Tööleht nr 2. Iteratsioonimeetodid (dihhotoomia meetod, harilik iteratsioonimeetod, Newtoni meetod, modifitseeritud Newtoni meetod)

Lõigu poolitamise meetod.

On vaja leida võrrandi $F(x) = 0$ lahendid lõigul $[a; b]$. Olgu näiteks $F(a)>0$ ja $F(b)<0$ Selleks:
1) Leiame $x = (a+b)/2$.
2) Arvutame välja $F(x)$.
3) Kui $F(x)>0$, siis olgu $a = x$, vastupidisel juhul $b = x$.
4) Kontrollime, kas $b - a > \varepsilon$. Kui jah, siis lähme punkti 1,

Kui ei, siis loeme lahendiks saadud väärtuse $x = \bar{x}$ täpsusega ε.

Näide: Leiame võrrandi $2^x = 2x$ lahendid lõigul [0; 1.5]. Selleks käivitame programmi **iterats.nb**.

Ülesanne: Leiame võrrandi $3^x + 4^x = 5^x$ lahendid lõigul [1; 2.5]. Selle võrrandi esitame kujul

$F(x) = 3^x + 4^x - 5^x = 0$. Ülalnimetud programmis tuleb teha vastavad muudatused.

Siin $F(1) > 0$ ja $F(3) < 0$. Käivita programm ja leia võrrandi lahend, kui $\varepsilon = 0.001$; $\varepsilon = 10^{-6}$.

Harilik iteratsioonimeetod.

Võrrandi $F(x) = 0$ esitame kujul $x = g(x)$ ja kasutame iteratsioonivalemit $x_{n+1} = g(x_n)$, nii kaua kui on täidetud võrratus $|x_{n+1} - x_n| \geqslant \varepsilon$. Siin ε on lahendi viga.

Iteratsiooniprotsess koondub (s.t. $x_n \to \bar{x}$, kui $n\to\infty$) kui on täidetud tingimus $g'(x) < 1$ kusjuures $x \in [a; b]$.

Näide: Lahendame hariliku iteratsioonimeetodi abil võrrandi $x = 8 - e^{\frac{x}{4}}$. Alglähendiks võtame $x_0 =1$, täpsuseks $\varepsilon = 0{,}01$.

Ülesanne: Lahendame hariliku iteratsioonimeetodi abil võrrandi $f(x) = x - \sin x - 0{,}25 = 0$. Selleks viime võrrandi kujule $x = \sin x + 0{,}25$.

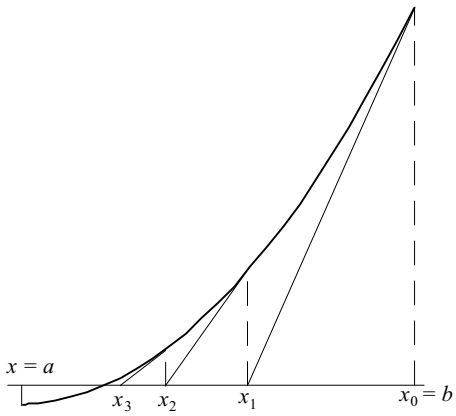
Võttes alglähendiks $x = x_0 = 1{,}2$ ja veaks $\varepsilon = 10^{-6}$, saame $\bar{x} =1{,}71231$. Kontrolli.

Ülesanne: Leia hariliku iteratsioonimeetodiga võrrandi $2^x = 2x$ lahendid. Selleks muuda antud programmi.

Ülesanne: Leia võrrandi $(x+2)^{x^2-x} = 1$ lahendid. Mitu lahendit on?

Newtoni meetod ehk puutujate meetod.

Võrrandi $F(x) = 0$ lahendamiseks leiame funktsioonile $F(x)$ alglähendi kohal $x = x_0$ puutuja. Puutuja lõikepunkt x teljega annab järgmise lähendi jne. Niiviisi toimides esitub iteratsiooniprotsess valemiga $x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$. Seda valemit kasutatakse nii kaua kui on täidetud võrratus $|x_{n+1} - x_n| \geqslant \varepsilon$. Alglähendiks x_0 valitakse lõigu $[a; b]$ see otspunkt, milles $F(x)F''(x) > 0$.



Näide:

Leiame võrrandi $e^x - 3x = 0$ lahendi, kui alglähend $x_0 = 3$ ja $\varepsilon = 0.001$.

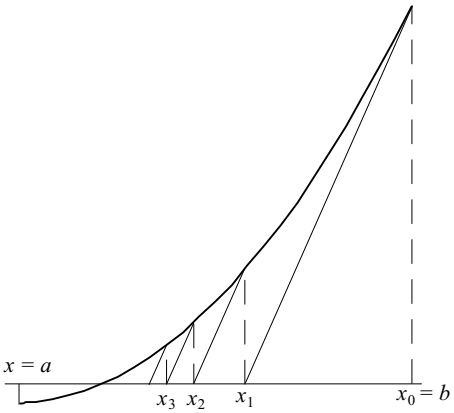
Ülesanne: Leiame võrrandi $x - \sin x - 0.25 = 0$ lahendi lõigul [1,1; 1,5]. Sel juhul $\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)} = \dfrac{x - \sin x - 0{,}25}{1 - \cos x}$.

Et $F''(x) =\sin x > 0$ ja $F(x) > 0$ kui $x = 1{,}5$, siis võtame alglähendiks $x_0 = b = 1{,}5$.
Võttes $\varepsilon = 10^{-6}$. saame järgmise tulemuse: x = ... Millise tulemuse saad, kui võtad veaks $\varepsilon = 10^{-9}$?

Ülesanne: Leia Newtoni meetodiga võrrandi $0{,}5x = \cos x$ lahendid. Mitu lahendit on?

Tööleht nr 3.

Modifitseeritud Newtoni meetod



Iteratsiooni eeskiri: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_0)}$. Modifitseeritud Newtoni meetod lähendab aeglasemalt kui üldine Newtoni meetod. Tavaliselt kasutatakse modifitseeritud Newtoni meetodit siis, kui tuletisi pole mugav kõigi x_n korral välja arvutada.Tihti kasutatakse ligikaudset abivalemit

$F'(x_n) = \dfrac{dF(x_n)}{dx} \approx \dfrac{F(x_n + \Delta x) - F(x_n)}{\Delta x}$, kus $\Delta x = \varepsilon$. Siis saab iteratsioonivalem kuju $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\Delta x\, F(x_n)}{F(x_n + \Delta x) - F(x_n)}$.

Näide: Lahendame võrrandi $e^x - 3x = 0$. Alglähendiks võtame $x_0 = 3$, täpsuseks võtame $\varepsilon = 0.001$.

Ülesanne: Leiame võrrandi x - sin x - 0.25 = 0 lahendi lõigul [1,1; 1,5]. Alglähendiks võtame $x_0 = b = 1{,}5$. Võttes $\varepsilon = 10^{-6}$. saame järgmise tulemuse: x = ... Millise tulemuse saad, kui võtad veaks $\varepsilon = 10^{-3}$?

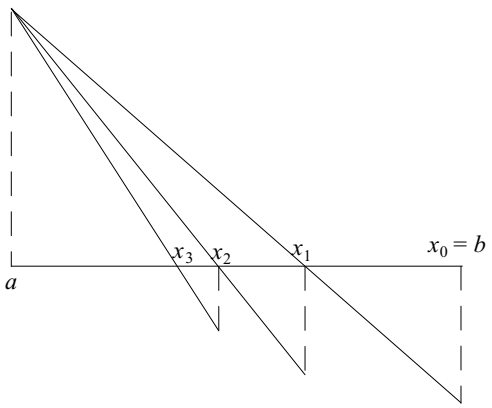
Ülesanne: Leia võrrandi $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ lahendid lõigul [-4; 4], veaga 0.001 ja veaga 10^{-6}. Mitu lahendit on sellel lõigul?

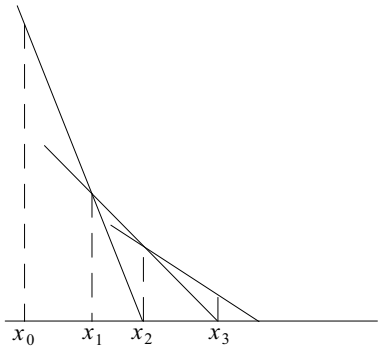
Kõõlude meetod

Fikseerime ühe punkti, selle kus $F(x)F''(x) > 0$. Joonisel on selleks punkt (a; $F(a)$). Ühendame punktid (a; F(a)) ja (b; $F(b)$) kõõluga. See kõõl lõikab x-telge kohal x_1. Nüüd ühendame punktid (a; F(a)) ja (x_1; $F(x_1)$) kõõluga. See kõõl lõikab *x-telge punktis* x_2 ... jne.

Kui kõõlu otspunkt $x = a$ on liikumatu, siis $x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F(x_n) - F(a)}(x_n - a)$. Kui liikumatu on teine kõõlu otspunkt $x = b$, siis on iteratsioonivalem järgmine:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(b) - F(x_n)}(b - x_n).$$





Lõikajate meetod

Lõikajate meetod erineb kõõlude meetodist selle poolest, et abstsissid a ja b valitakse ühelt poolt lahendit ja neid ei fikseerita.Tavaliselt kasutatakse *kõõlude-lõikajate kombineeritud meetodit*. Sel puhul võetakse lõigust [a; b] kaks lähendit x_0 ja x_1. Iteratsioonivalemiks on

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{F(x_n) - F(x_{n-1})} F(x_n).$$

Näide: Lahendame kõõlude-lõikajate kombineeritud meetodil võrrandi $e^x - 3x = 0$. Alglähendiks võtame $x_0 = 2.8$, $x_1 = 3$, täpsuseks võtame $\varepsilon = 0.001$.

Ülesanne: Leiame kõõlude-lõikajate kombineeritud meetodil võrrandi x - sin x - 0.25 = 0 lahendi. Sobiv arvutiprogramm võiks olla järgmine:

Võttes alglähenditeks $x_0 = 1{,}5$ ning $x_1 = 1{,}4$ ja veaks $\varepsilon = 10^{-6}$, saame $\bar{x} = 1{,}171231$. Kontrolli.

Ülesanne: Leia võrrandite $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$ ja $x^3 - 10\sin x = 0$ lahendid.

Lõikajate-kõõlude meetodi puhul kasutatakse x_{n+1} arvutamisel kahte eelmist lähendit x_n ja x_{n-1}. Seetõttu seda meetodit nimetatakse kahesammuliseks. Harilik iteratsioonimeetod, Newtoni meetod ja Steffenseni meetod on ühesammulised - nende korral avaldub x_{n+1} ainult x_n kaudu.

Steffenseni meetod:

Võrrandi $F(x) = 0$ esitame kujul $x = g(x)$ ja kasutame iteratsioonivalemit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\left(g(x_n) - x_n\right)^2}{x_n - 2 \cdot g(x_n) + g(g(x_n))}.$$

Näide: Lahendame Steffenseni meetodil võrrandi $e^x - 3x = 0$. Selle võrrandi esitame kujul $x = e^x - 2x$. Alglähendiks võtame $x_0 = 2.8$, täpsuseks võtame $\varepsilon = 0.001$.

Ülesanne: Leia võrrandi x - sin x - 0.25 = 0 lahend Steffenseni meetodi abil.

Lõikajate meetodi kasutamisel tuleb igal sammul arvutada uus funktsiooni g väärtus, Steffenseni meetodi korral kaks g väärtust, Newtoni meetodi puhul üks f ja üks f' väärtus. Kui funktsiooni ja funktsiooni tuletise arvutamisele kulub ühepalju aega ning põhiline arvutustöö kulub funktsiooni ja selle tuletise arvutamisele, siis on Steffenseni ja Newtoni meetodi üks samm ligikaudu sama tööma-hukas kui lõikajate meetodi kaks sammu. Lõikajate meetodi puuduseks on see, et nimetajas on funktsiooni lähedaste väärtuste vahe, mistõttu täpsuse kao vältimiseks tuleb nimetaja arvutada küllaldase täpsusega. Viimane puudus on ka Steffenseni meetodil.

Mitu iteratsioonisammu on vaja, et leida võrrandi x - sin x - 0.25 = 0 lahendit täpsusega 0,000001?

Algväärtuseks võta 1,2.

Võrdle dihhotoomia meetodit, harilikku iteratsioonimeetodit, Newtoni meetodit, modifitseeritud Newtoni meetodit, kõõlude- lõikajate kombineeritud meetodit ja Steffenseni meetodit. Täida tabel

Võrrand	Alg-väärtus	Vahemik	Viga	**dihhot**	**hariter**	**newton**	**modnewt**	**koolloik**	**steffens**
x - sin x - 0.25 = 0	1,2	]1,1; 1,2[	10^{-5}						
$x \cdot 2^x = 1$			10^{-5}						
$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$	2	]0,5; 1,5[	10^{-5}						
$2x + \cos x = 0{,}5$			10^{-5}						