

4. Jaotused

Jaotusfunktsioon ja tihedusfunktsioon. Histogramm.

Ühtlane jaotus – diskreetne ja pidev ühtlane jaotus.. Binoomjaotus. Poissoni jaotus. Normaal- ehk Gaussi jaotus. Studenti jaotus.

4.1. Histogramm ja kumulatiivne sagedus. Tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon.

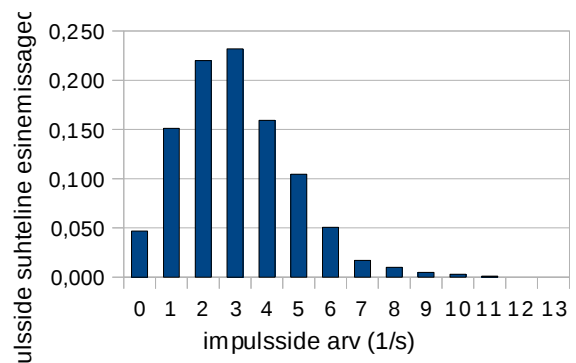
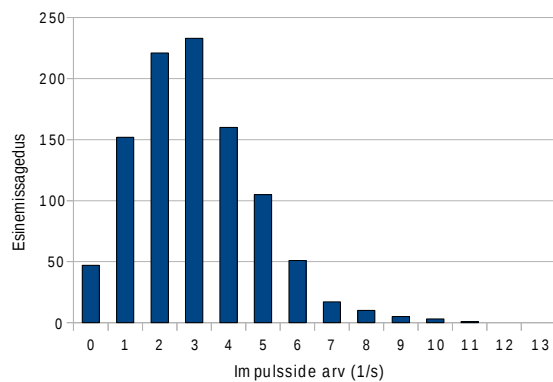
4.1.1. Histogramm ja kumulatiivne sagedus.

Toome ühe näite histogrammi koostamise kohta. Radioaktiivse elemendi lagunemist on uuritud Geiger-Mülleri loenduriga järgmiselt. Loendur mõõdab impulsside arvu ühes sekundis. Kuivõrd radioaktiivse aine lagunemine on tõenäosuslik, siis igas ajaühikus on lagunenud tuumade ning loenduri poolt registreeritud ioniseerivate osakeste arv ehk suurus, mis iseloomustab aine lagunemise intensiivsust, erinev. Tulemused on toodud tabelis 4.1.

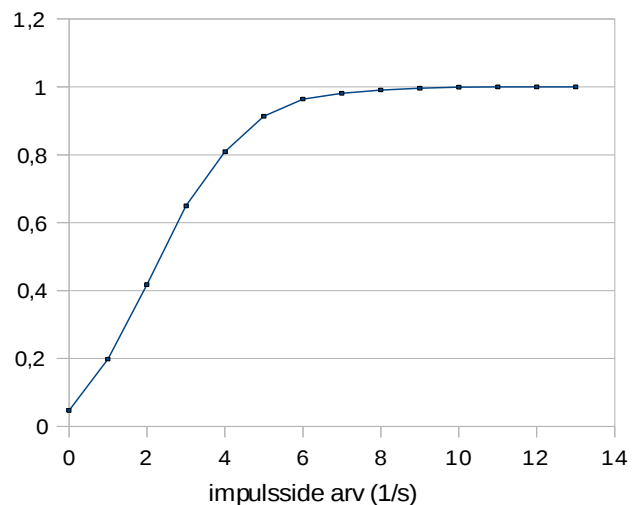
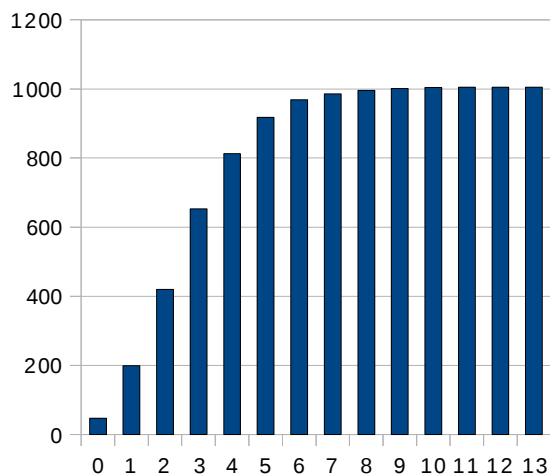
Tabel 4.1. Aine radioaktiivsel lagunemisel registreeritud mõõtmiste tulemuste jaotus intensiivsuste järgi (Holmberg, Perkkiö jt. Santorius. 2007).

Intensiivsus x_i (impulssi sekundis 1/s)	Kordumiste arv mõõtmistulemustes f_i ehk esinemissagedus	Kumulatiivne esinemissagedus
0	47	47
1	152	199
2	221	420
3	233	653
4	160	
5	105	
6	51	
7	17	
8	10	996
9	5	1001
10	3	1004
11	1	1005
12	0	1005

Histogrammi koostamiseks – andmed plokki, siis Graph, selle alt Next, siis 'First Column as Label'



Joonis 4.1. Aine radioaktiivsel lagunemisel registreeritud mõõtmiste tulemuste jaotus intensiivsuste järgi. Histogrammid a) Mõõtmiste arvu; b) mõõtmiste suhtelise arvu e tõenäosuse jaoks.



a

b

Joonis 4.2. Kiirguse intensiivsuse kumulatiivne sagedus. a) Kumulatiivne sagedus impulsside arvu järgi; b) impulsside suhtelise esinemissageduse järgi.

Juhul, kui on andmed on jagunenud küll diskreetselt, kuid klasside arv on väga suur, siis saab klasside arvu vähendada. Analoogiliselt tuleb ka pideva andmete jaotuse puhul andmed jagada teataval viisil klassidesse. Üks võimalikke (ja enamlevinuid) jaotusi klasside arvu k valikuks on

$k = \sqrt{N}$, kus N on mõõtmiste koguarv. Siis võib võtta kõikide klasside laiuse ühesuguse: klassi laius $\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$.

4.1.2. Tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon

Mingi suuruse tihedusfunktsioon $f(x)$ kirjeldab seda, milline on tõenäosus antud suuruse konkreetse arvulise väärtuse leidmiseks. Ülaltoodud näite korral kirjeldab seda joonisel 4.1. b toodud graafik (tõsi, eeldusel, et igal mõõtmiste seerial saame tõesti samasuguse jaotuse). Tihedusfunktsioon annab võimaluse arvutada tõenäosust, et antud suurus omaks konkreetset arvulist väärtust.

Jaotusfunktsioon $F(x)$ kirjeldab tõenäosuse kumulatiivset kasvu. Jaotusfunktsioon kasvab alati 0-st kuni 1-ni, kusjuures väärtus 0 on juhul, kui $x < x_{\min}$ ja $F(x)$ kui $x > x_{\max}$.

4.3. Jaotused

4.3.1. Ühtlane jaotus

Diskreetne ühtlane jaotus ilmneb näiteks täringute viskamisel. Täringu viskamisel on kõigi numbrite ilmlemise tõenäosus $W(n)$ ühesugune ehk $1/6$.

Keskvaartuse saame järgmiselt:

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^6 n W(n) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5. \quad (4.1)$$

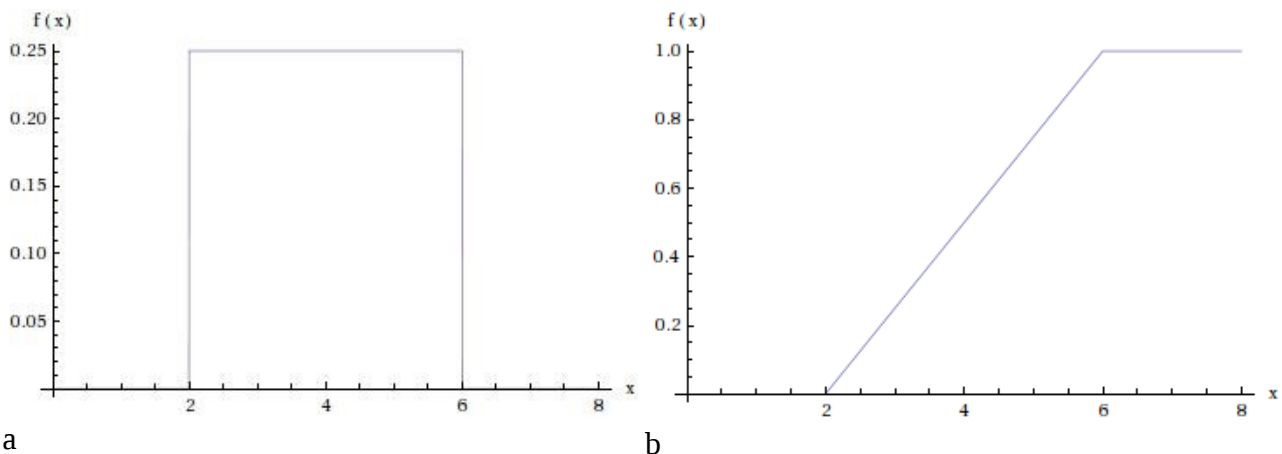
Dispersiooni saame järgmiselt:

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^6 (n - \bar{n})^2 W(n) = \frac{1}{6} [(1 - 3,5)^2 + (2 - 3,5)^2 + (3 - 3,5)^2 + (4 - 3,5)^2 + (5 - 3,5)^2 + (6 - 3,5)^2] = 2,92.$$

Üksiktulemuste standardhälve, mis kirjeldab andmete (mõõtetulemuste) hajumist keskvaartuse ümber saame

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2,92} = 1,71.$$

Pidevat ühtlast jaotust nimetatakse ka ristkülikjaotuseks. Sellisel juhul on tihedusfunktsiooni kujuks ristkülik kõrgusega $W(x) = 1/(x_{\max} - x_{\min})$.



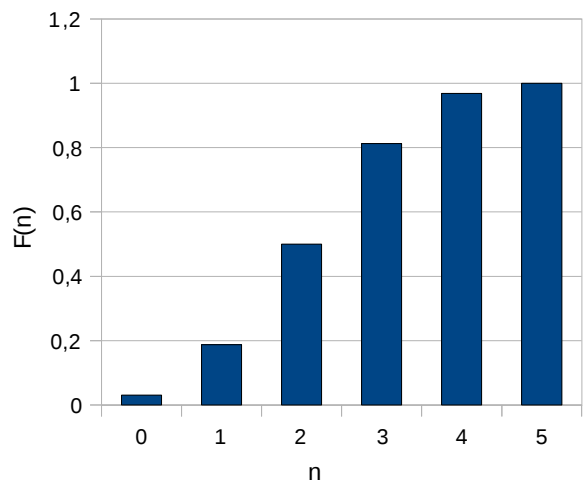
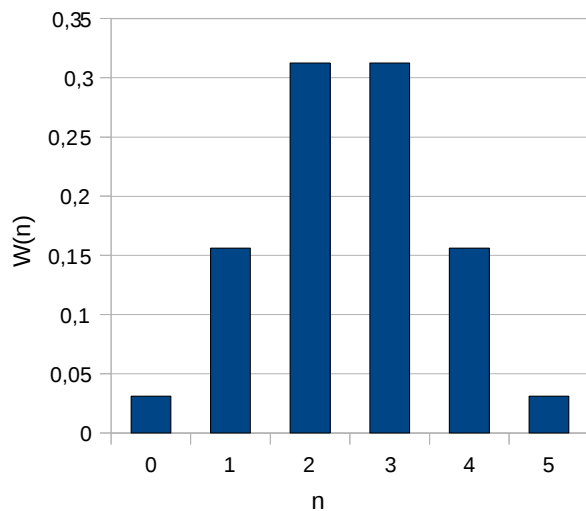
Joonis 4.3. Ühtlase jaotuse a) tihedusfunktsiooni graafik ja b) jaotusfunktsiooni graafik.

4.3.2. Binoomjaotus

On palju sündmusi, mille N -kordsel korduskatsel võib jagada kaheks alamhulgaks A ja B . Tõenäosus, et katse sooritamisel ilmeks sündmus A on p , tõenäosus, et ilmneks B , on siis $q = (1 - p)$. Tähistame $W(n)$ tõenäosuse, et sündmus A esineb katseseerias N korda. Siis binoomtõenäosus saadakse valemist

$$W(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n q^{N-n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Olgu katseks näiteks mündi viskamine. Tõenäosused, et ilmneks kas kull (p) või kiri (q), on võrdsed 0,5. Olgu katsete arv $N=5$. $W(5) = 0,03125$ – tõenäosus, et kull tuleks $n=5$ katsel. Analoogiliselt teistega. $W(4) = 0,15625$, $W(3) = 0,3125$, $W(2) = 0,3125$, $W(1) = 0,15625$, $W(0) = 0,03125$.



a

b

Joonis 4.4. Binoomjaotuse a) tihedusfunktsiooni ja b) jaotusfunktsiooni graafikud.

Binoomjaotuse tõeline keskvärtus leitakse järgmiselt:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N n W(n) = p N$$

Dispersioon on siis $\sigma^2 = p N (1-p) = \bar{n} (1-p)$

ning standardhälve $\sigma = \sqrt{\bar{x}(1-p)}$.

4.3.3. Poissoni jaotus

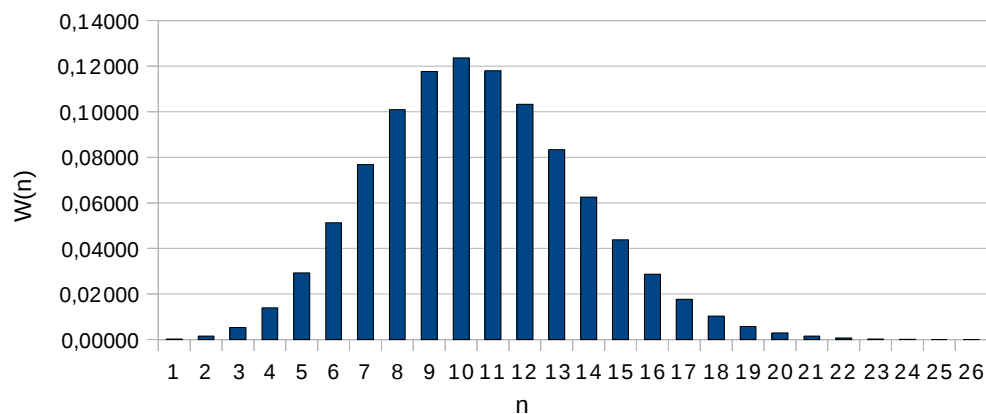
Poissoni jaotus on binoomjaotuse teatav piirjuhtum, kui korduste arv läheb väga suureks (ehk lõpmatusele), kuid mõõdetav või analüüsitud suurus saab omandada vaid täisarvulisi väärtusi.

Sel juhul saab arvutada mingi suuruse tõenäosust järgmise tihedusfunktsiooni järgi:

$$W(n) = e^{-a} \frac{a^n}{n!},$$

kus a on matemaatiline ootus ehk Poissoni jaotuse keskvärtus $\bar{x} = a$ ning standardhälve

$$\sigma \approx \sqrt{a}.$$



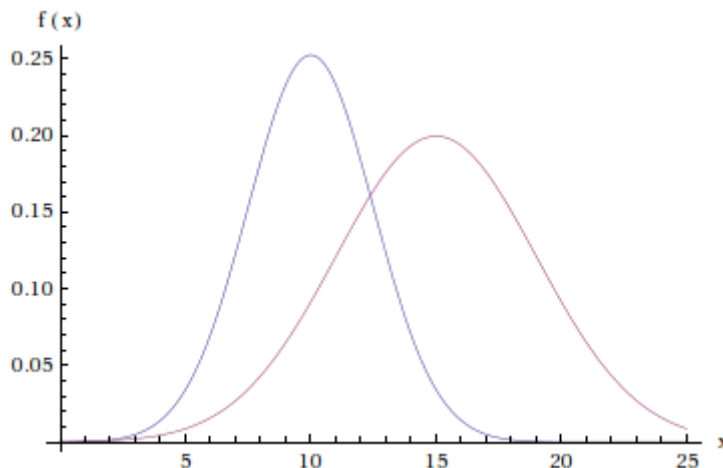
Joonis 4.5. Poissoni jaotuse graafik juhul, kui $a=10,5$.

4.3.4. Normaaljaotus ehk Gaussi jaotus

Nii binomijaotus kui ka Poissoni jaotus oli näided diskreetsete jaotuste kohta. Juhul, kui analüüsitava suuruse väärtused võivad muutuda pidevalt, kirjeldavad suuruse väärtuse ilmnemise tõenäosust pidevad jaotused, millest olulisim on normaaljaotus ehk Gaussi jaotus. Gaussi jaotuse tihedusfunktsioon on järgmine:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

kus $\bar{x}$ on suuruse x keskvärtus ja σ on standardhälve.



Joonis 4.6. Gaussi jaotus a) $\bar{x}=10,5$ ja $\sigma=2,5$ - sinine joon; b) $\bar{x}=15$ ja $\sigma=4$.

4.3.5. Studenti jaotus

Studenti jaotuse valemit siinkohal tooma ei hakka. Gaussi jaotus on Studenti jaotuse piirjuhtumiks juhul, kui mõõtmiste arv läheneb lõpmatussele.