees siiski veel mikroskoopilised aja- ja ruumiskaalad. MHD võrranditeni jõudmiseks on järgmine samm - suurte aja- ja ruumiskaalade arvestamine.

Kui a - plasmakogumi karakterne mõõde, siis $\lambda_{MHD} \sim a \gg R_i$, $\tau_{MHD} \sim \frac{a}{v_a} \gg \frac{1}{\Omega_i}$, kus R_i - ionide güroradius, Ω_i - ionide gürosagedus, mis on pöördvõrdeline tsüklotronliikumise perioodiga. v_a - Alfvéni lainete kiirus (vt alapunkt 5.3).

Kuivõrd suurema magnetilis induksiooni \vec{B} korral on R_i väiksem ning $1/\Omega_i$ samuti väiksem, siis järeldub siit, et mida suurem on magnetvälja magnetiline induksioon, seda lihtsam on üle minna MHD võrranditele, mille korral võime arvestada plasmat kui tervikut eristamata individuaalseid osakeste liike.

c) Ideaalsed vedelikud.

Ideaalse MHD jaoks tuleb valida ajaskaala väiksem makroskoopiliste parameetrite (näiteks elektritakistus) muutumise ajaskaalast, $\tau_{MHD} \ll \tau_R$. Enamasti on plasma takistus väike ning seetõttu võib paljudel juhtudel (enamasti astrofüüsikalisi plasmasid, plasmasid laboritingimustes) selle tingimuse lugeda täidetuks. Kuid Päikese sisemuses toimivate protsesside uurimisel ja teoreetilisel kirjeldamisel tuleb seda tingimust arvestada.

5.2. Magnethüdrodünaamika võrrandid

Millistele küsimustele otsitakse magnethüdrodünaamika abil vastuseid:

- Kuidas leida selline magnetvälja konfiguratsioon, milles plasma oleks vangistatud nõ tasakaaluliselt?

- Millised on sellise tasakaalu lineaarse stabiilsuse omadused?

Kuidas toimub sellises plasmas ebastabiilsuste mittelineaarne arenemine ja millised on järeldused magnetvälja konfiguratsiooni kohta?

Makroskoopiliste võrrandite korral kasutame järgmisi suurusi:

$$\begin{aligned}
 \rho &= n_e m_e + n_i m_i && - \text{kogu massitihedus} \\
 \delta &= e(Zn_i - n_e) && - \text{laengutihedus} \\
 \vec{v} &= \frac{1}{\rho}(n_e m_e \vec{u}_e + n_i m_i \vec{u}_i) && - \text{masskeskme liikumise kiirus} \\
 \vec{j} &= e(Zn_i \vec{u}_i - n_e \vec{u}_e) && - \text{voolutihedus} \\
 p &= p_i + p_e && - \text{rõhk}
 \end{aligned}$$

Makroskoopilises skaalas võib tihti arvestada, et laengutihedus $\rho \approx 0$ ning $\vec{j} = \text{const.}$ MHD võrrandite tuletamiseks arvestame peale Boltzmanni võrrandist tuletatud vedeliku võrrandite (momentide võrrandite) veel Maxwelli võrrandeid. Maxwelli võrrandid vaakumis:

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{Faraday seadus,} \\
 \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} && \text{Ampere'i seadus,} \\
 \text{div } \vec{E} &= \frac{\delta}{\epsilon_0} && \text{Poisson'i seadus,} \\
 \text{div } \vec{B} &= 0 && \text{magnetmonopole pole.}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Arvestades momentide võrrandeid ning Maxwelli võrrandeid, võib nn resistiivsed MHD võrrandid (võrrandid, mille korral arvestatakse, et plasma takistus ei ole null) kirjutada järgmiselt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 - \text{pidevuse võrrand,} \tag{5.2}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \right) + \text{grad } p - \vec{j} \times \vec{B} = 0, \quad \text{impulsi võrrand} \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } p + \gamma p \text{div } \vec{v} = (\gamma - 1) \eta |\vec{j}|^2 \quad \text{siseenergia võrrand} \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{Faraday seadus} \tag{5.5}$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B}, \tag{5.6}$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}, \quad \text{Ohmi seadus diferentsiaal kujul} \tag{5.7}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \tag{5.8}$$

Kordaja η iseloomustab plasma elektritakistust. $\gamma = c_p/c_v$ - aine erisoojuste konstantsel rõhul, ja konstantsel ruumalal, suhe; üheaatomilise gaasi korral $\gamma = 5/3$.

Mõned märkused ja kommentaarid võrrandite (5.2)-(5.7) kohta.

- Võrrand (5.3) kirjeldab vaadeldavas ruumitükis ainele mõjuvat jõudu, mis on seotud rõhu gradiendi ja Lorentzi jõuga. Gravitatsioonijõudu siin arvestatud pole.

- \vec{E} ja \vec{j} on antud võrrandites nõ sekundaarsed suurused, kuivõrd need on tuletatavad magnetvälja omaduste kaudu. Avaldades võrrandist (5.6) voolutiheduse \vec{j} ning võrrandist (5.7) elektriväljatugevuse \vec{E} ning asendades need võrrandisse (5.5), oleme saanud võrrandisüsteemi, milles on kaks võrrandit vähem ning Faraday seaduse asemel

on järgmine võrrand:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\eta \text{rot} \vec{B}). \quad (5.9)$$

Antud võrrand kirjeldab magnetvälja dünaamikat plasma liikumise kiiruse kaudu.

- Paljudel juhtudel võib arvestada, et tegemist on voolu ideaalselt juhtiva plasmaga (takistus on null) ning sel juhul võib võtta $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$. Kuid ekstreemsetes tingimustes, näiteks Päikese sisemuses, TOKAMAK-des, tiheda-plasma seadmetes pinchi korral ei saa plasma takistust arvestamata jätta.

Võttes $\eta = 0$, võime kirjutada nn ideaalse MHD võrrandid:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0. \quad (5.10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} \right) + \text{grad} p = \frac{1}{\mu_0} (\text{rot} \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} p + \gamma p \text{div} \vec{v} = 0. \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0.. \quad (5.13)$$

5.3. Alfveni lained

Eeldame, et magnetilise induktsiooni vektor on suunatud z -telje suunas: $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z \equiv (0; 0; B_0)$. Eeldame veel, et $\vec{j} = 0$, $p = \text{const}$, $\vec{v}_0 = 0$, $\delta_0 = 0$. Nüüd arvestame, et väikeses ruumipiirkonnas on toimunud väike häiritus, mis on rikkunud magnetvälja, plasma rõhku, laengute tihedust ja plasma kiirust väikese s suuruse võrra, st

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1, \quad p = p_0 + p_1, \quad \delta = \delta_0 + \delta_1 = \delta_1, \quad (5.14)$$

kus $\vec{B}_1, \vec{v}_1, \rho_1, p_1$ on väikesed liikmed. Asendame võrdused (5.14) võrranditesse (5.10)-(5.13) ning lineariseerime saadud võrrandid (arvestame vaid maksimaalselt esimest järku väikeste liikmetega, suurused, kus esinevad esimest järku väikeste liikmete korrutised, näiteks $\vec{B}_1 \times \vec{v}_1$, on juba teist järku väikesed (väike liige ruudus) ning need võib ära jätta. Siis saame plasma kirjeldamiseks järgmised võrrandid:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \text{div} \vec{v}_1, \quad (5.15)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad} p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot} \vec{B}_1) \times \vec{B}_0, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\gamma p_0 \text{div} \vec{v}_1, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \text{rot} (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0). \quad (5.18)$$

Oleme saanud 8 võrrandit 8 tundmatuga. Kuid ρ_1 esineb vaid ühes võrrandis, teiste suuruste määramisel seda vaja ei ole. Keskendudes vaid aine liikumise kiiruse \vec{v}_1 ja magnetilise induktsiooni \vec{B}_1 muutustele, võime võtta ka $p_1 = 0$. Seega jäävad alles vaid võrrandid (5.16) ja (5.18). Võtame nüüd võrrandi (5.16) mõlemast poolest osatuletise

aja järgi $\frac{\partial}{\partial t}$, siis arvestame, et aeg ja ruumikoordinaadid on sõltumatud muutujad, st osatuletiste järjekorda võime muuta. Seejärel kasutame võrrandit (5.18) ja saame kokku vaid ühe võrrandi tegelikult 3 võrrandit arvestades, et \vec{v}_1 on vektor):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \times \vec{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \times \{ \text{rot} [\text{rot} (\vec{B}_0 \times \vec{v}_1)] \}. \quad (5.19)$$

Saadud võrrand kirjutab plasma (häiritus)kiiruse muutumist aja jooksul.

Kuivõrd võrrandi vasakul poolel on kiirusest teine tuletis aja järgi, paremal poolele teine tuletis ruumikoordinaatide järgi, kirjeldab võrrandi (5.19) ilmselt võnkumisi, antud juhul häirituskiiruse perioodilist muutumist. Otsime võrrandile (5.19) lahendit kujul

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \hat{v} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \equiv \hat{v} \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t), \quad (5.20)$$

kus \vec{k} on lainevektor, $|k| = \frac{1}{\lambda}$ ning \hat{v} on konstant.

Asetades võrduse (5.20) võrrandisse (5.19), saame võrrandi vasakult poolelt

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{v} \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) &= \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} [-(-\hat{v}\omega \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t))] = \\ &= \rho_0 \hat{v} [-\omega^2 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)]. \end{aligned}$$

See osa siin saab jätku, kui ma mõtlen välja, kuidas Alfveni laineid kirjeldada vähema matemaatika abiga.

...

Üldiselt - saab näidata, et **Alfveni lainete kiirus** on

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}. \quad (5.21)$$

Neid laineid nimetatakse ka magnetosonilisteks laineteks.

Alfveni lained on tingitud 'pingetest' magnetvälja jõujoontel, mis üritavad oma esialgset kuju säilitada. Makroskoopilised MHD lained on sellised, et sõltuvad lainevektorist \vec{k} , mis on seotud lainepikkusega. Aeglasematel lainetel on suurem lainepikkus, $\omega = \frac{v_a}{2\pi\lambda}$. Kõige aeglasemate lainete lainepikkus $\lambda \sim a$, kus a - plasma karakteristlik mõõde. Seega kannavad Alfveni lained edasi plasma kui terviku omadusi ja geomeetriat.

Näiteks TOKAMAK-s $n = 10^{20} m^{-3}$, $B = 3T$, st $\rho = 1,7 \cdot 10^{-7} kg/m^3$, seega $v_A = 6 \cdot 10^6 m/s$. Kui TOKAMAK-i raadius on $3m$, siis pikisuunaline lainepikkus $\lambda_{||} \approx 2\pi R \approx 20m$, $k_{||} \approx 0,3m$, $\omega_A \approx 1,8 \cdot 10^6 s^{-1}$. Karakteristlik ajaskaala $\tau = \frac{2\pi}{\omega_A} \approx 3\mu s$ - sellises ajaskaalas saavad muutused plasma omadustes 'teada' kogu plasma kui terviku geomeetria kohta.

6. Kõrgtemperatuurse magnetvangistuse seadmed. Rakendused

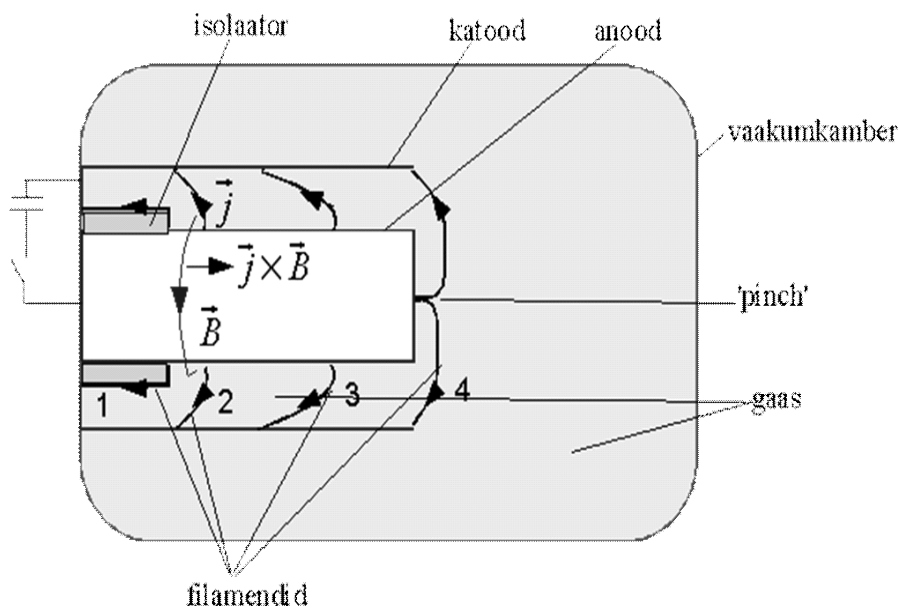
6.1. TOKAMAK-tüüpi seadmed

Täiendatakse hiljem.

6.2. Plasma-fookusseadmed

6.2.1. Plasma-fookus-seadme tööpõhimõte

Plasma-fookus seadme (PF-seade) ehitusskeem on toodud joonisel 14

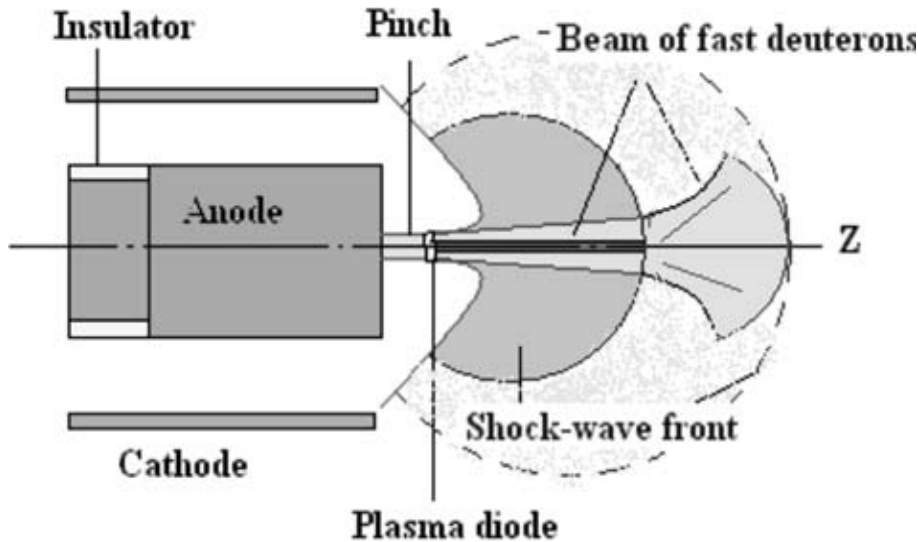


Joonis 14: Plasma-fookus-seadme põhimõtteskeem.

PF-seadme kondensaatorid laetakse kõrge pingeni U (kuni 60 kV), lülitil sulgemisel tekib hõreda gaasi keskkonnas olevate elektroodide vahel läbilöökk. Läbilöökk tekib tavaliselt mööda isolaatori pinda, harvem ka selle pinna lähedal olevas gaasis. Plasmat hakkab läbima vool, mille ümber tekib magnetväli magnetilise induktsiooniga. Tänu Lorentzi jõule $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, mis mõjub laetud osakestele, hakatakse ioone ning elektrone (nende laengud on erinevad, liiguvad nad ka vastupidistes suundades, tänu sellele on mõjuv jõud mõlemale samasuunaline) isolaatorist kaugemale lükkama, elektroodide otse poole. Teataval hetkel on plasmakihid (joonisel 14 kihid erinevatel ajahetkedel on vastavalt 1, 2 ja 3) lükatud anoodi ette kokku nn pintšiks ehk pitseks tihedaks plasmasambaks.

Plasmakihis olevate ionide-elektronide energia on umbes 0,1-1 keV. Kui plasmakihid on jõudnud pitseni, tekivad turbulentsid, mis tekitavad sisemisi täiendavaid magnetvälju.

Tänu turbulentsustele tõuseb hetkeliselt ka plasma takistus ning osale kokkusurutud plasmas antakse magnetvälja ning voolu poolt väga suur energia, st selle plasma osa temperatuur tõuseb ülejäänud plasma temperatuurist oluliselt kõrgemaks. Nn kiirete elektronide ja kiirete ionide energia suureneb kuni 100 keV-ni. Mõned nanosekundid pärast pitset pääsevad kergemad ning kiiremad elektronid sellest mikrovangistusest välja ning nende kiir on suunatud anoodile. Umbes 10 ns hiljem pääsevad magnetvangistusest ka ionid, mis suunatakse anoodist eemale elektronide vastassuunas. Joonisel 15 on toodud skeem aeglasema plasma ning kiirete ionide leviku kirjeldamiseks.

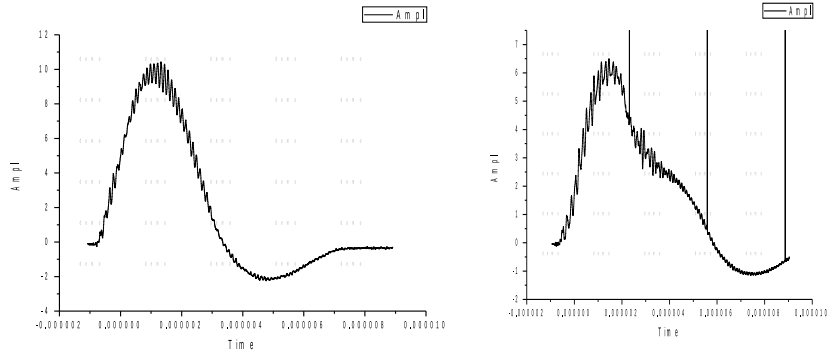


Joonis 15: Pitsest levib kiirete ionide kimp kitsas nurgas (umbes 3°), samas kui enne pitset levima hakanud nn aeglane plasma levib poolkera või isegi peaaegu kerakujuliselt. Kui kiirete ionide kimp jõuab aeglase plasma kihini, siis kiirete ionide kimp hajub laiali ning hakkab levima umbes 30° -ses nurgas.

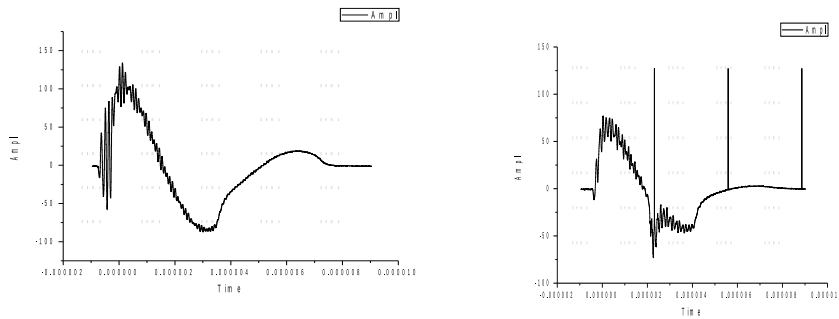
PF-seadme koguenergia üheks lasuks on enam-vähem võrdne kondensaatorite patarei kogue energiaga. Kui kondensaatorite mahtuvus on C ning pinge U , siis $W = \frac{1}{2}CU^2$. Joonistel 16 on toodud PF-seadmes tekkinud voolutugevuse graafikud. Voolutugevuse I järsk langus parempoolsel joonisel on tingitud plasma takistuse hüppelisest kasvust pitse ajal. Hüppe suurus iseloomustab ka kiiretele ionidele antavat kogueenergiat. Kuivõrd voolutugevuse muutus ei pruugi olla suur, siis kasutatakse uuringuteks ka dI/dt kui voolutugevuses I on ka väikene hüpe olemas, siis dI/dt -s on hüpe märksa suurem. Joonisel 17 on toodud dI/dt graafikud.

6.2.2. Plasma-fookus seadme rakendusi

PF-seade puhul pakuvad huvi plasma käitumise uurimine, selle teke, plasma takistuse tõusu uurimine jne, st seadme talitus ning plasma käitumine selles. Teisalt kasutatakse PF-seadet ka teistel uurimiseesmärkidel. Näiteks PF-seade röntgenkiirguse ning kiirete neutronite allikana. Juhul, kui töögaasiks on deuterium, tekivad seadmes 2,45 MeV-sed neutronid, seda sõltumata kondensaatorite hulgast ja kogue energiast. Seega saab sead-



Joonis 16: Voolutugevuse sõltuvus ajast. Töögaasina on kasutatud argooni. Vasakul on joonisel on toodud sõltuvus $I(t)$ juhul kui pitset pole. Parempoolsel joonisel on sõltuvus pitse korral. On näha, et pitse korral toimub kiire voolutugevuse langus.



Joonis 17: dI/dt sõltuvus ajast. Töögaasiks on argoon. Vasakul on joonisel on toodud dI/dt sõltuvus ajast t juhul kui pitset pole. Parempoolsel joonisel on sõltuvus pitse korral. On näha, et pitse korral on toimub, siis dI/dt graafikul on väga suur hüpe (iseärasus - peculiarity ingl kl.)

meid kasutada näiteks neutron-spektroskoopias või nagu röntgenaparaadi analoogina, rakendades läbivate kiirtena neutroneid.

Teine rakendusvaldkond materjaliuuringud. PF-seade on nõ odav seade, mis võimaldab tekitada osakesi energiaga kuni 100 keV (ja tegelikult ka protonid ning neutronid energiatega suurusjärgus 2,45 MeV). PF-seade võimaldab nende ionidega mõjutada materjale erinevate ajavahemike τ jooksul 10 ns kuni mikrosekundid. Teisalt on pinnale langev energiavoog q väga suur ning nn kahjustustegur võib olla väga suur. Materjaliuuringute valdkonnas saab PF-seadet rakendada kahel erineval reiiil pitsega ning ilma. Kui pitset ei ole, siis tekitatakse vaid nõ aeglase, 0,1-1keV-lise energiaga plasmalaine, mis mõjutab selle ette pandud materjali. Pitse korral tuleb arvestada, et pitsesest lähtuv kiirete ionide (energiaga 100 keV) suundub kitsas nurgas (umbes $3 - 5^\circ$ ning see hakkab levima umbes 10 ns hiljem kui algne aeglase plasma pilv.

7. Astrofüüsikalised ja geomagnetilised plasmad

Erinevalt nõ laboratoorsetest plasma tüüpidest, võib kosmoses leiduda plasmasid väga erineva temperatuuri, tiheduse, mõõtmete, struktuuri ja dünaamikaga. Päikesesüsteemi magnetväljade struktuuri ja dünaamika põhjalikum uurimine sai alguse 1970.ndate aastate alguses seoses Skylab-i kosmoseaparaadi kasutuselevõtuga, tänu millele ilmsid Päikese röntgenkiirte uued struktuurid, mis on sarnased päikesekrooniga. Voyager jt sarnased aparaadid on andnud uut informatsiooni planeetide magnetosfääri ja magnetväljade kohta. 1995.a. startinud SOHO satelliit annab praegu igapäevaselt infot Päikese krooni dünaamika kohta.

Nii Päikese kui ka planeetide magnetosfääri struktuuri ja dünaamika kirjeldamiseks on vajalik teoreetiline raamistik, mis praeguseks on veel lünklik tänu vaatlusandmete vähesusele. Kuigi arvutustehnika laialdane kasutamine MHD numbrilistes arvutustes võimaldab vaatluslikke lünki täita, võivad sellised arvutused ilma vaatlusliku kinnitusega tegelikult osutada tõele mittevastavateks. Kuivõrd plasma dünaamika on väga tihedalt seotud magnetväljade dünaamikaga, siis tuleb nii magnetvälja kui ka plasma dünaamikat koos käsitleda.

7.1. Päikese magnetism

Esmalt mõned faktid *Päikese standardmudeli* kohta. Päike on kuumast ainest, enamasti plasmast koosnev ligikaudu sfääriline keha massiga $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ja raadiusega $R_{\odot} = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$. Päikese koguvõimsus ehk Päikese heledus on $L_{\odot} = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Päikeselt Maale jõudev soojusvoog ehk solaarkonstant on $1,36 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$.

Päikese sisemusest otsest informatsiooni pole võimalik saada, seetõttu tuginevad teadmised Päikese seesmisest struktuurist teoreetilistel mudelitel ning helioseismoloogial.

Päikese energia tuleneb termotuumaprotsessidest, mis toimuvad Päikese tuumas, $r \leq 0,25R_{\odot}$. Päikese tuumas on temperatuur $1,6 \cdot 10^7 \text{ K}$, aine tihedus $\rho = 1,6 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3$. Antud temperatuur ja aine tihedus on piisavad $p-p$ -tüüpi protsessideks. Päikese tuumas toodetud energia transporditakse tuumast läbi kiirgustsooni ($0,25R_{\odot} \leq r \leq 0,71R_{\odot}$) välistesse kihtidesse gammakiirgusena. Ühe kvandi teekond Päikese keskmeest väliskihti võtab keskmiselt aega miljoneid aastaid, mille käigus kvant kaotab igal pörkel energiat ning välja jõudes on kvandi energia jõudnud gammakiirguse piirkonnast ultraviolettkiirguse ja nähtava kiirguse energiatasemeni. Päikese välisest kihist ($r \geq 0,71R_{\odot}$) ehk konvektsioonitsoonist kantakse energiat põhiliselt aine konvektsiooni teel. (vt joonis 14). Konvektsioonitsoonis on temperatuuri gradient nii suur, et plasma on konvektiivselt ebastabiilne. Mudeli kohaselt kujutab see piirkond endast dünamot.

Päikese nähtav atmosfäär koosneb kolmest kihist. Fotosfäär on piirkond, millest tuleb Päikese valgus. See on vaid 500 km paks. Fotosfääri põhjas on temperatuur umbes 660K ning see langeb 4300 K-ni kihi peal. Järgmine kiht on kromosfäär, paksusega umbes 2500km, kus temperatuur tõuseb taas 4300K-nist kuni 10^6 K -ni, milles on väga kuum ja hõre plasma. Selline suur temperatuuri kasv on üks MHD ees seisvatest ülesannetest, kuid üldiselt arvatakse, et energia peamiseks kandjaks kromosfääri on magnetväli.

Päikese magnetväljaga on seotud Päikese pinnal olevad päikeseplekid, mille tüüpiline

diameeter on umbes Maa diameeter ning võib ulatudakuni 40000 km-ni. Seetõttu on päikeseplekid jälgitavad ka palja silma ning nõrgemate teleskoopidegagi. Päikesepleki eluiga on 2- 30 päeva, tänu Päikese pöörlemisele liiguvad ka päikeseplekid, ekvaatoril teeb päikeseplekk ühe täistiitu 25, kõrgematel laiuskraadidel kuni 30 päevaga. Peale päikeseplekkide, millel on magnetväli ümbritsevast oluliselt kõrgem, on Päikese pinnal ka nn graanulid läbimõõduga umbes 1000 km. Graanulid on seotud Päikese aine konveksiooniga.

1859.a. avastati, et päikeseplekkide suurus ja arv muutuvad keskmiselt 11 aastase tsükliga. 20.sajandil avastati, et päikeseplekid ilmuvad alati paaris - 1 alumisel, teine ülemisel poolkeral, kusjuures alumisel poolkeral on kõikide päikeseplekkide polaarsus ühesugune (näiteks S), ülemisel vastupidine (N). (vt joonis 15). 11 aastase tsükli jooksul vahetuvad poolkerade päikeseplekkide polaarsuses (näiteks alumisele nüüd S ja ülemisele N). Seega ilmutab päikesetsükkel Päikese magnetilisi ostsillatsioone.

Päikese dünamo. Babcocki Päikese dünamo mudeli kohaselt võib päikeseplekkide tekkimist selgitada järgmiselt. Tänu kõrgjuhtiva plasma erinevale pöörlemiskiirusele on tekitatud poloidaalne tihedalt kokku surutud magnetväli (risti ekvaatoriga, sisuliselt - magnetvälja jõujooned on kinnised ümber ekvatoriaalse plasmavoolu). Pärast mitmeid pöördeid muutub algselt väike toroidaalne magnetväli (magnetvälja jõujooned on suunatud suuresti piki plasmavoolu) domineerivaks, ning magnetväli tõrjutakse konveksioonitsoonist välja. Tänu viimasele asjaolule, kantakse koos magnetooga Päikesest välja ka plasmat. Päikeselaikude kohalt väljaulatuvad magnetvälja jõujooned võivad spontaanselt katkeda ning ühineda mõne teise jõujoonega muutes niiviisi magnetvälja konfiguratsiooni veelgi. Päikese magnetismi 22 aastase perioodi selgitamiseks, päikeseplekkide tekkimiseks jms tuleb arvestada ka plasma väikest takistust (st tuleb kasutada resistiivseid MHD võrrandeid). Samuti tuleb arvestada plasma erinevat temperatuuri ja tihedust konveksioonitsooni pinnal ja alumisel kihil. Päikesedünamo probleem on praegusel ajal üks arvutusliku plasmafüüsika 'kuumemaid' probleeme.

7.2. Planetaarsed magnetväljad

7.3. Magnetosfääri plasmad ja päikesetuul

8. Plasma diagnostika

8.1. Plasma spektroskoopia

Plasma spektraalsed diagnostikameetodid tuginevad plasma kiirgus- ja neeldumisjoonte intensiivsuste mõõtmisel ning pideva spektri, spektraaljoonte poollaiuse ja nihke mõõtmisel. Kõrgerõhulise plasma olekut kirjeldavad enamasti kas osaliselt või täielikult lokaalse termodünaamilise tasakaalu mudelid. Lokaalselt termodünaamilises tasakaalus olev plasma osakesed: ioonid, elektronid, kuid ka neutraalsed aatomid, alluvad Maxwelli jaotusele (??).

Erinevate energiatasemete populatsioon määratakse Boltzmanni seadusega:

$$N_n = N \frac{g_n}{S} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right), \quad (8.1)$$

kus N_n on n -ndal energiatasemel, energiaga E_n olevate osakeste kontsentratsioon, g_n - oleku statistiline kaal ning S - statistiline summa:

$$S = \sum_{n=1}^{n_{max}} g_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right).$$

ning n_{max} - plasmas realiseeritav maksimaalne energiataseme kvantarv.

...

Molekulaarsete ribade, spektraaljoonte ning pidevspektri intensiivsus arvutatakse LTT ja OLTT plasmade jaoks välja tuginedes kiirguse ülekande võrranditele, kasutades üleminekutõenäosusi ja fotoprotsesside ristlõikeid.

Kiirgusspektril tuginevad diagnostikameetodeid rakendatakse optiliselt õhukestel plasmadel, kus neeldumine on tühiselt väike. Ilmselt on see täiesti rakendatav plasmafookus-seadmes. Taasneeldumise tõendamise võib läbi viia optilise paksuse leidmisega: $\tau_\nu = \kappa_\nu l$, kus κ_ν on sageduse ν neeldumistegur, l - neeldumiskihi efektiivne pikkus. Selleks mõõtmiseks kiiritatakse uuritavat objekti kas välise abiallikaga või kasutatakse plasmasisest (omast) kiirgust.

Plasma optilist paksust saab hinnata ka võrreldes uuritava kiirgusjoone intensiivsust I_ν samal temperatuuril oleva absoluutselt musta keha kiirgusega B_ν . Homogeense kiirgaja jaoks kehtib

$$\tau_\nu = \kappa_\nu I = -\ln\left(1 - \frac{I_\nu}{B_\nu}\right).$$

Et jätta neeldumine arvestamata, peab kehtima tingimus $\kappa_\nu l \ll 1$ (näiteks $\kappa_\nu l \sim 0,014$).

Kiirguse neeldumisel tuginevad temperatuuri määramise meetodid kasutavad enamasti Kirchhoffi kiirgusseadusi ning aatomite kontsentratsiooni.

...

Plasma heleduse kalibreerimise allikad (Brightness reference sources)

Spektraaljoonte ning pideva spektri absoluutse ja suhtelise intensiivsuse mõõtmine nõaub teatavate kalibratsioonikiirgusallikate kasutamist, nn kiirguse intensiivsuse standardeid.

Esmaseks intensiivsuse standardiks on absoluutselt musta keha kiirgus. See määratakse vaid keha temperatuuri järgi ning ei sõltu sellest, mis materjalist on keha tehtud. Kiirgusallika heledus ja spektraalne jaotus määratakse Plancki jaotuse järgi. Mudeli järgi oleks absoluutselt musta keha see, kui suures õõnsas kehas on väike ava. Keha seinad on kas süsinukust või volframist. Kuumutatud keha avast tulev kiirgus vastab suure täpsusega absoluutselt musta keha kiirgusele. Tehniliselt - elektrivooluga kuumutatud toru, milles on suur hulk diafragmasid, mis takistavad kiirguse otsesest väljapääsu torust. Torus on väikesed tiigid, milles on kuld ja plaatina ning kiirguse intensiivsus torus määratakse nende metallide sulamispunkti järgi. Kulla sulamistemperatuur (punkt) on 1337,58 K ning plaatinal 2044,9 K.

Sekundaarsed intensiivsuse standardid on kalibreeritud kindlatel lainepikkustel võrreldes neid musta keha kiirgusega. Selliste intensiivsuste kalibratsiooniviga on 5-10 %. Volframil põhinevad kalibratsioonilambitel on volframniit, mille temperatuur on umbes 2700 K. Sellise objekti 'mustus' (tumedus, blackness) on 0,45 - mõõdetud üle kogu spektriosa. Teine sobi sekundaarne intensiivsuse standard on süsinikuelektroodidega plasmakaares - anoodis olev kraater. Sel juhul on elektrivoolu intensiivsus vaid pisut väiksem kui anoodi otsas oleva kraatri temperatuur. Anoodi ots hakkab vaikselt sulama, ning see sulamistemperatuur on võrdne grafiidi sulamistemperatuuriga (3995 + - 20 K), tumedus on 0,7-0,75 ning see sõltub lainepikkusest. Sellise valgusallika temperatuur on kõrgem ning ka heledus suurem kui volframniidist valgusstandardil. Seetõttu saab seda rakendada lainepikkusteks, mis ületavad 2500 ongströmit. Seda ei soovitata kasutada piirkonnas 3700-4200 ongsträmit (sisaldab tsüanogeeni CN kiirgusjoont) ning vahemikus 4500-4740 ongströmit, mis vastab molekulaarsele süsinikule C_2 .

8.2. Spektraalsed kiirgusjooned

Lokaalsed soojuslikus tasakaalus oleva plasma spektrijoone kiirgusfaktor on

$$\varepsilon_{nk} = \frac{h\nu_{nk}}{4\pi} \frac{A_{nk}g_n}{S} N e^{-E/kT}, \quad (8.2)$$

kus N on kiirgava elemendi aatomite (ioonide) kontsentratsioon, T - plasma temperatuur, ν_{nk} , A_{nk} ülemineku $n \rightarrow k$ sagedus ning ülemineku tõenäosus, vastavalt. Seos (8.2) on põhiline meetod plasma temperatuuri, plasma (aatomid ja ioonid) kontsentratsiooni ning spektraaljoonte ülemineku tõenäosuste määramiseks.

Spektrijoonte absoluutne intensiivsus. Olgu meil teada üleminekutõenäosused, lokaalses termodünaamilises tasakaalus oleva plasma algne koostis ning rõhk. Siis võime kirjutada, et kiirgusfaktor sõltub veel vaid temperatuurist:

$$\varepsilon = \varepsilon(T).$$

Seega, määrates plasma kiirgusfaktori, saame teada kohe ka tema temperatuuri.

Lisa. Matemaatilised tähistused

Vektorite \vec{a} ja \vec{b} skalaarkorrutis on skalaar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{L.1})$$

Vektorite \vec{a} ja \vec{b} vektorkorrutis $\vec{a} \times \vec{b}$ on (pseudo)vektor, mis on risti mõlema teguriga, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$,

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y; a_z b_x - a_x b_z; a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned} \quad (\text{L.2})$$

Vektorite \vec{a} ja \vec{b} tensorkorrutis $\vec{a}\vec{b} \equiv \vec{a} \otimes \vec{b}$ on tensor:

$$\vec{a}\vec{b} \equiv \vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}. \quad (\text{L.3})$$

Märkus: sageli tähistatakse ka skalaarkorrutist ilma korrutusmärgita: $\vec{a}\vec{b}$. Sel juhul tuleb jälgida tekstist, millise tähistusviisiga konkreetsel juhul tegemist.

∇ -operaator:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{L.4})$$

Vektorvälja \vec{a} divergentsiks on skalaar:

$$\text{div } \vec{a} \equiv \nabla \cdot \vec{a} \equiv \frac{\vec{a}}{\vec{r}} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (\text{L.5})$$

Vektorvälja divergents iseloomustab antud vektorvälja allikate tihedust antud ruumipunktis. Näiteks \vec{E} allikateks on laengud, seega $\text{div } \vec{E}$ iseloomustab laengutihedust antud punktis.

Skalaarvälja φ gradiendiks $\text{grad } \varphi$ nimetatakse vektorit, mis on suunatud funktsiooni kiireima kasvu suunas (seega nivoopinna normaali sihis) ja mille pikkus võrdub funktsiooni φ muutusega pikkusühiku kohta selles suunas ning on määratud valemiga (L.6). Gradient iseloomustab suuruse u muutumist ruumis, st ta on ruumiline kiirus.

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (\text{L.6})$$

Näide. Leida välja $u = x^3 + y^3 + 3yz^2 - 5xy^2$ gradientvektorid punktides $M_1 = (0, 0, 0)$ ja $M_2 = (1, 1, 2)$.

Lahendus.

$$\begin{aligned}\overline{\text{grad } u} &= (3x^2 - 5y^2)\vec{i} + (3y^2 + 3z^2 - 10xy)\vec{j} + 6yz\vec{k}, \\ \text{grad } u|_{M_1} &= \vec{0}, \\ \text{grad } u|_{M_2} &= -2\vec{i} - \vec{j} + 12\vec{k}.\end{aligned}$$

Vektori \vec{a} rootor on vektor:

$$\text{rot } \vec{a} \equiv \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \quad (\text{L.7})$$

Gauss-Ostrogradski teoreem: vektori \vec{a} voog läbi kinnise pinna S võrdub selle vektorvälja allikate kogu intensiivsusega (allikate koguhulgaga) pinnaga S piiratud ruumalas V ,

$$\oint_S \vec{a} \, d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{a} \, dV, \quad (\text{L.8})$$

kus $d\vec{S} = dS\vec{n}_S$, kus dS on pindalaelement ning \vec{n} on pinnaga risti olev normaalvektor antud pinnatükil.

Gradient vektorist) $\text{grad } \vec{A} \equiv \nabla \vec{A} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}}$ on tensor, mille komponendid on esitatavad järgmise maatriksiga:

$$\text{grad } A = \nabla A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (\text{L.9})$$

$$\left(\vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \vec{u} = \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}; u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}; u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right). \quad (\text{L.10})$$

$$\mathbf{P} : \nabla \vec{u} = \sum_i \sum_j P_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (\text{L.11})$$

Kasutatud kirjandus